Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 28. Januar 2025

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 11

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h11.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 17. Januar 2025.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 points**

Beweisen Sie mit Hilfe einer geeigneten Partition und der Summenregel, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Lösung zu Übung 1.

Für $i = 0, \dots, n$ sei $A_i = \{B \subseteq [n] : |B| = k+1, \max(B) = i+1\}$. Mit einer Bijektion, die $i+1$ löscht lässt sich dann einfach einsehen, dass $|A_i| = \binom{i}{k}$. Aber $\{A_0, \dots, A_n\}$ ist auch eine Partition von $A = \{B \subseteq [n+1] : |B| = k+1\}$. Damit folgt die Gleichung direkt aus der Summenregel.

Aufgabe 2. **2 points**

Gibt es unter den Zahlen $1, 2, \dots, 10^5$ mehr Zahlen, die in der Dezimalschreibweise die Ziffer 9 enthalten, oder gibt es mehr, die keine 9 enthalten.

Lösung zu Übung 2.

Die Anzahl der Zahlen aus $1, 2, \dots, 10^5$ lässt sich als 5-maliges Ziehen mit Zurücklegen und mit Reihenfolge aus $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ betrachten ($(0, 0, 0, 0)$ entspricht 10^5). Es gibt also natürlich $|\Omega(10, 5)| = 10^5$ solche Zahlen. Davon haben $|\Omega(9, 5)| = 9^5 = 59.049$ keine Ziffer 9, was mehr als die Hälfte ist.

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Ein Unternehmen möchte einzigartige Produktnummern generieren. Jede Produktnummer besteht aus drei Teilen:

1. einem Präfix aus 2 Buchstaben (a–z),
2. einer Ziffernfolge aus 4 Ziffern (0–9),
3. einem Suffix aus 3 Sonderzeichen aus der Menge $\{!, @, \#, \$, \%\}$.

Beantworten Sie die folgenden Fragen in dem Sie zuerst eine Menge formulieren, die das gewünschte zählt.

(a) Wie viele verschiedene Produktnummern gibt es, wenn keine Einschränkungen gelten?

(b) Wie viele Produktnummern gibt es, wenn keine Wiederholung von Buchstaben, Ziffern oder Sonderzeichen erlaubt ist?

(c) Wie viele Produktnummern gibt es, wenn mindestens eine Ziffer wiederholt wird?

Lösung zu Übung 3.

(a) Die Menge der Produktnummern kann kodiert werden durch

$$A = \{(a, b, c, d, e, f, g, h, i) : a, b \in [26], c, d, e, f \in [10], g, h, i \in [5]\} = [26]^2 / times [10]^4 \times [5]^3 \,.$$

Durch mehrfache Anwendung der Produktregel erhalten wir $|A| = 26^2 \cdot 10^4 \cdot 5^3 = 845.000.000$.

(b) In diesem Fall gibt es noch die Einschränkungen

$$B = \{(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in A : |\{a, b\}| = 2, |\{c, d, e, f\}| = 4, |\{g, h, i\}| = 3\} \,.$$

Durch Anwendung der Produktregel können wir $B = B_1 \times B_2 \times B_3$ *schreiben wobei* $B_1 = \{(a, b) \in [26] : |\{a, b\}| = 2\}$, $B_2 = \{(c, d, e, f) \in [10] : |\{c, d, e, f\}| = 4\}$ *und* $B_3 = \{(g, h, i) \in [5] : |\{g, h, i\}| = 4\}$. *Dies entspricht jeweils dem Ziehen ohne Zuzrücklegen mit Reihenfolge und damit*

$$|B| = |B_1| \cdot |B_2| \cdot |B_3| = |\Omega_2(26, 2)| \cdot |\Omega_2(10, 4)| \cdot |\Omega_2(5, 3)| = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 65.520.000 \,.$$

(c) In diesem Fall gibt es die Einschränkungen

$$C = \{(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in A : |\{c, d, e, f\}| = 3\} \,.$$

Der Großteil lässt sich wie bei (a) zählen nur bei den Ziffern erhalten wir statt 10^4 *nun* $10^4 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4960$, *weil dies alle Möglichkeiten minus die ohne Wiederholung sind. Zusammen erhalten wird* $|C| = 26^2 \cdot 4960 \cdot 5^3 = 419.120.000$.

Zusatzaufgabe 4.

Eine Konferenz hat 10 Teilnehmer. Beantworten Sie die folgenden Fragen in dem Sie zuerst eine Menge formulieren, die das gewünschte zählt.

(a) Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es, wenn alle Teilnehmer in einer Reihe sitzen?

(b) Wie viele Sitzordnungen gibt es, wenn 3 bestimmte Personen immer nebeneinander sitzen müssen (als eine "Gruppe" betrachtet)?

(c) Wie viele Sitzordnungen gibt es, wenn 2 bestimmte Personen nie nebeneinander sitzen dürfen?

