Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 14. Dezember 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 8

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **4 Punkte**

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n = 2^{2^n} + 1$ die n-te Fermat Zahl.

1. Man zeige*, dass $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Man zeige†, dass $\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3. Man zeige‡, dass für alle $i \neq j$ gilt $\mathrm{ggT}(F_i, F_j) = 1$.

4. Man verwende Punkt 3 und den *Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie*, um die Unendlichkeit der Menge aller Primzahlen zu beweisen.

Lösung zu Übung 1.

1. *Es gilt* $(F_n - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^n} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 = 2^{2^n \cdot 2} + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1}$.

2. $\boxed{IA}$ *Für* $n = 0$ *gilt* $= F_{0+1} - 2 = 2^{2^1} + 1 - 2 = 3 = 2^{2^0} + 1 = F_0 = \prod_{k=0}^{0} F_k$.

$\boxed{IS}$ *“$n \Rightarrow n+1$”Die induktive Voraussetzung ist*

$$F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

Wir haben aus Punkt 1 und der IV haben wir, dass

$$F_{n+1} - 2 = \left((F_n - 1)^2 + 1\right) - 2 = (F_n - 1)^2 - 1 = (F_n - 1 - 1)(F_n - 1 + 1) = (F_n - 2)F_n = \prod_{j=0}^{n} F_k.$$

---

*Hinweis: Direkter Beweis.
†Hinweis: Induktion und Punkt 1.
‡Hinweis: Punkt 2 und Teilbarkeit.

3. *Seien $i \neq j$ und sei d ein gemeinsamer positiver Teiler von F_i und F_j. OBdA können wir $i > j$ annehmen. Wir haben also $d \mid F_i$ und $d \mid F_j$. Weil $0 \leqslant j \leqslant i-1$ gilt auch $d \mid \prod_{k=0}^{i-1} F_k$. Aus Punkt 2 haben wir dann*
$$d \mid \prod_{k=0}^{i-1} F_k = F_i - 2.$$
Also, weil $d \mid F_i$ und $d \mid F_i - 2$, gilt $d \mid 2$. Also $d \in \{1, 2\}$. Wenn $d = 2$, dann würde $2 \mid F_i = 2^{2^i} + 1$ gelten - ein Widerspruch. Also $d = 1$ und somit $\mathrm{ggT}(F_i, F_j) = 1$.
4. *Wenn $\mathcal{P}$, die Menge aller Primzahlen, endlich wäre, dann würde es $n \in \mathbb{N}$ geben, sodass $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Aus dem Hauptsatz der Elementaren Zahlentheorie folgt, dass jede Fermat Zahl durch mindestens einer der p_i teilbar ist. Weil es aber unendlich viele Fermat Zahlen gibt, dann gäbe es mindestens zwei geben, die einen gemeinsamen Teiler p_k hätten, und das wäre ein Widerspruch zu Punkt 3.*

Zusatzaufgabe 2.

Man bestimme alle $a, b, c, d, n \in \mathbb{N}$, sodass
$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^{2+c} \cdot 7^d = n!.$$

Zusatzaufgabe 3.

Man zeige oder man widerlege:

Wenn $p_1, \ldots, p_n$ die ersten n Primzahlen sind, dann ist $p_1 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ auch prim.

Lösung zu Übung 3.

Falsch, aber nicht gleich: für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ stimmt die Aussage:
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211 \; und \; 2 \cdot \cdots \cdot 11 + 1 = 2311 \quad sind\ prim.$$
Aber $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$ ist nicht prim.

Zusatzaufgabe 4.

Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n^2 + n + 1$ nicht durch 5 teilbar ist.

Lösung zu Übung 4.

$$\begin{aligned}
n = 0 &\quad\mapsto\quad 0^2 + 0 + 2 = 2 \not\equiv 0 \bmod 5.\\
n = 1 &\quad\mapsto\quad 1^2 + 1 + 2 = 4 \not\equiv 0 \bmod 5.\\
n = 2 &\quad\mapsto\quad 2^2 + 2 + 2 = 8 \not\equiv 0 \bmod 5.\\
n = -1 &\quad\mapsto\quad (-1)^2 - 1 + 2 = 2 \not\equiv 0 \bmod 5.\\
n = -2 &\quad\mapsto\quad (-2)^2 - 2 + 2 = 4 \not\equiv 0 \bmod 5.
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 5.

