7.10.2024

LINEARE ALGEBRA 2

ZWEITE KLAUSUR

Lösungsskizze*

* Diese ist keine Musterlösung und dient auch nicht als Korrekturschema.

Aufgabe 1: a) Sei $U \subseteq_{\mathbb{K}} V$ ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.

Der Annulator von U ist der Unterraum des Dualraumes V^*:

$$U^0 := \{ f \in V^* : f(u) = 0 \quad \forall u \in U \}.$$

b) "$\subseteq$"

Sei $f \in (U_1 + U_2)^0$ beliebig. $\Rightarrow f(u_1 + u_2) = 0, \ \forall u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$.

Für $u_1 = 0$ haben wir: $f(u_2) = 0 \ \forall u_2 \in U_2$, also $f \in U_2^0$.

Für $u_2 = 0$ haben wir: $f(u_1) = 0 \ \forall u_1 \in U_1$, also $f \in U_1^0$.

$\Rightarrow f \in U_1^0 \cap U_2^0$.

"$\supseteq$". Sei $f \in U_1^0 \cap U_2^0$ beliebig.

Sei $u_1 + u_2 \in U_1 + U_2$ beliebig (mit $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$).

Es gilt $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = 0 + 0 = 0$,

weil $f \in U_1^0 \cap U_2^0$, also $f \in U_1^0$ und $f \in U_2^0$.

c) Sei $v = (x, y, z) \in V$, beliebig. Also $\boxed{x + y + z = 0.}$

Es gilt. $f(v) = (x - z, x + y + z, -x + z) \stackrel{\downarrow}{=} (x - z, 0, -x + z)$.

Weil $(x - z) + 0 + (-x + z) = 0$, folgt $f(v) \in V$.

d) Weil V als Lösungsmenge einer nicht-trivialen homogener linearer Gleichung gegeben ist, gilt $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$.

Also um eine Basis zu finden, reicht es zwei linear unabhängige Vektoren in V zu finden; zum Beispiel $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (1,0,-1)$.

Wir bestimmen dann die Matrix von $f|_V$ bezüglich dieser Basis:

$$f(v_1) = (1-0,\ 0,\ -1+0) = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2$$
$$f(v_2) = (1-(-1),\ 0,\ -1-1) = 0\cdot v_1 + 2\cdot v_2 .$$

Man kann beobachten, dass $f(v_2) = 2\cdot v_2$, also 2 ist ein Eigenwert von $f|_V$. Weil $f(2\cdot v_1) = 2\cdot v_2 = f(v_2)$, ist $f|_V$ nicht injektiv, also 0 ist der zweite Eigenwert, mit Eigenvektor: $2v_1 - v_2 = (1,-2,1)$. Weil $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, sind 0 und 2 die einzigen Eigenwerte und die Eigenräume sind 1-dimensional: $\mathrm{Eig}(f|_V, 0) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1,-2,1)$

$\mathrm{Eig}(f|_V, 2) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1,0,-1)$.

Wenn man das nicht bemerkt, dann kann man die Suche systematisch angehen; die zugeordnete Matrix ist:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{also } \chi_{f|_V} = \det\begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix} = x(x-2),$$

also die Eigenwerte sind die Nullstellen 0 und 2.

Wir bestimmen jetzt $\mathrm{Eig}(f|_V; 0)$ und $\mathrm{Eig}(f|_V; 2)$

Sei $v = (x,y,z)$.

$v \in \mathrm{Eig}(f|_V; 0) \iff f(v) = 0$ und $v \in V$

$\iff (x-z,\ 0,\ -x+z) = (0,0,0)$ und $x+y+z=0 \iff x = z$ und $y = -x-z$.

Also $\mathrm{Eig}(f|_V; 0) = \{(x,-2x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

$v \in \mathrm{Eig}(f|_V; 2) \iff f(v) = 2v$ und $v \in V$

$\iff (x-z,\ x+y+z,\ -x+z) = (2x, 2y, 2z)$ und

$x+y+z = 0$

$$\iff \begin{cases} x - z = 2x \\ 0 = 2y \\ -x + z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

Also $\mathrm{Eig}(f|_V; 2) = \{ (x, 0, -x) : x \in \mathbb{R} \}$.

e. Ja, $f|_V$ ist diagonalisierbar, weil alle Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1 haben.

