Übungen zur Vorlesung ‘Algebra und Zahlentheorie’

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 10

Abgabe: Bis Montag, den 07.01.2019, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (9 Punkte) Sind die folgende Polynome separabel?

a) $f_1(t) = t^4 - 3t - 2 \in \mathbb{Q}[t]$,

b) $f_2(t) = t^6 - 1 \in \mathbb{F}_2[t]$,

c) $f_3(t) = t^5 - t^2 + 1 \in \mathbb{F}_7[t]$.

Aufgabe 2. (3 + 2 + 3 + 3 Punkte) Sei $K \subset L$ eine algebraische Körpererweiterung.

a) Wenn L/K normal ist, zeigen Sie, dass L eine normale Hülle von L/K ist.

b) Finden Sie eine normale Hülle der folgenden Körpererweiterungen:
   - i) $K = \mathbb{Q} \subset L = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$,
   - ii) $K = \mathbb{Q} \subset L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$,
   - iii) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset L = \mathbb{Q}(\sqrt[9]{2})$.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Für $f, g \in K[t] \setminus \{0\}$ beweisen Sie, dass der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}_K(f, g)$ von $f, g \in K[t]$ gleich der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}_L(f, g)$ von $f, g \in L[t]$ ist.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Für die folgenden algebraische Körpererweiterungen $K \subset L$ berechnen Sie $[L : K]_s$.

a) $K = \mathbb{Q} \subset L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
   [Hinweis: das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist $t^4 - 10t^2 + 1$].

b) $K = \mathbb{F}_3(t) = Q(\mathbb{F}_3[t]) \subset L = \mathbb{F}_3(t)[x]/(x^9 - t)$.