Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 27. Januar 2025

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 9

Abgabe via Whiteboard als `Nachname_ME1_h9.pdf` bis **20:00 am Freitag**, den 20. Dezember 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 points**

Sei $a = \overline{a_m \ldots a_1 a_0} \in \mathbb{N}$, mit $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$, eine im dekadischen System dargestellte natürliche Zahl. Die Quersumme, beziehungsweise die alternierende Quersumme von a ist:

$$Q(a) = \sum_{i=0}^{m} a_i \quad \text{beziehungsweise} \quad AQ(a) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i.$$

1. Man zeige, dass $9 \,|\, a \iff 9 \,|\, Q(A)$.
2. Man zeige, dass $11|n \iff 11|AQ(n)$.

Lösung zu Übung 1.

Beweis von 1.
Schreiben wir a als

$$a = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0.$$

Jede Potenz von 10 ist kongruent zu $1 \bmod 9$, da $10 \equiv 1 \pmod 9$. Das bedeutet:

$$10^k \equiv 1 \pmod 9 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt:

$$a \equiv a_m \cdot 1 + a_{m-1} \cdot 1 + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot 1 \pmod 9.$$

Daraus folgt:

$$a \equiv Q(a) \pmod 9.$$

Das bedeutet, dass a durch 9 teilbar ist, wenn und nur wenn $Q(a)$ durch 9 teilbar ist:

$$9 \mid a \Leftrightarrow 9 \mid Q(a).$$

Beweis von 2.
Schreiben wir n in der Form

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0.$$

Betrachten wir die Potenzen von 10 modulo 11. Es gilt:

$$10 \equiv -1 \pmod{11}.$$

Das bedeutet:

$$10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}.$$

Setzen wir dies in die Darstellung von n ein:

$$n \equiv a_m \cdot (-1)^m + a_{m-1} \cdot (-1)^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot (-1)^1 + a_0 \cdot (-1)^0 \pmod{11}.$$

Das ist genau die Definition der alternierenden Quersumme $AQ(n)$:

$$n \equiv AQ(n) \pmod{11}.$$

Daraus folgt:

$$11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid AQ(n).$$

Übung 2. **2 Punkte**

Sei $A = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}$ die Menge aller Ergebnisse beim Werfen von einem roten und einem grünen Würfel (rot ist die erste Zahl und grün ist die zweite Zahl). Auf A seien drei Relationen definiert. Man zeige jeweils, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt und bestimme die Äquivalenzklassen:

1. $(a, b) \sim_1 (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad |a - b| = |c - d|$
2. $(a, b) \sim_2 (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad (a + b) \equiv (c + d) \pmod 7$
3. $(a, b) \sim_3 (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b = c \cdot d$

Lösung zu Übung 2.

1. $(a, b) \sim_1 (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad |a - b| = |c - d|$
Nachweis, dass $\sim_1$ eine Äquivalenzrelation ist:
Reflexivität: *Für jedes Paar $(a, b) \in A$ gilt:*

$$|a - b| = |a - b| \quad \Rightarrow \quad (a, b) \sim_1 (a, b).$$

Also ist $\sim_1$ reflexiv.

Symmetrie: *Angenommen, $(a, b) \sim_1 (c, d)$. Dann gilt $|a - b| = |c - d|$. Da der Betrag symmetrisch ist, gilt auch $|c - d| = |a - b|$, also $(c, d) \sim_1 (a, b)$. Damit ist $\sim_1$ symmetrisch.*

Transitivität: *Angenommen, $(a, b) \sim_1 (c, d)$ und $(c, d) \sim_1 (e, f)$. Dann gilt:*

$$|a - b| = |c - d| \quad \text{und} \quad |c - d| = |e - f| \quad \Rightarrow \quad |a - b| = |e - f|.$$

Daher $(a, b) \sim_1 (e, f)$, und $\sim_1$ ist transitiv.

