

1. Seien $X = \mathbb{R}^1$ und $Y = \mathbb{R}$ und

$$f: X \rightarrow Y \\ x \mapsto \cos(x) \quad . \quad (1)$$

Bestimme das Bild der folgenden Mengen unter der Abbildung f .²

- (a) $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi\}$
- (b) $(-\pi, \pi)$,
- (c) \mathbb{R}

Tipp: Es lohnt sich, die Funktion zu skizzieren. Dann kann man die Bilder viel leichter identifizieren.

Lösung

- (a) Es genügt die Elemente der gegebenen Menge in f einzusetzen und die Ergebnisse als Menge zusammenzufassen. Es ist also

$$f\left(\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi\right\}\right) = \{1, 0, -1, 1\} = \{1, 0, -1\} \quad . \quad (2)$$

Die 1 muss nicht ein zweites Mal aufgeführt werden. Eine Menge ist, wie wir wissen, nur über ihre Elemente bestimmt, Doppelnennungen von Elementen verändern die Menge nicht.

- (b) Für den Anspruch des Kurses genügt es hier, den Graphen der Cosinusfunktion zu betrachten und festzustellen, welche Funktionswerte für die Stellen im Intervall $(-\pi, \pi)$ von der Funktion angenommen werden.

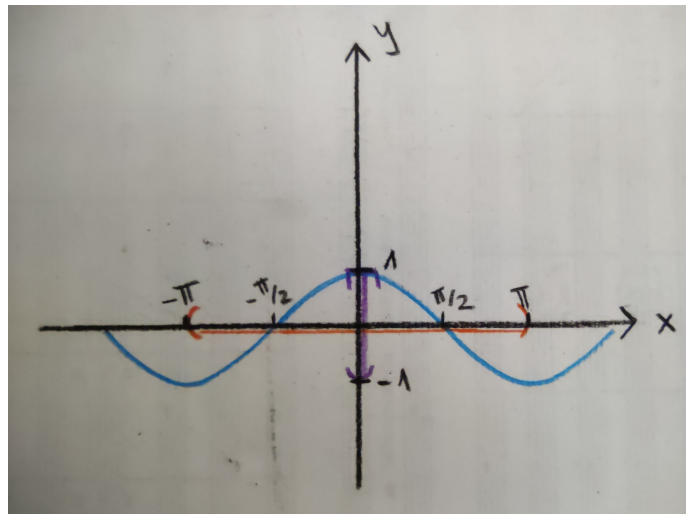


Abbildung 1: Der Graph der Cosinusfunktion mit einigen Markierungen bezüglich der Aufgabe. Details im Text.

¹ \mathbb{R} ist die Menge der reellen Zahlen - also „alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl“. Diese Vorstellung von \mathbb{R} genügt an dieser Stelle.

²Hinweise: $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(2\pi) = 1$.

Das gegebene Intervall ist auf der x -Achse rot markiert. In der gesuchten Bildmenge sind dann alle Werte, die die blau gezeichnete Cosinusfunktion innerhalb dieses Intervalls annimmt. Dies ist das violett markierte Intervall auf der y -Achse, wobei die eckige Klammer bei der 1 andeuten soll, dass diese in der Bildmenge enthalten ist, während die runde Klammer bei der -1 andeuten soll, dass diese *nicht* in der Bildmenge enthalten ist. Dies liegt daran, dass das Intervall $(-\pi, \pi)$ offen ist, das heißt, dass die Ränder $-\pi$ und π nicht im Intervall enthalten sind. Genau an diesen Stellen würde die Cosinusfunktion den Wert -1 annehmen. Da diese beiden Werte jedoch nicht im Intervall $(-\pi, \pi)$ enthalten sind, ist die -1 auch nicht in der Bildmenge von $(-\pi, \pi)$ enthalten. Die 1 hingegen ist enthalten, da $\cos(0) = 1$ und 0 in $(-\pi, \pi)$ enthalten ist. Insgesamt ist also

$$f((-\pi, \pi)) = (-1, 1] . \quad (3)$$

- (c) Die Bildmenge der reellen Zahlen unter der Cosinusfunktion ist einfach gesprochen die Menge aller Werte, die die Cosinusfunktion überhaupt annimmt. Letztlich ist dies einfach durch das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ gegeben, wie es sich am Graphen ablesen lässt, als

$$f(\mathbb{R}) = [-1, 1] . \quad (4)$$

2. Überprüfe von den folgenden Äußerungen, ob es sich um Sätze/Aussagen handelt. Begründe jeweils Deine Entscheidung!

- (a) Seien A und B zwei Mengen. Dann gilt:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} . \quad (5)$$

- (b) Sei $a = 3$.

- (c) Sei $a = 3$. Dann gilt, dass $a + 1 = 5$.

- (d) Die Straße ist nass.

- (e) In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen a , b und c , wobei a und b die Seitenlängen der Katheten beschreiben und c die Seitenlänge der Hypotenuse beschreibt, gilt, dass

$$a^2 + b^2 = c^2 . \quad (6)$$

Lösung

- (a) Es handelt sich bei dieser Äußerung mehr um eine Definition als um eine Aussage, das heißt, sie ist zwar immer wahr, da die Schnittmenge eben so wie aufgeschrieben definiert ist, aber dennoch hat es eher den Charakter einer Definition als den eines Satzes bzw. einer Aussage.
- (b) Diese Äußerung ist eine Aussageform aber keine Aussage, denn es ist nicht sinnvoll zu fragen, ob $a = 3$ wahr oder falsch ist.

- (c) Diese Äußerung ist *falsch*, also handelt es sich um eine Aussage bzw. einen Satz.
 - (d) Diese Äußerung hat mit Mathematik erstmal nichts zu tun und es ist auch nicht sinnvoll, nach dem Wahrheitswert zu fragen. (Um welche Straße geht es überhaupt?) Also ist es keine Aussage.
 - (e) Diese Äußerung ist *wahr*, also handelt es sich um eine Aussage bzw. einen Satz.
3. GANZ WICHTIG: Fachsprache üben! Das ist wichtiger, als dass die Aufgaben alle bearbeitet werden und richtig sind. Viele Dinge werdet Ihr in den Vorlesungen sowieso wiedersehen. Wichtiger ist, dass Ihr dann mit der richtigen Fachsprache ausgestattet seid, dass Ihr die Sachen richtig verstehen könnt! Bei Fragen: Fragen!