

Freie Universität Berlin  
Institut für Mathematik  
WiSe24/25  
Stand: 27. Januar 2025

A. Constantinescu  
O. Parczyk  
V. Hiebeler  
D. Schlaugies

---

## Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 10

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h10.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 10. Januar 2025.

**Die Antworten sind stets zu begründen, inklusive der Beispiele.**

---

**NICHT UMBLÄTTERN OHNE DIE ANWEISUNG ZU LESEN**

### ANWEISUNG

Diese Hausaufgabe hat die Form einer Probeklausur. Das heißt, dass die Aufgabenstellung und die Punkteverteilung ähnlich einer Klausur sind. Die Klausur wird aber aus drei Aufgaben bestehen, nicht aus einer einzigen wie die Probeklausur.

**Der Inhalt und der Schwierigkeitsgrad kann unterschiedlich zu der Klausur sein.**

Um den Umständen der Klausur näher zu kommen, wird empfohlen die Aufgaben alleine, ohne Hilfsmittel, und innerhalb von 35 (maximal 45) Minuten zu bearbeiten.

Damit kein Nachteil für die aktive Teilnahme an der Veranstaltung durch Erhöhung der gesamten Punktzahl entsteht, werden auch für diese Hausaufgabe höchstens 4 Punkte eingetragen. Sie können aber für die vorliegende Aufgabe  $n$  Punkte verdienen, mit  $0 \leq n \leq 20$ . Es wird dann  $\min\{n, 4\}$  für die Hausaufgabe eingetragen. Das sollte Sie auch ermutigen die Hausaufgabe in Klausur-ähnlichen Bedingungen zu bearbeiten.

Sie werden auch gebeten Ihre Vorbereitung und Ihre Leistung selber zu schätzen, indem Sie vor und nach dem Bearbeiten der Probeklausur eine erwartete Punktzahl angeben.

**Das Thema der Probeklausur sind Mengen und Elementare Zahlentheorie.**

Auf Seite 2 finden Sie die Zusatzaufgaben. Die Aufgaben der Probeklausur finden Sie ab Seite 4.

**NICHT UMBLÄTTERN OHNE DIE ANWEISUNG ZU LESEN**

## Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.  
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

### Zusatzaufgabe 1.

Eine Relation  $\sim$  auf einer Menge  $M$  heißt **euklidisch**, wenn

$$\forall x, y, z \in M \text{ gilt: } (x \sim z \text{ und } y \sim z) \Rightarrow x \sim y.$$

Man zeige, dass  $\sim$  genau dann eine Äquivalenzrelation auf  $M$  ist, wenn  $\sim$  reflexiv und euklidisch ist.

### Lösung zu Übung 1.

*Wir beweisen die zwei Implikationen separat.*

$\Rightarrow$  Nehmen wir an, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist. Es seien  $x, y, z \in M$  mit  $(x \sim z \text{ und } y \sim z)$ . Aus der Symmetrie folgt  $(x \sim z \text{ und } z \sim y)$  und aus der Transitivität folgt  $x \sim y$ . Also  $\sim$  ist auch euklidisch.

$\Leftarrow$  Nehmen wir an, dass  $\sim$  eine euklidische Relation ist. Wir müssen die Symmetrie und die Transitivität zeigen.

Es seien  $x, y \in M$  mit  $x \sim y$ . Aus der Reflexivität folgt  $y \sim y$ . Dann haben wir  $(y \sim y \text{ und } x \sim y) \Rightarrow y \sim x$ , also  $\sim$  ist symmetrisch.

Es seien  $x, y, z \in M$  mit  $(x \sim y \text{ und } y \sim z)$ . Aus der Symmetrie folgt  $(x \sim y \text{ und } z \sim y)$ . Dann gilt  $x \sim z$  weil euklidisch ist. Also  $\sim$  ist auch transitiv.

### Zusatzaufgabe 2.

Sei  $\sim$  eine Relation auf der Menge  $M \neq \emptyset$ . Man finde den Fehler in dem „falschen Beweis“ der folgenden Aussage:

**Aussage:** Wenn  $\sim$  symmetrisch und transitiv ist, dann ist  $\sim$  auch reflexiv.

**„Beweis“:** Sei  $a \in M$  und sei  $b \in M$ , sodass  $a \sim b$ . Dann folgt aus der Symmetrie auch  $b \sim a$ . Aus der Transitivität folgt mit  $a \sim b$  und  $b \sim a$ , dass  $a \sim a$ . Also ist  $\sim$  reflexiv.

