Übungen zur Vorlesung 'Algebra und Zahlentheorie'

V. Hoskins (WS 2018/2019)

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Montag, den 22.10.2018, 14 Uhr.

Aufgabe 1. (4 + 4 + 2 + 2 Punkte) Sei $M = \{e, a, b, c\}$ eine Menge mit vier Elementen.

a) Zeigen Sie, es gibt genau eine Gruppe $(G_1, \cdot)$, so dass $G_1 = M$, $e_{G_1} = e$ und das Gruppengesetz erfüllt $a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = e$.

b) Zeigen Sie, es gibt genau eine Gruppe $(G_2, \cdot)$, so dass $G_2 = M$, $e_{G_2} = e$ und das Gruppengesetz erfüllt $a \cdot b = e$.
[*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass dann auch $b \cdot a = e$ und $c \cdot c = e$ gelten muss.]

c) Sei G eine Gruppe mit vier Elementen. Zeigen Sie, dass es dann entweder einen Gruppenisomorphismus $\varphi : G \xrightarrow{\simeq} G_1$ oder einen Gruppenisomorphismus $\psi : G \xrightarrow{\simeq} G_2$ gibt.

d) Schließen Sie, dass jede Gruppe mit vier Elementen abelsch ist.
[*Hinweis:* Bemerken Sie erst, dass G_1 und G_2 abelsch sind.]

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei G eine Gruppe . Für Untergruppen $H_1 \leq G$ und $H_2 \leq G$, zeigen Sie, dass der Durchschnitt $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe von G ist. Ist die Vereinigung $H_1 \cup H_2$ eine Untergruppe? Begründen Sie Ihre Antwort (Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel).

Aufgabe 3. (6 Punkte) Sei G eine Gruppe und $\varphi : G \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen rationalen Zahlen. Nehmen Sie an, dass das Bild von φ in den ganzen Zahlen enthalten ist, also $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann sogar gilt $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \{\pm 1\}$.

Aufgabe 4. (4 + 5 + 3 Punkte) Sei S_3 die Gruppe von Isomorphismen der Menge $\{1, 2, 3\}$.

a) Für jede Element aus S_3 berechnen Sie die Ordnung und das inverse Element.

b) Welche Teilmengen von S_3 sind Untergruppen? Für jede Untergruppe $H \leq S_3$ berechnen Sie die Ordnung von H und den Index $|G : H|$ [*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Lagrange].

c) Welche Untergruppen von S_3 sind normale Untergruppen?