Äquivalenzklassen:

Die Äquivalenzklassen hängen von den möglichen Werten von $|a - b|$ ab. Da $a, b \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, sind die möglichen Werte von $|a - b|$: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Die Äquivalenzklassen sind also:

$$[1, 1]_{\sim_1}, [1, 2]_{\sim_1}, [1, 3]_{\sim_1}, [1, 4]_{\sim_1}, [1, 5]_{\sim_1}, [1, 6]_{\sim_1}$$

2. $(a, b) \sim_2 (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad (a + b) \equiv (c + d) \pmod 7$

Nachweis, dass $\sim_2$ eine Äquivalenzrelation ist:
Reflexivität: *Für jedes $(a,b) \in A$ gilt:*

$$(a+b) \equiv (a+b) \pmod 7.$$

Also ist $\sim_2$ reflexiv.
Symmetrie: *Angenommen, $(a,b) \sim_2 (c,d)$. Dann gilt:*

$$(a+b) \equiv (c+d) \pmod 7 \quad \Rightarrow \quad (c+d) \equiv (a+b) \pmod 7.$$

Also ist $\sim_2$ symmetrisch.
Transitivität: *Angenommen, $(a,b) \sim_2 (c,d)$ und $(c,d) \sim_2 (e,f)$. Dann gilt:*

$$(a+b) \equiv (c+d) \pmod 7 \quad \textit{und} \quad (c+d) \equiv (e+f) \pmod 7.$$

Daraus folgt:

$$(a+b) \equiv (e+f) \pmod 7,$$

also $(a,b) \sim_2 (e,f)$, und $\sim_2$ ist transitiv.
Äquivalenzklassen:
Die Äquivalenzklassen hängen von den möglichen Restklassen modulo 7 ab. Die möglichen Werte von $a+b$ sind $2,3,\ldots,12$, und deren Reste modulo 7 sind $0,1,2,\ldots,6$. Die Äquivalenzklassen sind:

$$[1,6]_{\sim_2}, [2,6]_{\sim_2}, [1,1]_{\sim_2}, [1,2]_{\sim_2}, [1,3]_{\sim_2}, [1,4]_{\sim_2}, [1,5]_{\sim_2},$$

3. *$(a,b) \sim_3 (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b = c \cdot d$*
Nachweis, dass $\sim_3$ eine Äquivalenzrelation ist:
Reflexivität: *Für jedes $(a,b) \in A$ gilt:*

$$a \cdot b = a \cdot b \quad \Rightarrow \quad (a,b) \sim_3 (a,b).$$

Also ist $\sim_3$ reflexiv.
Symmetrie: *Angenommen, $(a,b) \sim_3 (c,d)$. Dann gilt:*

$$a \cdot b = c \cdot d \quad \Rightarrow \quad c \cdot d = a \cdot b.$$

Also ist $\sim_3$ symmetrisch.
Transitivität: *Angenommen, $(a,b) \sim_3 (c,d)$ und $(c,d) \sim_3 (e,f)$. Dann gilt:*

$$a \cdot b = c \cdot d \quad \textit{und} \quad c \cdot d = e \cdot f \quad \Rightarrow \quad a \cdot b = e \cdot f.$$

Daher $(a,b) \sim_3 (e,f)$, und $\sim_3$ ist transitiv.
Äquivalenzklassen:
Die Äquivalenzklassen hängen von den möglichen Werten von $a \cdot b$ ab. Da $a,b \in \{1,2,\ldots,6\}$, sind die möglichen Werte von $a \cdot b$:

$$\{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,36\}.$$

Die Äquivalenzklassen sind also

$$[1,1]_{\sim_3}, [1,2]_{\sim_3}, [1,3]_{\sim_3}, [1,4]_{\sim_3}, [1,5]_{\sim_3}, [1,6]_{\sim_3}, [2,4]_{\sim_3}, [3,3]_{\sim_3}, [2,5]_{\sim_3}, [2,6]_{\sim_3}, [3,5]_{\sim_3}, [4,4]_{\sim_3}, [3,6]_{\sim_3}, [4,5]_{\sim_3}, [4,6]_{\sim_3}, [5,5]_{\sim_3}, [5,6]_{\sim_3}, [6,6]_{\sim_3}.$$

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

Man bestimme für jedes $n \in \{5, 6, 11, 12\}$ die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ : \ 2x - 3y + 1 = 0\},$$

wobei die Addition und die Multiplikation modulo n durchgeführt werden. Was kann man allgemein sagen, wenn n eine Primzahl ist?