<u>Aufgabe 2</u>: a) Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom χ_f. Dann gilt:

$$\chi_f(f) = 0 \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V).$$

b) Weil $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert ist, existiert ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $f(v) = \lambda \cdot v$. Es gilt dann für alle $i \in \mathbb{N}$: $f^i(v) = \lambda^i \cdot v$.
Sei $p(x) = c_n x^n + \dots + c_1 \cdot x + c_0$, mit $c_i \in \mathbb{K}$ $\forall i$. Dann gilt:

$$(p(f))(v) = c_n \cdot f^n(v) + \dots + c_1 \cdot f(v) + c_0 \cdot id(v) =$$

$$= c_n \cdot \lambda^n \cdot v + \dots + c_1 \cdot \lambda v + c_0 \cdot v =$$

$$= (c_n \cdot \lambda^n + \dots + c_1 \cdot \lambda + c_0) \cdot v =$$

$$= p(\lambda) \cdot v.$$

Weil $v \in V \setminus \{0\}$ folgt daraus, dass $p(\lambda)$ ein EW von $p(f)$ ist.

c) Die Dimension von $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) = (\dim_{\mathbb{K}} V)^2 = n^2$, weil $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \simeq \mathrm{Mat}_{\dim_{\mathbb{K}} V}(\mathbb{K})$. Also müsste $m = n^2 - 1$ gelten.

Für alle $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ gilt aber, nach dem Satz von Cayley-Hamilton dass $\chi_f(f) = 0$, also $f^n + c_1 f^{n-1} + \dots + c_{n-1} f^1 + c_n = 0$, mit $c_i \in \mathbb{K}$.
Weil $n > 1$, gilt $n^2 - 1 > n$, also das gibt eine nicht-triviale (Koeff. von $f^n \neq 0$) lineare Kombination von $\{f^0, \dots, f^{n^2-1}\}$, und somit ist diese Menge für kein f linear unabhängig.

d. Weil $\deg \chi_\varphi = 6$, ist Spur φ gleich mit (-1) mal den Koeffizient von t^5 in χ_φ. Also

$$\text{Spur } \varphi = -2 .$$

e. Weil $\chi_f = t^2 \cdot (t^4 + 2t^5 - 3t^2 - 4t + 4)$, ist

0 ein Eigenwert von φ mit $\mu_a(\varphi, 0) = 2$.

Es gilt: $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \varphi = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Eig}(\varphi, 0) = \mu_g(\varphi; 0)$.

Weil $t \mid \mathrm{mPol}_\varphi$ und $t^2 \nmid \mathrm{mPol}_\varphi$, folgt es, dass

der größte Jordan-Block zum E.W. 0 größe 1 hat. Das impliziert, weil die Summe der Größen der J-Bl. zu 0 gleich mit $\mu_a(\varphi; 0)$ sein muss, dass es zwei 1×1 Jordan-Blöcke zu 0 gibt, also $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$.

f. Wir faktorisieren erstmals mPol_f:

(Man merkt, dass 1 eine Nullstelle ist, also $t-1$ muss ein Faktor sein. Das muss man aber nicht erwähnen)

$$\begin{aligned}
t^4 + 3t^3 - 4t &= t \cdot (t^3 + 3t^2 - 4) \\
&= t \cdot (t^3 - t^2 + 4t^2 - 4t + 4t - 4) = \\
&= t \cdot (t^2(t-1) + 4t(t-1) + 4(t-1)) = \\
&= t \cdot (t-1)(t^2 + 4t + 4) = t(t-1)(t+2)^2
\end{aligned}$$

Das heißt, die EW von φ sind $0, 1, -2$, und die größten entsprechenden J-Blöcke sind:

für 0 : 1×1

* für 1 : 1×1

für −2 : 2×2.

Wir wissen, dass $mPol_\varphi \mid \chi_\varphi$.

