Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

SoSe24
A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 3. Juli 2024

Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 12

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H12.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 12. Juli 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man betrachte die Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{lllllllll} P_0 & = & (-1,-1), & P_1 & = & (1,0), & P_2 & = & (0,1) \\ Q_0 & = & (2,0), & Q_1 & = & (1,1), & Q_2 & = & (-1,1). \end{array}$$

Man bestimme die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(P_i) = Q_i$. Ist diese Abbildung eine Affinität? Wenn Ja, man berechne auch die Inverse davon?

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man betrachte den euklidischen Abstand $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$:

$$d(A,B) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2} \qquad \forall\ A,B \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } A = (a_1,a_2), B = (b_1,b_2).$$

Man fixiere zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$ und ein Skalar $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$. Man zeige, dass die Menge:

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \ : \ d(P,A) - d(P,B) = c\}$$

die Nullstellenmenge einer affinen Quadrik ist.

Hinweis: Petersplatz in Rom.

Total: 4 Punkte

`Folgende Aufgabe wird nicht bewertet und soll nicht abgegeben werden:`

Leseaufgabe 3. **$\sim$ 2 Stundem**

Lesen Sie den Beweis der Klassifizierung der affinen Hyperquadriken in $\mathbb{C}^n$ in den Notizen weiter unten.

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 4.

Es seien $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen und $n \geqslant 2$ eine natürliche Zahl.

1. Wie viele Geraden (d.h. 1-dimensionale affine Unterräume) gibt es in $\mathbb{F}_q^n$? (Fangen Sie mit $n = 2$ und $q = 2, 3, 4$ an.)
2. Wie viele d-dimensionale affine Unterräume, wobei $2 \leqslant d \leqslant n$, gibt es in $\mathbb{F}_q^n$?

Zusatzaufgabe 5.

Drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ sind per Definition **kollinear**, genau dann wenn es eine affine Gerade g gibt, sodass $A, B, C \in g$.

Wenn $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ und $C = (c_1, c_2)$, man zeige dass A, B, C genau dann kollinear sind, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_a & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Zusatzaufgabe 6.

Sei $c \in \mathbb{R}$ und sei $Z = \{P \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \ : \ d(P, Ox) \cdot d(P, Oy) = c\}$. Hier bezeichnet $d(P, Ox)$ den Abstand von dem Punkt P zu der x-Achse in $\mathbb{R}^2$. Das heißt

$$d(P, Ox) := \min\{d(P, A) \ : \ A \in Ox\}.$$

Analog für die y-Achse Oy. Man zeige, dass Z die Nullstellenmenge einer Quadrik ist.

Zusatzaufgabe 7.

Zu welcher der fünf Äquivalenzklassen von Kegelschnitten in $\mathbb{C}^2$ gehört der Kegelschnitt mit Gleichung $2x^2 + 8xy + 8y^2 + 6y + 1 = 0$?

Wir wollen Hyperquadriken bis auf Affinität verstehen. Das heißt, wir wollen zwei Hyperquadriken als äquivalent (gleich) betrachten wenn sie durch Affinitäten ineinander umgewandelt werden können.

Genauer: Bezeichne $AGL_n(\mathbb{K}) = \{\sigma : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \mid \text{Affinität}\}$.

Bem: Sei $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ und $\sigma \in AGL_n(\mathbb{K})$. Es gilt:

$$\sigma(N(f(\underline{x}))) = N(f(\sigma^{-1}(x))).$$

Bew: $\sigma(M) = \{\sigma(m) : m \in M\}$

also:
$$\sigma(N(f(\underline{x}))) \overset{\text{Def } N(f)}{=} \sigma\{\underline{\alpha} \in \mathbb{K}^n : f(\underline{\alpha}) = 0\}$$
$$\overset{\text{Def } \sigma(M)}{=} \{\sigma(\underline{\alpha}) \in \mathbb{K}^n : f(\underline{\alpha}) = 0\}.$$
$$\overset{\sigma^{-1}\circ\sigma = id}{=} \{\sigma(\alpha) \in \mathbb{K}^n : f(\sigma^{-1}(\sigma(\underline{\alpha}))) = 0\}$$
$$\overset{\sigma = \text{bij.}}{=} \{\underline{\beta} \in \mathbb{K}^n : f(\sigma^{-1}(\underline{\beta})) = 0\}$$
$$\overset{\text{def } N(f)}{=} N(f(\sigma^{-1}(\underline{x}))).$$

Bem: Wenn $f \sim g$, dann $f(\sigma(\underline{x})) \sim g(\sigma(\underline{x}))$

Definition: Zwei Hyperflächen $\hat{f}, \hat{g} \in \mathbb{K}[\underline{x}]/_\sim$ sind affin Äquivalent, wenn es $\sigma \in AGL_n(\mathbb{K})$ gibt sodass

$$f(\sigma(\underline{x})) = g(\underline{x}).$$

Affine Klassifizierung der Hyperquadriken heißt also die Äquivalenzklassen dieser ÄR. zu beschreiben.

Satz: Jede Hyperquadrik in $\mathbb{C}^n$ ist zu genau einer der folgenden Hyperquadriken affin äquivalent:

- $x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_{r+1}$, mit $1 \leq r < n$
- $x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 1$, mit $1 \leq r \leq n$.
- $x_1^2 + \ldots + x_r^2$, mit $1 \leq r \leq n$

Beweis: Sei $f = (1 \ \underline{x}^T) \cdot C' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x} \end{pmatrix}$ wobei $C \in \mathrm{Mat}_n^{sym}(\mathbb{C})$

und $C' = \left(\begin{array}{c|ccc} c & c_1 & \ldots & c_n \\ \hline c_1 & & & \\ \vdots & & C & \\ c_n & & & \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}_{n+1}^{sym}(\mathbb{C})$.

