Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
WiSe24/25
Stand: 14. November 2024

A. Constantinescu
O. Parczyk
V. Hiebeler
D. Schlaugies

Mathematik Entdecken 1 – Hausaufgabe 1

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man bestimme die Negation folgender Aussagen.

A: *Wenn es die Sonne scheint, dann regnet es nicht.*

B: $x^2 - x + 2 = 0$ *impliziert* $x = 1$ *oder* $x = -2$.

C: P *ist falsch und (*Q *oder* R *sind wahr).*

D: *Für jede natürliche Zahl* a*, existiert eine ganze Zahl* b*, sodass für alle positiven natürlichen Zahlen* c *gilt (*$a < b$ *oder* $a > b + c$*).*

Lösung zu Übung 1.

D: Die Sonne scheint und es regnet.

E: $x^2 - x + 2 = 0$ und $x \neq 1$ und $x \neq -2$.

G: P ist wahr oder (Q und R sind falsch).

F: Es existiert eine natürliche Zahl a, sodass für alle ganze Zahlen b, existiert eine positive natürliche Zahl c, sodass $a \geqslant b$ und $a \leqslant b + c$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man zeige mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass für beliebige Aussagen A, B, C folgende zusammengesetzte Aussagen Tautologien sind.

E: $\text{nicht}(A \,\text{und}\, B) \Rightarrow (\text{nicht}(A) \,\text{oder}\, \text{nicht}(B))$.

F: $\big[(A \,\text{und}\, B) \,\text{und}\, (A \Rightarrow C) \,\text{und}\, (B \Rightarrow C)\big] \Rightarrow C$.

Lösung zu Übung 2.

1.

A	B	$A\,und\,B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A\,und\,B)$	$\neg(A)\,oder\neg(B)$	**E**
1	1	1	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1	1	**1**
0	0	0	1	1	1	1	**1**

Die Wahrheitstafel für die Aussage E ergibt wahr (geschrieben als 1) in allen vier Fällen die von den Wahrheitswerten von A und B bestimmt sind. Also E ist eine Tautologie.

2. Damit die Tabelle kompakter aufgeschrieben werden kann, bezeichnen wir mit D die Voraussetzung der Implikation F. Also

$$D: \qquad (A\,und\,B)\;und\,(A \Rightarrow C)\;und\,(B \Rightarrow C).$$

Dann haben wir folgende Wahrheitstabelle mit A, B, C als unabhängige Eingaben:

A	B	C	$A\,und\,B$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	D	**F** $: \quad D \Rightarrow C$
1	1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	0	0	**1**
1	0	1	0	1	1	0	**1**
1	0	0	0	0	1	0	**1**
0	1	1	0	1	1	0	**1**
0	1	0	0	1	0	0	**1**
0	0	1	0	1	1	0	**1**
0	0	0	0	1	1	0	**1**

Zusatzaufgabe 3.

Folgende Aussage war in der Linearen Algebra Klausur zu beweisen:

$$M(a) \sim M(b) \iff a \neq b.$$

Die Natur der Objekte $a, b, M(a)$ und $M(b)$ ist hier nicht wichtig. Man sollte nur wissen, dass $\nsim$ die Negation von $\sim$ ist, genau wie $\neq$ die Negation von $=$ ist.

Bob hat bewiesen, dass "$a = b \Rightarrow M(a) \nsim M(b)$". Hat Bob somit eine der Implikationen, die zu zeigen waren, bewiesen? Wenn Ja, welche?

Lösung zu Übung 3.

$\text{nicht}(A) \Rightarrow \text{nicht}(B)$ *ist logisch äquivalent zu $B \Rightarrow A$. Also $a = b \Rightarrow M(a) \nsim M(b)$ ist logisch äquivalent zu $M(a) \sim M(b) \Rightarrow a \neq b$. Bob hat also die "$\Rightarrow$" Implikation bewiesen.*