Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 1. November 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 3

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h3.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 8. November 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man bestimme ob folgende Abbildungen injektiv, beziehungsweise surjektiv, sind. Falls die Eigenschaft gilt, dann definiere man auch eine Links-, beziehungsweise Rechtsinverse.

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definiert durch $f(x) = 2x + 3$.
2. $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definiert durch $g(x) = 2x + 3$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man betrachte die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{0, 1\}$.

1. Man gebe alle Abbildungen mit Definitionsbereich A und Wertebereich B an.
2. Man definiere eine bijektive Abbildung

$$F : \{f \mid f : A \longrightarrow B \text{ ist eine Abbildung}\} \longrightarrow 2^{\{a,b,c\}}.$$

(Sie müssen eine Abbildung definieren **und** zeigen, dass diese bijektiv ist.)

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ zwei Abbildungen.

1. Man zeige, dass wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Man zeige, dass wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
3. Man gebe jeweils Beispiele zweier Abbildungen f und g von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, sodass
   a) $g \circ f$ injektiv ist, aber g nicht injektiv ist.
   b) $g \circ f$ surjektiv ist, aber f nicht surjektiv ist.

Zusatzaufgabe 4.

Man bestimme, ob folgende Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Man bestimme für jede Bijektion die Umkehrabbildung.

1. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $f(x) = x^2 + x + 1$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+5}$.
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{5\}$ gegeben durch $f(x) = \frac{5x}{x+2}$.
4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch $f(x) = |x - 3| + 3$.
5. $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch $f(x) = 2^x$.

Zusatzaufgabe 5.

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Seien $M' \subseteq M$ und $N' \subseteq N$ Teilmengen von M, beziehungsweise N. In dieser Aufgabe bezeichnet $f^{-1}(X)$ das Urbild von X unter f.

1. Man zeige, dass, wenn $N' \subseteq \mathrm{Bild}(f)$, dann $f(f^{-1}(N')) = N'$.
2. Man zeige, dass $M' \subseteq f^{-1}(f(M'))$.
3. Man gebe ein Beispiel einer Abbildung $f : M \longrightarrow N$ und einer Teilmenge $M' \subseteq M$, sodass $M' \subsetneq f^{-1}(f(M'))$ gilt.

Zusatzaufgabe 6.

Sei M eine Menge und sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von M. Das heißt $M_i \subseteq M$ für alle $i \in I$. Man zeige, dass

1. $M \setminus \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I}(M \setminus M_i)$.
2. $M \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I}(M \setminus M_i)$.

Zusatzaufgabe* 7.

Es seien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x) \neq 0$, wenn $x \neq 0$.

(iii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y), \\ g(x+y) &= g(x) \cdot g(y) - f(x) \cdot f(y). \end{aligned}$$

Man zeige, dass

1. $g(x) = g(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
2. $g(0) = 1$.
3. $f(x)^2 + g(x)^2 = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.