Korollar 11.37. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, dann existiert für jede symmetrische Bilinearform $\varphi \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{I_r} & \\ & \mathrm{O} \end{pmatrix}.$$

Aus Korollar 11.37. existiert $A \in GL_n(\mathbb{C})$, sodass

$$A^T \cdot C \cdot A = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt also für $\sigma : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ $\sigma(\underline{x}) = A \cdot \underline{x} + \underline{0}$, dann

$$f(\sigma(\underline{x})) = (1 \ \sigma(x)^T) \cdot C' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\underline{x}) \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ \underline{x}^T) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A^T \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} c & c_1 & \ldots & c_n \\ \hline c_1 & & & \\ \vdots & & C & \\ c_n & & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x} \end{pmatrix}$$

$$= (1 \ \underline{x}^T) \cdot \begin{pmatrix} c & c_1 \cdots c_n \\ \hline c_1 & \begin{array}{c|c} I_r & \\ \hline & 0 \end{array} \\ \vdots & \\ c_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \underline{x} \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + \dots + x_r^2 + 2c_1x_1 + \dots + 2c_rx_r + 2c_{r+1}x_{r+1} + \dots + 2c_nx_n + c.$$

Diese war die schwierigste Transformation.

Für $i = 1, .., r$ verwenden wir quadratische Ergänzung:

$$x_1^2 + 2c_1x_1 + c_1^2 - c_1^2 = (x_1 + c_1)^2 - c_1^2.$$

Also wenn wir $x_1 \longmapsto x_1 - c_1$ abbilden, dann verschwindet der lineare (i.e. deg=1) Teil in x_1.

Für $\sigma \in AGL_n(\mathbb{C})$ mit

$$\sigma(x_1, .., x_n) = (x_1 - c_1, .., x_r - c_r, x_{r+1}, .., x_n)$$

bekommen wir also:

$$f(\sigma(\underline{x})) = x_1^2 + \dots + x_r^2 + 2c_{r+1}x_{r+1} \dots + 2c_nx_n + c.$$

wir können jetzt $x_{r+1}, .., x_n$ permutieren, sodass $c_{r+1}, .., c_s \neq 0$, $c_{s+1} = .. = c_n = 0$.
und $x_i \longmapsto \frac{1}{2c_i} x_i$ für $i = r+1, .., s$ anwenden.

<u>Also</u>: $f \underset{\text{aff.}}{\sim} x_1^2 + \dots + x_r^2 + x_{r+1} + \dots + x_s + c$

Fall 1: $\boxed{s > r}$, dann, durch $x_s \mapsto x_s - c$

bekommen wir $f \sim_{\text{aff}} x_1^2 + \dots + x_r^2 + x_{r+1} + \dots + x_s$

Durch $x_{r+1} \mapsto x_{r+1} - x_{r+2} - \dots - x_s$ und $x_i \mapsto x_i \quad \forall i \neq r+1$

bekommen wir: $\boxed{f \sim_{\text{aff}} x_1^2 + \dots + x_r^2 + x_{r+1}}$.

Fall 2: $\boxed{s = r}$ D.h. Kein Teil von Grad 1.

Also $f \sim_{\text{aff.}} x_1^2 + \dots + x_r^2 + C$

Fall 2.1: Wenn $C \neq 0$, dann $\sigma \in AGL_n(\mathbb{C})$ mit

$$x_i \longmapsto \sqrt{c} \cdot x_i \quad (\text{geht } \forall c \in \mathbb{C}, c \neq 0)$$

gibt uns $f \sim_{\text{aff}} C \cdot x_1^2 + \dots + C \cdot x_r^2 + C \sim \boxed{x_1^2 + \dots + x_r^2 + 1}$.

Fall 2.2: Wenn $C = 0$, dann haben wir schon:

$$f \sim_{\text{aff}} \boxed{x_1^2 + \dots + x_r^2}$$

Um den Beweis zu beenden, brauchen wir noch zu zeigen, dass die Hyperquadriken aus der Liste paarweise nicht äquivalent sind.

Dafür reicht: Für jede Hyperquadrik haben wir zwei symmetrische Matrizen, die sie characterisieren:

$$C \in \mathrm{Mat}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad C' = \begin{pmatrix} c & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & & & \\ \vdots & & C & \\ c_n & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{C}).$$

Jedes Mal das wir $\sigma \in AGL_n(\mathbb{C})$ anwenden haben wir eine Kongruenz von symm. Matrizen:

$(A')^T \cdot C' \cdot A'$ und $A^T \cdot C \cdot A$, wobei $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ b_n & & & \end{pmatrix}$

Der Rang bleibt unverändert unter Kongruenz.

Es reicht also zu zeigen, dass $(\operatorname{rang} C, \operatorname{rang} C')$ für die Hyperquadriken in der Liste paarweise verschieden sind.

Es gilt: $\operatorname{rang} C = r$ in allen Fällen.

<u>Im Fall 1</u>:

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac12 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & 1 & & & & \\ \frac12 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix} \text{ hat Rang } r+2$$

<u>Im Fall 2.1</u>:

$$C' = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{array}\right) \text{ hat Rang } r+1$$

<u>Im Fall 2.2</u>:

$$C' = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{array}\right) \text{ hat Rang } r.$$

Also die Hyperquadriken aus der Liste sind paarweise nicht affin äquivalent. $\square$

<u>Bem</u>: Um die Äquivalenzklasse einer Hyperquadrik zu finden reicht also die Ränge der zugeordneten Matrizen C und C' zu bestimmen.