ALGEBRA UND ZAHLENTHEORIE : PROBEKLAUSUR (24.01.19)

PRÜFUNGSFRAGEN

V. Hoskins

Anweisungen:

- Es gibt 4 Aufgaben, von denen Sie **genau 3 Aufgaben** bearbeiten müssen. Lesen Sie alle Aufgaben und wählen Sie dann die 3 Aufgaben, die Sie bearbeiten wollen.
- Beantworten Sie die Aufgaben im Antwortheft. Schreiben Sie die Nummer der Aufgabe, an der Sie arbeiten, am Anfang jeder Seite.
- Der Lösungsweg einer Aufgabe muss stets klar erkennbar sein. Anderenfalls wird die Teilaufgabe mit null Punkten bewertet.
- Insgesamt gibt es 90 Punkte und Sie brauchen 40 Punkte um zu bestehen.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sätze aus der Vorlesungen können verwendet werden, aber die Aussage muss deutlich erklärt werden.
- Alle Antworten sind zu begründen.

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe.

a) (5 Punkte) Definieren Sie eine Untergruppe $H \subset G$ und eine normale Untergruppe.

b) (4 Punkte) Definieren Sie die Linksnebenklassen von $a \in G$ für $H \leq G$ und der Quotientengruppe G/H als eine Menge.

c) (5 Punkte) Für $G = S_3$ und die Untegruppe $H =< \tau_{12} >$, die wird von der Transposition

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

erzeugt, finden Sie alle Linksnebenklassen von H in G. Ist H ein normale Untergruppe?

d) (10 Punkte) Wenn $H \leq G$ eine normale Untergruppe ist, beweisen Sie, dass G/H die Struktur einer Gruppe hat, so dass die kanonische Abbildung $\pi : G \to G/H$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

e) (6 Punkte) Für $H = \mathbb{Z} \subset G = (\mathbb{R}, +)$ erkären Sie, warum H eine normale Untergruppe von G ist. Dann finden Sie einen Gruppenisomorphismus von G/H nach $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} < (\mathbb{C}^\times, \cdot)$.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

a) (3 Punkte) Definieren Sie ein Ideal I von R.

b) (5 Punkte) Seien I und J Ideale von R. Beweisen Sie, dass es einen injektiven Ringhomorphismus $R/I \cap J \to R/I \times R/J$ gibt. [Hier können Sie den Homomorphiesatz für Ringhomomorphismen ohne Beweis benutzen.]

c) (5 Punkte) Geben Sie die Definition, dass I und J relativ prim sind. In diesem Fall beweisen Sie, dass $I \cap J = I \cdot J$.

d) (5 Punkte) Falls I und J relativ prim sind, beweisen Sie, dass es einen Ringisomorphismus Ringhomorphismus $R/I \cdot J \to R/I \times R/J$ gibt.

e) (5 Punkte) Für $R = \mathbb{Z}$ und $I = n\mathbb{Z}$ und $J = m\mathbb{Z}$, zeigen Sie, dass I und J genau dann relativ prim sind, wenn $\mathrm{ggT}(n, m) = 1$.

f) (7 Punkte) Finden Sie die kleinste positive ganze Zahl, die die Reste 7 und 5 bei Teilung durch 8 beziehungsweise 21 hat.

Aufgabe 3. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung.

a) (2 Punkte) Geben Sie die Definition, dass $\alpha \in L$ algebraisch über K ist.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass jede endliche Körpererweiterung $K \subset L$ algebraisch ist.

c) (3 Punkte) Geben Sie die Definition eines Minimalpolynoms von $\alpha \in L$ über K.

d) (12 Punkte) Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K.

   i) Beweisen Sie, dass das Minimalpolynom m_α von α über K existier und ist eindeutig bestimmt. Ferner zeigen Sie, dass der Kern von $\varphi_\alpha : K[t] \to L$ mit $\varphi_\alpha(g) = g(\alpha)$ gleich das von m_α erzeugte Ideal von $K[t]$ ist.

   ii) Beweisen Sie, dass m_α prim ist und $K[t]/(m_\alpha)$ ein Körper ist.

   iii) Berechnen Sie den Grad von $K(\alpha) := K[t]/(m_\alpha)$ über K.

e) (4 Punkte) Finden Sie ein Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$ von $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{C}$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl $n > 1$.

f) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}} := \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}$$

eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist. Dann berechnen Sie $[\mathbb{A}_{\mathbb{C}/\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 4. Sei $K \subset L$ eine algebraische Körpererweiterung.

a) (6 Punkte) Geben Sie die Definition der Normalität und Separabilität von L/K an.

b) (4 Punkte) Wenn $[L : K] = 2$ zeigen Sie, dass L/K normal ist.

c) (9 Punkte) Sei $K \subset L \subset M$ eine Kette von algebraischen Körpererweiterungen.

   i) Wenn M/K normal ist, ist M/L normal?

   ii) Wenn M/K normal ist, ist L/K normal?

   iii) Wenn M/L und L/K normal sind, ist M/K normal?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

d) (7 Punkte) Falls $\mathrm{Char}(K) = 0$, beweisen Sie, dass L/K separabel ist. [Hinweis: Zuerst zeigen Sie, dass ein irreduzible Polynom f genau dann eine mehrfache Nullstelle hat, wenn die Ableitung f' das Nullpolynom ist].

e) (4 Punkte) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ separabel und normal ist, wobei $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$.