Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 15. November 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 5

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h5.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 22. November 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Geben Sie jeweils zwei verschiedene Beweise folgender Sätze.

1. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wenn $x^2 + y = 13$ und $y \neq 4$, dann gilt $x \neq 3$.
2. Es seien A, B, C Mengen mit $A \setminus B \subseteq C$. Wenn $x \in A \setminus C$, dann $x \in B$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_{<n} := \{a \in \mathbb{N} \mid a < n\}$. Wie viele Elementen hat die Potenzmenge $2^{\mathbb{N}_{<n}}$? Geben Sie einen Beweis durch vollständige Induktion für Ihre Antwort an.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

1. Für alle Mengen M, N, P, Q gilt: Wenn $M \subseteq P$ und $N \subseteq Q$, dann $M \times N \subseteq P \times Q$.
2. Für alle Mengen M, N, P, Q gilt: Wenn $M \subseteq P$ und $N \subseteq Q$, dann $M \times P \subseteq N \times Q$.
3. Für alle Mengen M, N, P, Q gilt: $(M \times N) \cup (P \times Q) = (M \cup P) \times (N \cup Q)$.

Zusatzaufgabe 4.

Man beweise durch vollständige Induktion, dass folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr sind.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}$.
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i! \cdot i = (n+1)! - 1$, wobei $k!$ das Produkt der ersten k positiven ganzen Zahlen bezeichnet.
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) \cdots (i+k-1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdots (n+k)}{k+1}$, wobei $k \in \mathbb{N}_{>1}$.
6. Die Zahl $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

Zusatzaufgabe 5.

Man betrachte die Aussage:

Für Mengen A und B gilt $A \neq B$, genau dann, wenn $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$.

1. Ist folgender Beweis der Aussage richtig?

> Wenn $A = B$, dann folgt
>
> $$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$
>
> Anderseits, wenn $A \neq B$, dann existiert ein $x \in A$ mit $x \notin B$ oder ein $x \in B$mit $x \notin A$. Im ersten Fall gilt $x \in A \setminus B$, also $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Der zweite Fall ist symmetrisch zum ersten Fall, und somit funktioniert der auch.

2. Ist die Aussage wahr?

Zusatzaufgabe 6.

Man betrachte die Aussage:

$$1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n+1) \cdot 3^n = n3^{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

1. Ist folgender Beweis richtig?

> Wir zeigen das durch vollständige Induktion. Wir nehmen an, dass die Aussage wahr für $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann haben wir
>
> $$\begin{aligned} 1 \cdot 3^0 + \cdots + (2n+3) \cdot 3^{n+1} &= n \cdot 3^{n+1} + (2n+3) \cdot 3^{n+1} \\ &= (3n+3) \cdot 3^{n+1} \\ &= (n+1) \cdot 3 \cdot 3^{n+1} \\ &= (n+1) \cdot 3^{n+2} \end{aligned}$$
>
> Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Ist die Aussage wahr? Wenn nicht, dann finde man eine Formel für $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) \cdot 3^i$ und man beweise, dass diese richtig ist.

Zusatzaufgabe* 7.

Man bestimme alle Abbildungen $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{N}$;

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n)$ eine Quadratzahl.