LA2. VL21. 1/7/'24

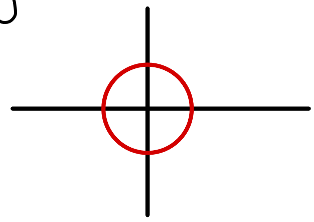
Affine (Hyper)Quadriken

<u>Idee:</u> Betrachte Gleichungen des 2. Grades und deren Lösungsmengen in $\mathbb{K}^n$.

- Welche Zusammenhänge gibt es? (Gleichung = Algebra, Lösungsm. = Geometrie)
- Welche Transformationen des Raumes / der Gleichungen wollen wir erlauben?

<u>Beispiel:</u> $x^2+y^2=1 \rightsquigarrow x^2+y^2-1=0$ (Lösung = Nullstelle eines Polynoms)

① $K=\mathbb{R}$: $L_{\mathbb{R}^2} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1=0\}$



② $K=\mathbb{Q}$: $L_{\mathbb{Q}^2} = \{(p,q)\in\mathbb{Q}^2 : p^2+q^2=1\}$ ↳ Zahlentheoretisches Problem.

Bringe auf einem gemeinsamen Nenner:

$$\left\{\left(\tfrac{a}{c},\tfrac{b}{c}\right)\in\mathbb{Q}^2,\ a^2+b^2=c^2\right\} \longleftrightarrow \{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3 : c\neq 0,\ a^2+b^2=c^2\}$$

$$\overset{\in}{(a,b,c)} \Rightarrow \overset{\in}{(\pm a, \pm b, \pm c)}$$

Um $L_{\mathbb{Q}^2}$ zu bestimmen reicht es also die nicht negativen, primitiven* pythagoreischen Tripel zu verstehen. (* primitiv $\Leftrightarrow$ ggT$(a,b,c)=1$)

$\boxed{\text{Satz:}}$ $\left\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3 : \begin{matrix} c\neq 0 \\ a^2+b^2=c^2 \\ \mathrm{ggT}(a,b,c)=1\end{matrix}\right\} = \{(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2) : m,n\in\mathbb{N},\ m>n\geq 0\}$

(Suchen Sie den Beweis dafür)

③ Fermats Letzter Satz: Für $n>2$ gilt:

$$\{(x,y)\in\mathbb{Q}^2 : x^n+y^n=1\} \subseteq \{(\pm 1,0),(0,\pm 1)\}.$$

Buchempfehlung (Geschichte der Mathematik): "Fermats Letzter Satz" von Simon Singh.

Zu erst: **Affine Geometrie**

[nach: Fischer "Lin.Alg & An.Geo" – Exkurs über aff. Geom.]

Idee: Affine Geometrie = Lineare Algebra + Translationen.

Ein affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$ ist die Lösungsmenge eines (nicht unbedingt homogenes) LGS: $U = \mathcal{L}(A|\underline{b}) = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n : A\cdot\underline{x} = \underline{b}\}$

Wenn man eine Lösung p gefunden hat, dann gilt:

$$U = p + \underbrace{\mathcal{L}(A|0)}_{\text{UVR von } \mathbb{K}^n} = \{p + \underline{x} : A\cdot\underline{x} = 0\}$$

"$\supseteq$" $A\cdot(p+\underline{x}) = A\cdot p + A\cdot\underline{x} = \underline{b} + 0 = \underline{b}$, also $p + \underline{x} \in U$.

"$\subseteq$" $A\cdot u = \underline{b} \Rightarrow u = p + \underbrace{(u-p)}_{\underline{x}}$ und $A\cdot(u-p) = Au - Ap = \underline{b} - \underline{b} = 0$

also $u - p \in \mathcal{L}(A|0)$. $\square$

Wir wissen schon: $\{\mathcal{L}(A|0) : A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})\} = \{U \subseteq_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n\}$.

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition: $U \subseteq V$ ist ein affiner Unterraum von V wenn:

$\exists p \in U$ und $U_0 \subseteq_{\mathbb{K}} V$, sodass $U = p + U_0 = \{p + v : v \in U_0\}$.

Bemerkung: U_0 ist als $U_0 = \{q - p : q, p \in U\}$ eindeutig bestimmt.

