Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 14. November 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 2

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Es seien A und B Mengen. Die **symmetrische Differenz** von A und B ist definiert als $A \,\Delta\, B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Man zeige, dass

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Hinweis: Malen Sie zuerst Venn Diagramme der beiden Situationen. Dann beweisen Sie das formal, mit Hilfe der Bemerkung 1.13 aus dem non-Skript.

Lösung zu Übung 1.

$\boxed{\subseteq}$ *Sei $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Weil $x \in A \cup B$, heißt es, dass $x \in A$ oder $x \in B$.*
Wenn $x \in A$, dann, weil $x \notin A \cap B$, muss $x \notin B$ gelten. Also $x \in A \setminus B$.
Wenn $x \in B$, dann, weil $x \notin A \cap B$, muss $x \notin A$ gelten. Also $x \in B \setminus A$.
Wir haben also gezeigt, dass $x \in A \setminus B$ oder $x \in B \setminus A$. Das heißt, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$\boxed{\supseteq}$ *Sei $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Das heißt, $x \in A \setminus B$ oder $x \in B \setminus A$.*
Wenn $x \in A \setminus B$, dann gilt $x \in A \cup B$ (weil in A), aber $x \notin A \cap B$ (weil nicht in B). Also $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Wenn $x \in B \setminus A$, folgt es analog wegen der Symmetrie in A und B, dass $x \in (B \cup A) \setminus (B \cap A)$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man zeige, dass die Gleichheit $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ **nicht** für beliebige Mengen A, B, C gilt. Welche der Inklusionen "$\subseteq$" oder "$\supseteq$" gilt für alle Mengen A, B, C?

Lösung zu Übung 2.

*Um zu zeigen, dass die obige Gleichheit von Mengen nicht für alle A, B, C gilt, finden wir ein konkretes Beispiel indem diese Gleichheit nicht erfüllt ist. (*Das heißt, wir geben ein "Gegenbeispiel".*)xs*

Seien $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ und $C = \{3\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \cup (B \setminus C) &= \{1\} \cup \big(\{2\} \setminus \{3\}\big) = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \\ (A \cup B) \setminus (A \cup C) &= \{1, 2\} \setminus \{1, 3\} = \{2\}. \end{aligned}$$

Also, weil $1 \in A \cup (B \setminus C)$ und $1 \notin (A \cup B) \setminus (A \cup C)$, sind die zwei Mengen nicht gleich. Insbesondere gilt die Inklusion "$\subseteq$" (die von links nach rechts) nicht für alle Mengen.

*In dem obigen Beispiel gilt die Inklusion "$\supseteq$", von rechts nach links. (*Das bedeutet aber nicht, dass diese allgemein gelten muss. Wir müssen entweder weiter ein Gegenbeispiel suchen, oder die Aussage beweisen.*) Wir werden diese Inklusion beweisen:*

Sei $x \in (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus (A \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ und } x \notin A \cup C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ und } x \notin A \text{ und } x \notin C) \text{ oder } (x \in B \text{ und } x \notin A \text{ und } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in B \text{ und } x \notin (A \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in B \setminus (A \cup C). \end{aligned}$$

Wir haben auch:

$$B \setminus (A \cup C) \subseteq B \setminus C \subseteq A \cup (B \setminus C).$$

Also, aus den obigen Äquivalenzen und Inklusionen folgt also

$$x \in (A \cup B) \setminus (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus C).$$

Das zeigt die Inklusion "$\supseteq$".

Zusatzaufgabe* 3.

Man bestimme die Mengen A und B, und die reellen Koeffizienten $p, q \in \mathbb{R}$, sodass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + p = 0\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + qx - 3 = 0\}, \\ A \cup B &= \{-2, -1, 1, 3\}. \end{aligned}$$

Lösung zu Übung 3.

Wenn $x \in A \cup B$, dann heißt es, dass $x^2 + x + p = 0$ oder $x^2 + qx - 3 = 0$. Also $x \in A \cup B$ ist äquivalent zu $(x^2 + x + p)(x^2 + qx - 3)$. Aus $A \cup B = \{-2, -1, 1, 3\}$ folgt also

$$(x^2 + x + p)(x^2 + qx - 3) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 3).$$

Nachdem wir die Klammern aufmachen bekommen wir:

$$x^4 + (q + 1)x^3 + (p + q - 3)x^2 + (pq - 3)x - 3p = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6.$$

Zwei Polynome sind gleich, wenn diese dieselben Koeffizienten haben, es folgen somit vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} q + 1 &= -1 \\ p + q - 3 &= -7 \\ pq - 3 &= 1 \\ -3p &= 6 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $q = -2$ und aus der vierten folgt $p = -2$. Wir müssen noch überprüfen, dass diese Lösung auch die zweite und die dritte Gleichungen erfüllen. Das gilt:

$$-2 - 2 - 3 = -7 \quad \text{und} \quad (-2)(-2) - 3 = 1.$$

Das Gleichungssytem ist also kompatibel und hat die Lösung: $p = q = -2$.

Durch direktes überprüfen haben wir, dass -2 und 1 die Nullstellen von $x^2 + x - 2$ sind, also

$$A = \{-2, 1\} \quad \text{und} \quad B = \{-1, 3\}.$$