Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

SoSe24
A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 24. April 2024

Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 2

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H2.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 3. Mai 2024.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Man zeige, dass die für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ induktiv definierte Abbildung $\det : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{wenn } n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} \det A_{i1} & \text{wenn } n \geqslant 2, \end{cases}$$

linear in den Zeilen ist. Dabei bezeichnet A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix von A, die durch entfernen der i.Zeile und der j.Spalte erhalten wurde.

Aufgabe 2. **2 punkte**

Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{0} \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ die Nullmatrix. Sei X die $(m+n) \times (m+n)$ Blockmatrix gegeben durch:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right)$$

Zeigen Sie, dass $\det X = (\det A) \cdot (\det B)$.

(**Hinweis:** Induktion nach m und Laplace Entwicklung.)

`Folgende Aufgabe wird nicht bewertet und soll nicht abgegeben werden:`

Leseaufgabe 3. **$\sim$2 Stunden**

Lesen Sie aus dem Non-Skript Abschnitt 8.3. **Die Symmetrische Gruppe**: Seite 183 (unten) bis Seite 188. (Das heißt ohne den Teil **8.3.1**.)

Total: 4 Punkte

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 4.

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 \\ 8 & 27 & 25 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe 5.

Eine elementare Zeilenumformungsmatrix (eZUM) in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ ist eine Matrix der Form $U_{k\leftrightarrow\ell}$, $U_{k\to\lambda\cdot k}$, oder $U_{k\to k+\lambda\cdot\ell}$, wobei $k,\ell \in \{1,\dots,n\}$ Indizes sind und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ ein Skalar ist. Das heißt, dass die elementaren Zeilenumformungen durch links-Multiplizieren mit solchen Matrizen erhalten werden.

1. Geben Sie in $\mathrm{Mat}_6(\mathbb{Q})$ folgende Matrizen an, und bestimmen Sie die Inversen davon:

$$U_{2\leftrightarrow 5}, \qquad U_{4\to\lambda\cdot 4}, \qquad U_{5\to 5+6\cdot 2}, \qquad U_{2\to 2-6\cdot 5}.$$

2. Schreiben Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ als Produkt von möglichst wenigen eZUMs. Beweisen Sie, dass die gefundene Schreibweise eine minimale Anzahl von Faktoren hat.

Zusatzaufgabe 6.

Elementare Zeilenumformungen $A \mapsto U_\bullet \cdot A$ für Matrizen mit Einträgen in einem Ring R sind erlaubt nur wenn $U_\bullet \in \mathrm{GL}_n(R)$.

1. Man finde eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ die keine reduzierte Zeilenstufenform besitzt.
2. Welche Matrizen $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ besitzen eine (nicht unbedingt reduzierte) Zeilenstufenform?

Zusatzaufgabe 7.

Wie viele invertierbare Matrizen gibt es in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ für $n = 2,3,5$? Wie viele für $n = 4$?

Zusatzaufgabe* 8.

1. Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ schreiben Sie folgende Determinante als Produkt dreier Faktoren:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

2. Finden Sie eine Formel für die Determinante von $n \times n$ Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$.