

M E N G E N

M A T H E M A T I K E N T D E C K E N 1

Alexandru Constantinescu

Freie Universität Berlin

Wintersemester 2024/2025

Definition (Cantor 1895)

Unter einer ‚**Menge**‘ verstehen wir jede **wohldefinierte** Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen. In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}.$$

Zwei Mengen M und N sind gleich genau dann wenn:

$$(m \in M \Rightarrow m \in N) \text{ und } (n \in N \Rightarrow n \in M).$$

Die erste Implikation bedeutet M ist eine **Teilmenge** von N .
Man schreibt:

$$M \subseteq N.$$

MENGEN DEFINIERT MAN

durch Auflisten der Elemente:

1. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
2. $\{\text{Haus}, \text{Hund}, \text{Katze}, \clubsuit, \{1, 2, 3\}, 100, 0\%* :)\}$.
3. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

In dieser Vorlesung: $0 \in \mathbb{N}$.

4. $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
5. $X = \{1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28, \dots\}$

Wie geht es hier weiter?

MENGEN DEFINIERT MAN

durch eine Eigenschaft:

$\{x : \text{hat die Eigenschaft } E\}$ oder

$\{x \in M \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$.

1. $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.
2. $2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}\}$.
3. **Achtung:** $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ ist unklar.
 - 3.1 $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.
 - 3.2 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.
 - 3.3 $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.
4. $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 7\}$

MENGEN DEFINIERT MAN

durch eine Formel oder einen Ausdruck für gewisse Elemente einer Menge:

$$\{F(x, y, \dots) \mid x, y, \dots \in M\}.$$

1. $2\mathbb{Z} = \{2 \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}.$
2. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}.$
3. $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ wobei $i^2 = -1.$
4. $g = \{(3, 0) + t(-1, 4) : t \in \mathbb{R}\}.$