Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 21. Oktober 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 2

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h2.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 1. November 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Es seien A und B Mengen. Die **symmetrische Differenz** von A und B ist definiert als $A \,\Delta\, B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Man zeige, dass

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Hinweis: Malen Sie zuerst Venn Diagramme der beiden Situationen. Dann beweisen Sie das formal, mit Hilfe der Bemerkung 1.13 aus dem non-Skript.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man zeige, dass die Gleichheit $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ **nicht** für beliebige Mengen A, B, C gilt. Welche der Inklusionen "$\subseteq$" oder "$\supseteq$" gilt für alle Mengen A, B, C?

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Seien A, B, C drei Mengen. Man beweise, dass

(i) $A \cup B = A \iff B \subseteq A$

(ii) $A \cap B = A \iff A \subseteq B$

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Zusatzaufgabe 4.

Man bestimme folgende Menge indem man die Elemente explizit aufschreibt:

$$S_6 = \{A \subseteq \mathbb{N} \ : \ \text{die Summe der Elementen in } A \text{ ist gleich mit } 6\}.$$

Zum Beispiel die Summe der Elementen in $A = \{0, 1, 2, 4\}$ ist 7, also $A \notin S_6$.

Hinweis: Es reicht nicht diese Elementen aufschreiben, man muss auch begründen warum es nur genau diese sind.

Zusatzaufgabe 5.

Sei M eine Menge. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Es existieren Teilmengen A_1, A_2, A_3 von M, sodass $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3$.

(b) Die Kardinalität von M ist mindestens 2.

Zusatzaufgabe 6.

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ definieren eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

1. $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$,
2. $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$,
3. $\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$,
4. $\Gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$,
5. $\Gamma_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$,
6. $\Gamma_6 = \Gamma_5 \cup \{(0, 0)\}$.

Zusatzaufgabe* 7.

Man bestimme die Mengen A und B, und die reellen Koeffizienten $p, q \in \mathbb{R}$, sodass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + p = 0\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + qx - 3 = 0\}, \\ A \cup B &= \{-2, -1, 1, 3\}. \end{aligned}$$