Die Dimension des affinen Unterraumes $U = p + U_0$ ist: $\dim_{\mathrm{aff}} U := \dim_{\mathbb{K}} U_0$.

Bezeichnung: Für $p, q \in V$: $\overrightarrow{pq} := q - p$ (also $p, q \in U \Rightarrow \overrightarrow{pq} \in U_0$)

- Der Vektor $\overrightarrow{pq}$ verschiebt den Punkt p nach q:

$$p + \overrightarrow{pq} = q$$

Def: $\forall v \in V$ heißt die Abbildung $\tau_v : V \longrightarrow V$, $q \longmapsto q+v$

die Translation mit v.

Def: Ein $(k+1)$-Tupel $(p_0, \dots, p_k)$ mit $p_i \in U$ $\forall i$ heißt affine Basis (oder k-Bein) von U wenn:

$\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$ eine $\mathbb{K}$-Basis von U_0 ist.

Def: Eine Abbildung $f: V \longrightarrow W$ zwischen $\mathbb{K}$-VR heißt affine Abbildung wenn es eine $\mathbb{K}$-lin. Abb. $F: V \to W$ gibt, sodass

$$f(v) = f(0_V) + F(v) \qquad \forall v \in V.$$

Bem: Die Abbildung F ist eindeutig bestimmt.

- Im Fall $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$ ist $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ genau dann affin, wenn $\exists\, A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$, sodass

$$f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x} + b \qquad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{K}^n.$$

Def: $f: V \to W$ heißt <u>Affinität</u> wenn f affin und bijektiv ist.

! Weil der Nullvektor keine besondere Rolle mehr spielt, kann man nicht über den "Kern einer affinen Abbildung" sprechen. Nur über den Kern der zugeordneten $\mathbb{K}$-linearen Abbildung.

Lemma:

a) $f: V \longrightarrow V$ ist eine Affinität $\Leftrightarrow F \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$ ($\mathbb{K}$-Isomorph.)
$v \longmapsto f(0) + F(v)$

b) $f: V \longrightarrow V$ ist eine Affinität $\Rightarrow f^{-1}: V \to V$ ist eine Affinität.

mit $f^{-1}(w) = F^{-1}(f(0)) + F^{-1}(w)$, $\forall w \in V$.

c) Wenn $p_0, \dots, p_n$ und $q_0, \dots, q_n$ zwei affine Basen von V sind, dann $\exists!\, f: V \longrightarrow V$ Affinität mit

$$f(p_i) = q_i \qquad \forall\, i = 0, \dots, n.$$

Beweis: $\boxed{a \,\&\, b}$ Es gilt: $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Wenn $F \neq$ Isomorphismus $\xRightarrow{\dim_{\mathbb{K}} V < \infty}$ F ist nicht injektiv $\Rightarrow \mathrm{Ker} F \neq 0$

$\Rightarrow \exists v \in V$, $v \neq 0$ und $F(v) = 0$.

Dann gilt $f(v) = f(0) + F(v) = f(0)$, also $f \neq$ injektiv. $\lightning$.

Also: ("$\Rightarrow$" in a.) f = Affinität $\Rightarrow$ F ist ein $\mathbb{K}$-Automorphismus.

Umgekehrt: Wenn $F \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) \Rightarrow \exists\, F^{-1}: V \longrightarrow V$ $\mathbb{K}$-linear.

definiere $f^{-1}: V \longrightarrow V$ durch $f^{-1}(w) := -F^{-1}(f(0)) + F^{-1}(w)$.

Es gilt: $f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(f(0) + F(v)) = -F^{-1}(f(0)) + F^{-1}(f(0) + F(v)) =$

$= -F^{-1}(\cancel{f(0)}) + F^{-1}(\cancel{f(0)}) + F^{-1}(F(v)) = v \qquad \forall v \in V$

Also $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$.

Analog zeigt man $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_V$. Also f ist eine Affinität.

$\boxed{a \,\&\, b}$

c) Lin.A.1: Weil $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ und $\overrightarrow{q_0q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0q_n}$ Basen von V sind,

$\exists! \ F: V \to V$ mit $F(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{q_0q_i} \ \forall i$ und $F \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$.

