Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

SoSe24

A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 10. Juli 2024

Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 13

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H13.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 19. Juli 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum, sei $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$ ein unitärer Automorphismus von V, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f. Man zeige, dass $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum. Man zeige, dass für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle w, v \rangle = \frac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\big) + \frac{1}{4}i\big(\|v+iw\|^2 - \|v-iw\|^2\big),$$

wobei $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für alle $v \in V$.

Total: 4 Punkte

`Folgende Aufgabe wird nicht bewertet und soll nicht abgegeben werden:`

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 3.

1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ nilpotent. Man beweise, dass $A = 0$.
   (Die halbe Punktzahl für $n = 2$.)
2. Gilt das auch für symmetrische Matrizen mit Einträgen in einem beliebigen Körper?

Zusatzaufgabe 4.

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ heißt **orthogonal diagonalisierbar** wenn es eine orthogonale Matrix P gibt (das heißt $P^{-1} = P^\top$), sodass $P^\top AP = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Der Spektralsatz sagt, dass symmetrische Matrizen orthogonal diagonalisierbar sind. Man beweise die Umkehrung:

Wenn eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ orthognoal diagonalisierbar ist, dann ist A symmetrisch.

Zusatzaufgabe 5.

Man bestimme Orthonormalbasen aus Eigenvektoren für die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}), \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & i & 1+i \\ -i & 0 & -i \\ 1-i & i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}).$$

Zusatzaufgabe 6.

Sei $V = U^\perp \subseteq \mathbb{C}^4$ wobei $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(1, i, -1, i)$. Man gebe eine Orthonormalbasis von V an.