### Lösung zu Übung 2.

- Wir brauchen zu zeigen, dass  $a \sim a$  für **alle**  $a \in M$ . Der Beweis funktioniert aber nur für die  $a \in M$  mit der Eigenschaft, dass  $\exists b \in M$ , sodass  $a \sim b$ . Es könnte aber auch geben, die mit keinem anderen Element in Relation stehen.
- Wir geben hier zwei Beispiele. (In der Hausaufgabe reicht eines.)
  - $R = \emptyset \subset M \times M$  für  $M \neq \emptyset$ . Diese Relation ist nicht reflexiv, weil  $x \not\sim x \quad \forall x \in M$ . Es ist symmetrisch, weil die Implikation „Wenn  $x \sim y$ , dann  $y \sim x$ “ wahr ist; (die Voraussetzung ist immer falsch). Analog ist auch die Transitivität auf trivialer Weise wahr.
  - Sei  $M = \{\text{Berlins Einwohner}\}$  mit  $X \sim Y \Leftrightarrow X$  und  $Y$  denselben Arbeitgeber haben. Diese ist symmetrisch, weil wenn „und“ kommutativ ist. Das heißt  $X$  und  $Y$  ist das gleiche wie  $Y$  und  $X$ . Es ist transitiv, weil aus „ $(X$  und  $Y)$  und  $(Y$  und  $Z)$  haben den selben Arbeitgeber“ folgt auch, dass  $X$  und  $Z$  denselben Arbeitgeber haben. Es ist aber nicht Reflexiv, weil es in Berlin Kinder gibt und Kinder haben keine Arbeitgeber.

### Zusatzaufgabe 3.

Sei  $M = \{1, \dots, n\}$ . Wie viele verschiedene Äquivalenzrelationen mit genau zwei Äquivalenzklassen gibt es auf  $M$ ?

### Lösung zu Übung 3.

Es gibt genau so viele wie 2-Partitionen der Menge. Jede 2-Partition ist eindeutig durch eine der zwei Mengen bestimmt. Also jede Teilmenge bestimmt genau eine Partition. Es gibt also  $|2^{\{1, \dots, n\}}| = 2^n$  Äquivalenzrelationen.

### Zusatzaufgabe 4.

Zeigen Sie das eine Ordnungsrelation total ist  $\Leftrightarrow$  Jede nicht-leere endliche Teilmenge ein minimales Element hat.

### Lösung zu Übung 4.

$\Rightarrow$  Induktion auf Mächtigkeit:

IA:  $\min\{a\} = a$ . Auch  $\{a, b\}$  hat ein Minimum, weil total  $\Rightarrow$  entweder  $a \leq b$  oder  $b \leq a$ .

IS: Wenn  $|A| \geq 3$ , dann sei  $a \in A$ , und  $A' = A \setminus \{a\}$ . Weil  $|A'| = |A| - 1$ , folgt aus IV, dass es  $a' := \min A'$  existiert. Dann existiert aus IA  $\min\{a, a'\}$  und das ist  $\min A$ .

$\Leftarrow$  Seien  $a, b \in M$ . Wir haben  $a \leq b$ , wenn  $a = \min\{a, b\}$ , oder  $b \leq a$ , wenn  $b = \min\{a, b\}$ .

### Zusatzaufgabe 5.

Sei  $\preceq_{\text{Lex}}$  die Relation auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definiert durch:

$$(a, b) \preceq_{\text{Lex}} (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a < c \\ \text{oder} \\ a = c \text{ und } b \leq d \end{cases} .$$

Man beweise, dass

1.  $\preceq_{\text{Lex}}$  eine Ordnungsrelation<sup>¶</sup> auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist.
2.  $\preceq_{\text{Lex}}$  eine Wohlordnung ist. Das heißt, dass jede nicht leere Teilmenge  $N$  von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ein Element  $\eta_0$  besitzt mit der Eigenschaft:

$$\eta_0 \preceq_{\text{Lex}} \alpha \quad \forall \alpha \in N.$$

### Lösung zu Übung 5.

1. **Reflexivität** Für alle  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  gilt  $a = a$  und  $b \leq b$ , also  $(a, b) \preceq_{\text{Lex}} (a, b)$ .

**Symmetrie** Seien  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit  $(a, b) \preceq_{\text{Lex}} (c, d)$  und  $(c, d) \preceq_{\text{Lex}} (a, b)$ .

Wenn  $a < c$ , dann kann  $c \geq a$  nicht gelten. Also  $a \leq c$ . Aus Antisymmetrie von  $\leq$  auf  $\mathbb{N}$  folgt  $a = c$ .

Analog folgt  $b = d$ , und somit  $(a, b) = (c, d)$ .