Zusatzaufgabe 4.

Man zeige, dass es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n \mid 2^n + 1$.

Lösung zu Übung 4.

Man merkt, dass es für gerade n nicht stimmen kann. Unter den ersten 10 Zahlen stimmt es nur für 3 und 9. Für 11 stimmt es auch nicht. Man vermutet es stimmt für $n = 3^k$ für alle k und zeigt das durch Induktion nach k. Für den Induktionsschritt brauchen wir:

$$2^{3^{k+1}} + 1 = 2^{3^k \cdot 3} + 1 = (2^{3^k})^3 + 1 = (2^{3^k} + 1) \cdot ((2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1).$$

Der erste Faktor ist aus der induktiven Voraussetzung durch 3^k teilbar. Den zweite sollte also noch durch 3 teilbar sein. Das sehen wir indem wir modulo 3 rechnen:

$$(2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1 \equiv (-1^{3^k})^2 - (-1)^{3^k} + 1 \equiv (-1)^2 - (-1) + 1 \equiv 3 \equiv 0 \bmod 3.$$

Zusatzaufgabe 5.

Man zeige, dass wenn $p > 3$ eine Primzahl ist, dann gilt $p \equiv \pm 1 \bmod 6$.

Lösung zu Übung 5.

Wenn $p > 3$ prim ist, dann gilt $\mathrm{ggT}(6, p) = 1$, also $[p]$ ist in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ invertierbar. Das heißt, weil $0, 2, 3, 4$ nicht invertierbar sind, folgt es, dass $p \equiv \pm 1 \bmod 6$.

Zusatzaufgabe 6.

Welche der folgenden Zahlen ist durch 101 teilbar?

1. $100^2 - 1$.
2. $99^{100} + 1$.
3. $2^{100} - 1$.
4. $49^{198} - 52^{198}$.

Lösung zu Übung 6.

1. *Es gilt $100^2 - 1 = 9999 = 99 \cdot 101$. Es ist also durch 101 teilbar.*

2. *Weil 101 eine Primzahl ist und* $99 \not\equiv 0 \bmod 101$, *dürfen wir den Korollar von dem kleinen Satz von Fermat anwenden:*

$$99^{100} \equiv 1 \bmod 101.$$

Also $99^{100} + 1 \equiv 1 + 1 \not\equiv 0 \bmod 101$, *und somit ist es nicht durch 101 teilbar.*

3. *Es gilt:*

$$\sum_{i=0}^{99} 2^i = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{99}) = (2-1) \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{99}) = 2^{100} - 1.$$

Aus dem Korollar vom kleinen Fermat folgt, weil $2 \not\equiv 0 \bmod 101$, *dass* $2^{100} \equiv 1 \bmod 101$. *Also*

$$\sum_{i=0}^{99} 2^i \equiv 2^{100} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \bmod 101$$

und ist somit teilbar durch 101.

4. *Es gilt* $49 + 52 = 101$, *also* $49 \equiv -52 \bmod 101$. *Wir haben also*

$$49^{198} - 52^{198} \equiv (-52)^{198} - 52^{198} \equiv 52^{198} - 52^{198} \equiv 0 \bmod 101.$$

Also auch diese Zahl ist durch 101 teilbar.

Zusatzaufgabe 7.

Wie Sie wissen sind Äquivalenzrelationen reflexiv, symmetrisch und transitiv. Damit diese Definition sinnvoll ist, sollten Sie Beispiele für Relationen angeben können, die

1. reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv;
2. reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch;
3. symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv sind.

Lösung zu Übung 7.

