Freie Universität Berlin A. Constantinescu
Institut für Mathematik O. Parczyk
WiSe24/25 V. Hiebeler
Stand: 8. November 2024 D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 4

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h4.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 15. November 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man finde Beispiele und Nichtbeispiele[†] für folgende Definitionen.

1. Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt **zwei-zu-eins**, wenn die Faser über jedes Element im Wertebereich Kardinalität zwei hat.
2. Eine ganze Zahl x heißt **glückliche Zahl**, wenn durch Wiederholen des folgendes Prozesses die 1 erhalten wird:

   Addiere die Quadrate der Ziffern von x um so eine neue Zahl x' zu erhalten.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Es seien A, B, C Mengen. Man betrachte folgende Aussage:

Wenn $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ und $x \in A$, dann gilt $x \in B$.

1. Man finde den Fehler im folgenden Beweis:

   > Es sei $x \in A$. Wir nehmen an, dass $x \notin B$. Weil $x \in A$ und $A \subseteq C$, ist $x \in C$. Da $x \notin B$ und $B \subseteq C$, folgt $x \notin C$. Wir haben aber $x \in C$ und $x \notin C$; das ist ein Widerspruch. Also muss unsere Annahme $x \notin B$ falsch gewesen sein. Also $x \in B$.

2. Ist die Aussage wahr? (Man zeige oder man widerlege die Aussage.)

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

[†] Das heißt Beispiele die die Bedingungen einer gegebenen Definition **nicht** erfüllen. Diese sollten aber dieselbe Natur haben. Also ein Apfel oder $\sqrt{2}$ ist kein Nichtbeispiel von Primzahl. Ein Nichtbeispiel von Primzahl muss eine natürliche Zahl sein.

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man gebe jeweils ein Beispiel und ein Nichtbeispiel für folgende Definitionen:

1. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **stark konvex**, wenn
$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\ x \neq y \ \text{ und } 0 < t < 1.$$

2. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **stark konkav**, wenn
$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\ x \neq y \ \text{ und } 0 < t < 1.$$

3. Man gebe ein Beispiel einer Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die weder konvex noch konkav ist.
4. Man zeige oder man widerlege folgende Aussage:
$$\text{Wenn } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ konvex ist, dann gilt } f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Zusatzaufgabe 4.

Man zeige, dass folgende Zuordnung keine Abbildung $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definiert:
$$f\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{a+c}{b+d}.$$

Zusatzaufgabe 5.

Eine **Metrik** auf der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, die folgende drei Eigenschaften erfüllt:

(M 1) $d(P,Q) \geqslant 0$ für alle $P, Q \in \mathbb{R}^2$ und $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ und

(M 2) $d(P,Q) = d(Q,P)$ für alle $P, Q \in \mathbb{R}^2$ und

(M 3) $d(P,Q) \leqslant d(P,S) + d(S,Q)$ für alle $P, Q, S \in \mathbb{R}^2$.

Wir definieren die **Taxi-Metrik** $d_{\text{Taxi}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, durch
$$d_{\text{Taxi}}(P,Q) := |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| \qquad \forall\ P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Man zeige, dass d_{Taxi} eine Metrik laut der obigen Definition ist.
2. Ein **Taxi-Kreis** ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ der Form:

$$K(P,r) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \ : \ d_{\text{Taxi}}(P,Q) = r\} \qquad \text{mit} \ \ P \in \mathbb{R}^2 \text{ und } r \in \mathbb{R}_{>0}.$$

   Man zeichne den Taxi-Kreis $K((0,0),1)$. Wie sehen Taxi-Kreise allgemein aus?

Zusatzaufgabe 6.

Man betrachte die Aussage:

Wenn $m \in \mathbb{Z}$ gerade ist, und $n \in \mathbb{Z}$ ungerade ist, dann gilt $n^2 - m^2 = n + m$.

1. Ist folgender Beweis richtig?

   Wenn m gerade ist, dann ist $m = 2k$. Wenn n ungerade ist, dann ist $n = 2k+1$. Es gilt also

$$\begin{aligned} n^2 - m^2 &= (2k+1)^2 - (2k)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 \\ &= 4k + 1 \\ &= 2k + 1 + 2k \\ &= m + n. \end{aligned}$$

2. Ist die Aussage wahr?

Zusatzaufgabe 7.

Man betrachte den folgenden falschen Satz.
Falscher Satz. Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x + y = 10$, dann $x \neq 3$ und $y \neq 8$.

1. Was ist falsch an dem folgenden Beweis?

   Wir nehmen an, dass die Schlussfolgerung falsch ist. Dann haben wir $x = 3$ und $y = 8$. Aber dann ist $x + y = 11$ und das ist ein Widerspruch weil $x + y = 10$ laut Voraussetzung. Also muss die Schlussfolgerung wahr sein.

2. Man beweise, dass der Satz falsch ist.