---

<sup>¶</sup> Diese Ordnungsrelation heißt die **lexikografische Ordnung** auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Transitivität Seien  $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , sodass  $(a, b) \preceq_{\text{Lex}} (c, d) \preceq_{\text{Lex}} (e, f)$ . Wir haben folgende Fälle:

$$\begin{cases} a < c \text{ und } c < e \Rightarrow a < e, \\ a < c \text{ und } c = e \Rightarrow a < e, \\ a = c \text{ und } c < e \Rightarrow a < e, \\ a = c \text{ und } c = e \Rightarrow a = e \text{ und } b \leq d \leq f. \end{cases}$$

In allen vier folgt also  $(a, b) \preceq_{\text{Lex}} (e, f)$ .

2. Sei  $\emptyset \neq N \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Weil  $(\mathbb{N}, \leq)$  wohlgeordnet ist, können wir folgende Zahlen definieren:

$$\begin{aligned} a_0 &:= \min\{a \in \mathbb{N} \mid \exists x \text{ mit } (a, x) \in N\} \\ b_0 &:= \min\{b \in \mathbb{N} \mid (a_0, b) \in N\} \end{aligned}$$

Wir haben  $(a_0, b_0) \in N$ , und für alle  $(a, b) \in N$  gilt:

- entweder  $a_0 < a$ , also  $(a_0, b_0) \preceq_{\text{Lex}} (a, b)$ ,
- oder  $a_0 = a$ , dann ist  $b_0 \leq b$  per Definition, also  $(a_0, b_0) \preceq_{\text{Lex}} (a, b)$ .

**HIER BEGINNT DER PFLICHTTEIL DER HAUSAUFGABE**

**Stehen Sie also allein, ohne Hilfsmittel, konzentriert vor einem leeren Lösungsheft?  
Dann können Sie umblättern.**

# Probeklausur zu Mathematik Entdecken 1

20.Dezember 2024

Zeit: ~~90~~ 30 Minuten

Höchstpunktzahl: ~~60~~ 20 Punkte

100%: ~~48~~ 16<sup>†</sup> Punkte

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	gesamt	Note
Punkte		X	X		X

Das Punkte-Noten Schema ist wie in der Klausur.

P	< 24	24...	27...	30...	33...	36...	39...	42...	44...	46...	48 ≤
N	5.0	4.0	3.7	3.3	3.0	2.7	2.3	2.0	1.7	1.3	1.0

## Hinweise

- Hilfsmittel sind nicht zugelassen. Insbesondere sind **elektronische Hilfsmittel** (zum Beispiel Suchmaschinen, Foren, Matlab, Twitter, Whatsapp, Signal), Mitschriften, Bücher, das non-Skript und die Hilfe anderer Personen **untersagt**.
- Es gibt ~~drei~~ 1 Aufgaben und pro Aufgabe gibt es 20 Punkte.
- Die Antworten sind stets zu begründen, inklusive der Beispiele.
- Sätze aus der Vorlesung können verwendet werden, aber die Aussage muss deutlich erklärt sein.
- Erhoffte Punktzahl ohne die Aufgabenstellung zu sehen
- Geschätzte Punktzahl nach dem Bearbeiten der Probeklausur

Prüfer: Alexandru Constantinescu  
Olaf Parczyk

Wintersemester 2024/25  
VL:192-337-01

<sup>†</sup>Die 16 Punkte entsprechen einer 1.0 in dieser Simulation. Für die Hausaufgabe werden höchstens 4 Punkte eingetragen

<sup>‡</sup>Wenn Sie dieses Blatt nicht drucken können, geben Sie bitte die erhoffte und geschätzte Punktzahl auf dem Antwortblatt an.

MATHEMATIK ENTDECKEN 1 - **PROBELKLAUSUR**

20.12.2024

AUFGABENSTELLUNG

---

**Zeit:** ~~90~~ **30** Minuten      **Maximale Punktzahl:** ~~60~~ **20** Punkte      **100%:** ~~48~~ **16** Punkte

---

**Aufgabe 1**

**20 Punkte**

- a. (2P) Man gebe die Definition von surjektiven Abbildungen an.
- b. (5P) Man finde eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$ , die surjektiv aber nicht bijektiv ist. Man bestimme dann eine Links- **oder** eine Rechtsinverse davon.
- c. (3 P) Es sei  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  die Abbildung gegeben durch  $\alpha(z) = z^4$ . Man bestimme das Urbild der Menge  $B = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 100\}$  unter  $\alpha$ .
- d. (4P) Man zeige oder man widerlege:  
*Wenn  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei surjektive Abbildungen sind, dann ist  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  auch surjektiv.*
- e. (6P) Man zeige, dass für alle bijektiven Abbildungen  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  und  $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , die Abbildung  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  gegeben durch  $\pi(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z)$  nicht bijektiv ist.