(a) Reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv:
Betrachten wir die Relation R *auf der Menge* $A = \{1, 2, 3\}$, *definiert durch:*

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}.$$

*- **Reflexiv:** Für alle* $a \in A$ *gilt* $(a, a) \in R$, *also ist* R *reflexiv. - **Symmetrisch:** Wenn* $(a, b) \in R$, *dann gilt auch* $(b, a) \in R$, *also ist* R *symmetrisch. - **Nicht transitiv:** Da* $(1, 2) \in R$ *und* $(2, 3) \in R$, *aber* $(1, 3) \notin R$, *ist* R *nicht transitiv.*

(b) Reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch:
Betrachten wir die Relation R *auf der Menge* $A = \{1, 2, 3\}$, *definiert durch:*

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3)\}.$$

*- **Reflexiv:** Für alle* $a \in A$ *gilt* $(a, a) \in R$, *also ist* R *reflexiv. - **Transitv:** Wenn* $(1, 2) \in R$ *und* $(2, 3) \in R$, *dann gilt auch* $(1, 3) \in R$, *also ist* R *transitiv. - **Nicht symmetrisch:** Da* $(1, 2) \in R$, *aber* $(2, 1) \notin R$, *ist* R *nicht symmetrisch.*

(c) Symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv:
Betrachten wir die Relation R *auf der Menge* $A = \{1, 2, 3\}$, *definiert durch:*

$$R = \{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)\}.$$

*- **Symmetrisch:** Wenn* $(1, 2) \in R$, *dann gilt auch* $(2, 1) \in R$, *also ist* R *symmetrisch. - **Transitv:** Da es keine Paare* $(a, b), (b, c) \in R$ *gibt, bei denen ein transitives Problem auftreten könnte, ist* R *transitiv. - **Nicht reflexiv:** Für* $3 \in A$ *gilt* $(3, 3) \notin R$, *also ist* R *nicht reflexiv.*

Zusatzaufgabe 8.

M sei die Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$. Ergänzen Sie

1. die Menge $\{(e, e), (f, d), (c, a), (b, f)\}$ zu einer Äquivalenzrelation auf M mit mindestens zwei Äquivalenzklassen,
2. die Menge $\{(a, a), (f, e), (c, d), (a, b), (c, a), (e, b), (f, d)\}$ zu einer totalen Ordnung auf M.

Lösung zu Übung 8.

1. *Sei* $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (f, d), (d, f), (c, a), (a, c), (b, f), (f, b), (b, d), (d, b)\}$
2. *Sei* $O = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (f, e), (f, c), (f, a), (f, b), (f, d), (e, c), (e, a), (e, b)$ $, (e, d), (c, a), (c, b), (c, d), (a, b), (a, d), (b, d)\}$

Zusatzaufgabe*** 9.

Was ist die Quersumme der Quersumme der Quersumme von 4444^{4444}? *

Lösung zu Übung 9.

In $\mathbb{Z}/9Z$ *haben wir* $4444 = 4 \cdot 11 \cdot 101 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = -2$*, also* $4444^{4444} \equiv 2^{4444}$*. Weiterhin haben wir* $2^6 \equiv 1$*, also* $2^{4444} = 2^{6 \cdot 740 + 4} = 2^4 = 7$*. Wir wissen allgemein auch dass* $Q(n) \equiv n \bmod 9$*. Die Lösung bekommen wir, weil* $Q(Q(Q()))$ *viel kleiner wird:* $4444^{4444} < 10\,000^{4444} = 10^{4 \cdot 4444}$*. Also* $Q(4444^{4444}) < 9 \cdot 4 \cdot 4444 < 200\,000$*. Dann ist* $Q(Q(4444^{4444})) \leq 9 \cdot 5 = 45$*, und* $Q(Q(Q(4444^{4444}))) \leq 3 + 9 = 12$*. Die einzige natürliche Zahl die kongruent zu 7 modulo 9 ist und auch kleiner als 12, ist 7. Also* $Q(Q(Q(4444^{4444}))) = 7$*.*

*Hinweis: Rechnen Sie Modulo 9, und geben Sie auch eine obere Schranke für $Q(Q(Q(4444^{4444})))$ an.