Definiere: $f(\mathbf{0}) := q_0 - F(p_0)$ und $f(v) := f(\mathbf{0}) + F(v), \forall v \in V$.

Also $f: V \to V$ ist nach Punkt a) eine Affinität und es gilt:

$$\begin{aligned} f(p_i) &= f(0) + F(p_i) &&= q_0 - F(p_0) + F(p_i) = \\ &= q_0 + F(p_i - p_0) &&= q_0 + F(\overrightarrow{p_0p_i}) = \\ &= q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} &&= q_i \qquad \forall i = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von f folgt aus der Eindeutigkeit von F. $\square$

Affine Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$

Ziel: diese durch $(m+1) \times (n+1)$ Matrizen zu beschreiben.

Sei $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ affin, also $f(\underline{x}) = f(0) + F(\underline{x})$.

Lin. A. $\Rightarrow$ $\exists \ A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ mit $F(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$.

Sei $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{K}^m$ definiert als $\underline{b} := f(\mathbf{0})$.

$$\text{Also } f(\underline{x}) = \underline{b} + A \cdot \underline{x}, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n.$$

Für $A' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ b_m & & & \end{array}\right)$ gilt: $A' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_m \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Wobei $f(\underline{x}) = \underline{y}$. Also f wird durch A' beschrieben.

Wenn f eine durch A' beschriebene Affinität ist, dann ist f^{-1} durch

$$(A')^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -A^{-1}\cdot \underline{b} & & A^{-1} & \end{array}\right)$$

beschrieben.

Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x_1,x_2)^T = (2x_2 - 4, x_1 - 2)^T$

Es gilt: $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $F(x_1,x_2)^T = (2x_2, x_1)^T$

Also $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A' = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Wir haben: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $-A^{-1}\cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (A')^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1/2 & 0 \end{array}\right), \text{ also } f^{-1}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 + 2, \tfrac{1}{2}x_1 + 2)^T.$$

Polynome in mehreren Viarablen (Siehe Non-Skript)

$n \in \mathbb{N}_{>0}$, $x_1, \dots, x_n$ Variablen, $\forall \underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ wird das Monom $\underline{x}^{\underline{a}} := x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$ zugeordnet.

Wir betrachten Monome als $\mathbb{K}$-linear unabhängige Vektoren.

D.h. $\lambda_1 \cdot \underline{x}^{a_1} + \dots + \lambda_r \cdot \underline{x}^{a_r} = 0$ mit $\underline{a}_i \neq \underline{a}_j$ wenn $i \neq j$, impliziert

$\lambda_1 = \dots = \lambda_r$.

Wir definieren dann den $\mathbb{K}$-VR:

$$\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] = \{\text{alle l. Komb. der Monomen in } x_1,\dots,x_n\}.$$

$$= \Big\{ \sum_{\substack{\text{endl.-viele} \\ c_{\underline{a}} \neq 0}} c_{\underline{a}} \cdot \underline{x}^{\underline{a}} \;:\; c_{\underline{a}} \in \mathbb{K} \Big\}.$$

Die Addition ist komponentenweise und die Mult. ist durch lineare Erweiterung von $\underline{x}^{\underline{a}} \cdot \underline{x}^{\underline{b}} = \underline{x}^{\underline{a}+\underline{b}}$ erhalten.

Die 1 in $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ ist das Monom $\underline{x}^{\underline{0}} = x_1^0 \cdots x_n^0 = 1$.

__Bem__: $(\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n], +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

Der Grad eines Monoms ist:

$$\deg(\underline{x}^{\underline{a}}) = a_1 + \dots + a_n.$$

Der Grad eines Polynoms $f = \sum c_{\underline{a}} \cdot \underline{x}^{\underline{a}}$ ist

$$\deg f = \max\{\deg \underline{x}^{\underline{a}} \;:\; c_{\underline{a}} \neq 0\}.$$

Ein Polynom $f = \sum c_{\underline{a}} x^{\underline{a}} \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ ist __homogen von Grad d__ wenn $c_{\underline{a}} \neq 0 \Rightarrow \deg x^{\underline{a}} = d$.