Es gilt auch $mPol_\varphi = t \cdot (t^3 + 3t^2 - 4) = t \cdot q(t)$

$$\chi_\varphi = t^2 (t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 4t + 4) = t^2 \cdot p(t)$$

Es reicht also p durch q zu teilen:

$$\begin{array}{l|l} t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 4t + 4 & t^3 + 3t^2 - 4 \\ \underline{t^4 + 3t^3 \qquad\quad - 4t \quad \ominus} & \overline{t - 1} \\ 0 \; -t^3 - 3t^2 - 0 + 4 & \\ \underline{\;\; -t^3 - 3t^2 \qquad + 4} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Also $p = (t-1) \cdot q$ und somit

$$\chi_\varphi = t^2 \cdot (t-1)^2 \cdot (t+2)^2$$

Also, die Summe der Größen der J-Bl. sind: für 0 : 2, für 1 : 2, für −2 : 2. Das, zusammen mit * gibt uns die einzige mögliche JNF:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & & & & & \\ & \boxed{0} & & & 0 & \\ & & \boxed{1} & & & \\ & & & \boxed{1} & & \\ & 0 & & & -2 & 1 \\ & & & & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 a) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (beliebiger Dimension).
Eine symmetrische Bilinearform $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ist positiv-definit wenn $\varphi(v,v) > 0$, $\forall v \in V \setminus \{0\}$.

b) Wir orientieren uns am Krietenium:

$A = (a_{ij}) \in Mat_n^{sym}(\mathbb{R})$ ist positiv-definit $\iff \det A_k > 0$, $\forall k = 1, \ldots, n$.

wobei $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$.

Wir suchen also $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $\det(a) = a > 0$ und

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2 > 0$

die aber einen negativen Eintrag hat.

Zum Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Wenn man das Kriterium erwähnt, dann ist nichts weiteres zu zeigen. Sonst muss man beweisen, dass

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0 \quad , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Das ist äquivalent zu

$$(x-y, -x+2y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - xy - xy + 2y^2$$
$$= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 =$$
$$= (x-y)^2 + y^2 > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Das ist wahr, weil die Summe von Quadraten in $\mathbb{R}$ nicht negativ sein kann, und nur dann Null wenn alle Quadrate Null sind. Also $\varphi_A((x,y),(x,y)) > 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c) Wenn Ψ positiv-definit ist, dann gilt insbesondere

$$\Psi(u,u) > 0 \quad , \quad \forall\, u \in U .$$

Also $\Psi|_U$ ist auch positiv-definit.

Es bleibt zu zeigen, dass aus $\Psi|_U$ positiv-definit, $\Psi|_U$ nicht ausgeartet folgt:

Sei $w \in U$, sodass $\Psi(w,u) = 0$, $\forall\, u \in U$.

Insbesondere $\Psi(w,w) = 0$, also, weil $\Psi|_U$ positiv-definit ist, folgt $w = 0$. Also $U^\perp = \{0\}$ und somit ist $\Psi|_U$ nicht ausgeartet.

d. Sei $v = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ mit $v \in \{(1,i)\}^\perp$.

Also $\langle (z_1,z_2),(1,i)\rangle = z_1 \cdot \overline{1} + z_2 \cdot \overline{i} = 0$

Das ist äquivalent zu $z_1 - i \cdot z_2 = 0$,

Also $z_1 = i \cdot z_2$. Also $v = (i \cdot z_2, z_2)$ für irgendein $z_2 \in \mathbb{C}$.

Somit gilt $\{(1,i)\}^\perp = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}(i,1)$.

e. Ja, das existiert:

Weil $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(1,i)$, wäre $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ein Eigenwert und $(1,i)$ ein Eigenvektor. Unitäre Automorphismen haben Eigenwerte von Betrag 1, das ist von $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Das einfachste Beispiel ist die Multiplikation mit $\lambda = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$: $f_\lambda : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ $\quad f_\lambda(v) = \lambda \cdot v$.

Bezüglich jeder Basis ist die zugeordnete Matrix von f_λ:

$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, weil $\lambda \cdot \overline{\lambda} = \frac{(1+i)\cdot(1-i)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1+1}{2} = 1$, gilt $M \cdot \overline{M^T} = I_2$,

also M ist hermitesch und somit f_λ unitär.