Lösung zu Übung 4.

(a) Die Menge der Sitzordnungen kann formuliert werden als

$$A = \{(a_1, \ldots, a_{10}) \in [10]^{10} : a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$$

und dann folgt direkt $|A| = |\Omega_2(10, 10)| = 10!$.

(b) Angenommen die bestimmten Personen sind $1, 2, 3$. *Unter sich haben Sie wie bei (a) dann* $3! = 6$ *Möglichkeiten zu sitzen. Die gesamte Menge der Sitzordnungen lässt sich kodieren als*

$$B = \{(a_1, \ldots, a_{10}) \in A : \exists i \in [7] : \{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\} = [3]\}$$

und dementsprechend aufteilen in die Platzierungen der 3 Personen und der restlichen 7, wobei das $i \in [7]$ *noch gewählt werden muss. Das entspricht einer Partition von* B *in Mengen* $\{B_1, \ldots, B_7\}$ *je nach der Wahl von* i *und zusammen dann*

$$|B| = \sum_{i=1}^{7} |B_i| = 7 \cdot |\Omega_2(7, 7)| \cdot |\Omega_2(3, 3)| = 7 \cdot 7! \cdot 3!\,.$$

(c) Angenommen die beiden Personen sind 1 *und* 2. *Dann zählen wir*

$$C = \{(a_1, \ldots, a_{10}) \in A : \nexists i \in [9]\{a_i, a_{i+1}\} = [2]\}\,.$$

Zum Zählen zählen wir bei (b) alle Optionen bei denen beide nebeneinander sitzen und ziehen diese von dem Ergebnis aus (a) ab. Also

$$|C| = 10! - 9 \cdot 8! \cdot 2! = 10! \cdot 4/5\,.$$

Zusatzaufgabe 5.

Beweisen Sie mit Hilfe einer geeigneten Partition und der Summenregel, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0\,.$$

Lösung zu Übung 5.

Die Aussage ist äquivalent dazu, dass es gleich viele Mengen gerader sowie ungerader Kardinalität gibt und daher beweisen wir diese. Sei n fest und diese Mengen mit $O = \{A \subseteq [n] : |A| \text{ ungerade}\}$ und $E = 2^n[n] \setminus O$. Für ungerade n ist $f : O \to E$ definiert durch $f(A) = [n] \setminus A$ eine Bijektion und daher gilt $|O| = |E|$. Für gerade n ist es etwas kniffliger eine Bijektion $f : O \to E$ zu definieren. Es gelingt mit $f(A) = [n] \setminus (A \cup \{1\})$ für $1 \notin A$ und $f(A) = ([n] \setminus A) \cup \{1\}$ für $1 \in A$. Daher gilt auch in diesem Fall $|O| = |E|$.

Zusatzaufgabe 6.

Bestimmen Sie die Anzahl der geordneten Paare (A, B) mit $A \subseteq B \subseteq [n]$.

Lösung zu Übung 6.

Induktionsanfang: $n = 0$

Für $n = 0$ ist $[n] = \emptyset$. Es gibt genau ein Paar (A, B), nämlich $(\emptyset, \emptyset)$, da $A \subseteq B \subseteq \emptyset$. Die Anzahl dieser Paare ist:

$$1 = 3^0.$$

Der Induktionsanfang ist gezeigt.

Induktionsvoraussetzung: *Angenommen, für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$|\{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq [k]\}| = 3^k.$$

Induktionsschritt: *Wir zeigen, dass die Aussage auch für $k + 1$ gilt, d.h.:*

$$|\{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq [k + 1]\}| = 3^{k+1}.$$

Betrachten wir die Menge $[k + 1] = [k] \cup \{k + 1\}$. Die Paare (A, B) mit $A \subseteq B \subseteq [k + 1]$ lassen sich in drei Fälle unterteilen, je nachdem, ob $k + 1$ in A und B enthalten ist:

*1. **Fall 1:** $k + 1 \notin B$: In diesem Fall sind A und B Teilmengen von $[k]$. Die Anzahl solcher Paare ist nach der Induktionsvoraussetzung:*

$$3^k.$$

*2. **Fall 2:** $k + 1 \in B$, aber $k + 1 \notin A$: Hier gilt $A \subseteq B$, wobei A und $B \setminus \{k + 1\}$ Teilmengen von $[k]$ sind. Die Anzahl solcher Paare ist ebenfalls:*

$$3^k.$$

*3. **Fall 3:** $k + 1 \in A \subseteq B$: In diesem Fall sind $A \setminus \{k + 1\}$ und $B \setminus \{k + 1\}$ Teilmengen von $[k]$. Die Anzahl solcher Paare ist ebenfalls:*

$$3^k.$$

Die Gesamtanzahl der Paare ist somit:

$$3^k + 3^k + 3^k = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}.$$