**Freie Universität Berlin**
**Institut für Mathematik**

SoSe24
A. Constantinescu
S. Tornquist
Z. Adams
D. Schlaugies
A. Zepernick

Stand: 18. April 2024

---

# Lineare Algebra 2 – Hausaufgabe 1

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA2_H1.pdf` **bis 18:00 am Freitag**, den 26. April 2024.

**Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.**

---

**Übung 1.** **2 Punkte**

Sei $U$ ein Untervektorraum eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes $V$. Seien $B'$ eine Basis von $U$ und $B \supseteq B'$ eine Ergänzung von $B'$ zu einer Basis von $V$. Zeigen Sie, dass die Dualbasis $B^*$ eine Basis von $U^0$ enthält.

**Übung 2.** **2 Punkte**

Berechnen Sie Basen von $U^0$ und $U^*$ für den $\mathbb{Q}$-Unterraum von $\mathbb{Q}^4$:

$$U = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\,(1,1,0,0),(2,1,-1,1),(-1,1,0,1).$$

`Folgende Aufgabe wird nicht bewertet und soll nicht abgegeben werden:`

**Leseaufgabe 3.** **∼1 Stunde**

Lesen Sie Abschnitt 7.2, *Der Dualraum des Dualraumes*, auf Seite 165 im Non-Skript (Version vom 17. April 2024). Suchen Sie dabei selbst konkrete Beispiele für $\mathrm{ev}_v$ und $\mathrm{ev}_v(f)$.

**Total: 4 Punkte**

`Zusatzaufgaben auf der Rückseite`

## Zusatzaufgaben

Diese Aufgaben werden weder bewertet noch müssen sie abgegeben werden.
Sie werden in den Tutorien besprochen und sind für die Klausurvorbereitung sehr empfohlen.

### Zusatzaufgabe 4.

Sei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq_{\mathbb{K}} V$. Man beweise folgende Aussagen.

1. $\{0_V\}^0 = V^*$.
2. $V^0 = \{0_{V^*}\}$.
3. $(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$.
4. $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$.
5. Wenn wir $V$ und $V^{**}$ durch den Isomorphismus aus Satz 7.6 im Non-Skirpt identifizieren, dann gilt $U = (U^0)^0$.

### Zusatzaufgabe 5.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x, y) = (x, x + y, y)$.

1. Bestimmen Sie $U = \operatorname{Bild} f$.
2. Bestimmen Sie $f^* : (\mathbb{R}^3)^* \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^*$.
3. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen $\operatorname{Ker} f^*$ und $U$?

### Zusatzaufgabe 6.

Sei $U$ ein $\mathbb{K}$-Unterraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes $V$. Welche der folgenden Kostruktionen sind sinnvoll:

$$V^*/U^* \quad U^*/V^* \quad (U/V)^* \quad (V/U)^* \quad V/U^0 \quad V^*/U^0 \quad (V^*/U^0)^*?$$

Welche der als sinnvoll erachteten Vektorräume sind isomorph zu $U$, $U^0$ oder $U^*$?

### Zusatzaufgabe* 7.

Zeigen Sie, dass das duale Konzept von *Untervektorraum* das Konzept von *Quotientenraum* ist. Das heißt, zeigen Sie, dass dualisieren eine kanonische Korrespondenz zwischen den Untervektorräumen von $V$ und den Quotientenvektorräumen von $V^*$ produziert.

Verwenden Sie dabei die Bemerkung, dass $Q$ genau dann ein Quotientenraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes $W$ ist, wenn eine surjektive $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $W \longrightarrow Q$ existiert. Satz 7.11 aus dem non-Skript sollte auch helfen.