Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 18. Oktober 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 1

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h1.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 25.Oktober 2025.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man bestimme die Negation folgender Aussagen.

A: *Wenn es die Sonne scheint, dann regnet es nicht.*

B: $x^2 - x + 2 = 0$ *impliziert* $x = 1$ *oder* $x = -2$.

C: P *ist falsch und (*Q *oder* R *sind wahr).*

D: *Für jede natürliche Zahl* a*, existiert eine ganze Zahl* b*, sodass für alle positiven natürlichen Zahlen* c *gilt (*$a < b$ *oder* $a > b + c$*).*

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man zeige mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass für beliebige Aussagen A, B, C folgende zusammengesetzte Aussagen Tautologien sind.

E: $\text{nicht}(A \ \text{ und } B) \Rightarrow (\text{nicht}(A) \ \text{ oder } \ \text{nicht}(B))$.

F: $\big[(A \ \text{ und } B) \ \text{ und } (A \Rightarrow C) \ \text{ und } (B \Rightarrow C)\big] \Rightarrow C$.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man bestimme die Umkehrung, die Inversion und die Kontraposition folgender Implikationen. Man bestimme auch ob die jeweiligen Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn 1 eine Primzahl ist, dann ist der Fundamentalsatz der Arithmetik falsch.
2. Wenn 704 durch 11 teilbar ist, dann gilt $7 - 0 + 4 = 0$.
3. Seien a, b ganze Zahlen. Wenn $a + b > 1$, dann ($a > 1$ oder $b > 1$).
4. Wenn $2^{2^n} + 1$ eine Primzahl für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist das 4294967297-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Zusatzaufgabe 4.

Man betrachte folgende Aussage, die von den Variablen $a, b \in \mathbb{R}$ abhängig ist:

$$A(a,b): \quad a - b = 3.$$

Man beweise, dass folgende Aussage falsch ist:

$$\big(\forall\ a \in \mathbb{R},\ \ \exists\ b \in \mathbb{R},\ \text{sodass}\ A(a,b)\big) \Rightarrow \big(\exists\ b \in \mathbb{R},\ \ \text{sodass}\ \ \forall\ a \in \mathbb{R}\ \ A(a,b)\big).$$

Zusatzaufgabe 5.

Folgende Aussage war in der Linearen Algebra Klausur zu beweisen:

$$M(a) \sim M(b) \iff a \neq b.$$

Die Natur der Objekte $a, b, M(a)$ und $M(b)$ ist hier nicht wichtig. Man sollte nur wissen, dass $\nsim$ die Negation von $\sim$ ist, genau wie $\neq$ die Negation von $=$ ist.

Bob hat bewiesen, dass "$a = b \Rightarrow M(a) \nsim M(b)$". Hat Bob somit eine der Implikationen, die zu zeigen waren, bewiesen? Wenn Ja, welche?

Zusatzaufgabe 6.

Man bestimme folgende Mengen.

1. $\{x \in \mathbb{Z} \ :\ x^2 - 5x + 6 = 0\}$.
2. $\{x \in \mathbb{Z} \ :\ x > 0 \ \text{ und } 2x^2 - x - 3 = 0\}$.
3. $\{x \in \mathbb{Q} \ :\ x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0\}$.
4. $\{x \in \mathbb{Q} \ :\ |x - 1| + |x - 2| = 3\}$.
5. $\{x \in \mathbb{R} \ :\ x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0\}$.
6. $\{x \in \mathbb{R} \ :\ 3x^3 + x^3 + 3x + 1 = 0\}$.