Man zeige, dass für alle $x \in \mathbb{Z}$ die Zahl $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ durch 3 teilbar ist.

Lösung zu Übung 5.

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \equiv x^3 - x \equiv x(x-1)(x+1) \bmod 3.$

Zusatzaufgabe 6.

Sei $a = \overline{a_r \dots a_0} \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl die mit den Ziffern $a_r, \dots, a_0$ in dem Dezimalsystem dargestellt ist. Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Man zeige, dass a genau dann durch 5^k teilbar ist, wenn $\overline{a_{k-1} \dots a_0}$ durch 5^k teilbar ist.

Lösung zu Übung 6.

Es gilt $a = \overline{a_r \dots a_0} = a_r \cdot 10^r + \dots + a_0 \cdot 10^0$. *Weil* $5^k \mid 10^\ell \Leftrightarrow k \leqslant \ell$ *folgt also*

$$a \equiv a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^0 \equiv \overline{a_{k-1} \dots a_0} \bmod 5^k.$$

Zusatzaufgabe 7.

Es sei p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Man zeige, dass

$$a^2 \equiv a \bmod p^k \iff a \equiv 0 \bmod p^k \quad \text{oder } a \equiv 1 \bmod p^k.$$

Hinweis: Man versuche den Fall $k = 1$ zu erst.

Lösung zu Übung 7.

Sei $a \in \mathbb{Z}$ *mit* $a^2 \equiv a \bmod p^k$. *Das ist per Definition äquivalent zu* $p^k \mid a^2 - a$. *Also*

$$p^k \mid a(a-1).$$

Wenn $k = 1$, *dann, weil* p *eine Primzahl ist, folgt* $p \mid a$ *oder* $p \mid a-1$. *Also* $a \equiv 0 \bmod p$ *oder* $a \equiv 1 \bmod p$.

Wenn $k > 1$, *dann bemerken wir, dass, weil* $p \mid p^k$ *und* $p^k \mid a(a-1)$, *folgt aus der Transitivität der Teilbarkeit, dass* $p \mid a(a-1)$. *Genau wie für* $k = 1$, *folgt also* $p \mid a$ *oder* $p \mid a-1$. *Es kann nicht passieren, dass* p *beide teilt, weil sonst würde* p *auch die Differenz, also 1, teilen. Weil* p *prim ist, gibt es also zwei Fälle:*

Fall 1: p *teilt* a *und* $\mathrm{ggT}(p, a-1) = 1$ *oder* ***Fall 2:*** p *teilt* $a - 1$ *und* $\mathrm{ggT}(p, a) = 1$.

Fall 1: *Weil* $\mathrm{ggT}(p, a-1) = 1$ *und die Teiler von* p^k *nur die Form* p^i *mit* $i \leqslant k$ *haben, folgt auch*

$$\mathrm{ggT}(p^k, a-1) = 1.$$

Also, aus dem Lemma von Euklid, folgt aus $p^k \mid a(a-1)$, *dass* $p^k \mid a$. *Also* $a \equiv 0 \bmod p^k$.

Im Fall 2 ist der Beweis analog. (Man muss nur a *und* $a - 1$ *vertauschen um* $a - 1 \equiv 0 \bmod p^k$ *zu bekommen).*

Zusatzaufgabe 8.

Man zeige, dass $1 + 2^2 + 3^{3^3}$ nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

(**Hinweis:** $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27}$.)

(Erste Phase der Mathe Olympiade, 5.Klasse, Bukarest 1998)

Lösung zu Übung 8.

Man merke, dass $n^2 \equiv 0$ *oder* $1 \bmod 3$, *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Aber* $1 + 2^2 + 3^{3^3} \equiv 2 \bmod 3$.