__Bsp__: $x_1^3 + 3x_1x_2^2 - x_1x_2x_3 + x_2^2x_3$ ist homogen von Grad 3.

Jedes Polynom $f \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ definiert eine polinomielle Abbildung:

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \longmapsto f(\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

(! Wenn $\#\mathbb{K} < \infty$, dann definieren $\neq$ Pol. gleiche Abbildungen)

LA2 - VL22 - 3.7.'24

Daueranannahme: $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$

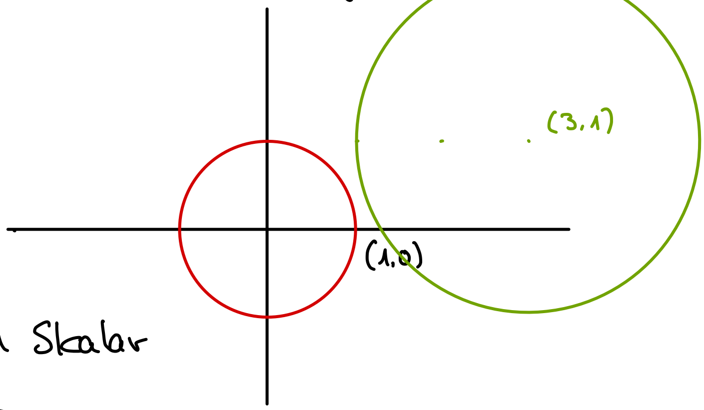
Affine Quadriken

<u>Idee</u>: Lösungsmengen polinomieller Gleichungen von Grad 2.

<u>z.B.</u>: $x^2+y^2-1=0$.

$2x^2+2y^2-1=0$

$\lambda \cdot (x^2+y^2-1)=0 \quad (\lambda \neq 0)$



Multiplikation mit einem nicht-Null Skalar ändert die Nullstellenmenge nicht.

$(x-3)^2+(y-1)^2-2=0 \iff x^2+y^2-6x-2y-8=0$

Eine affine Transformation der Nullstellenmenge (durch eine Affinität) entspricht einer (umgekehrten) Transformation der Gleichung.

Für $f \in \mathbb{K}[\underline{x}] := \mathbb{K}[x_1,..,x_n]$ definiere $N(f) = \{\underline{\alpha} \in \mathbb{K}^n : f(\underline{\alpha}) = 0\}$.

1. Wir definieren auf $\mathbb{K}[\underline{x}] = \mathbb{K}[x_1,..,x_n]$ die Relation

$$f \sim g \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 : f = \lambda \cdot g.$$

- Das ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}[\underline{x}]$ und:

$$f(\underline{\alpha}) = 0 \iff \lambda \cdot f(\underline{\alpha}) = 0 \quad \forall \lambda \neq 0.$$

Also $f \sim g \Rightarrow N(f) = N(g)$

$\not\Leftarrow$ z.B. $N(x^2+1) = N(x^2+2) = \emptyset \subseteq \mathbb{R}^1$

aber $x^2+1 \not\sim x^2+2$.

<u>Def</u>: Eine **affine Hyperfläche** von Grad d in $\mathbb{K}^n$ ist eine Äquivalenzklasse eines Polynoms $f \in \mathbb{K}[x_1,..,x_n]$ mit $\deg f = d$.

- $f = 0$ heißt Gleichung der HF.
- $N(f)$ heißt geometrischer Ort (oder Nullstellenmenge) der HF.

Beispiel: $\boxed{d=1}$ affine Hyperebenen.

(Wir haben in Lin.A. 1 gesehen, dass lineare Hyperebenen, d.h. $H \subseteq_{\mathbb{K}} V$ mit $\dim_{\mathbb{K}} H = \dim_{\mathbb{K}} V - 1$ sind durch eine lin. Gleichung $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$ definiert, und dass zwei Gleichungen genau dann dieselbe Hyperebene definieren, wenn sie nicht-triviale Vielfachen von einander sind.)

$\boxed{d=2}$ Der geometrische Ort könnte sogar leer sein:

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$: $N_{\mathbb{R}}(x^2+y^2+1) = \emptyset$ vs. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ $N_{\mathbb{C}}(x^2+y^2+1) \neq \emptyset$.

Wir bleiben bei $d=2$. $\rightsquigarrow$ affine Hyperquadriken
$n>3$

$n=3$: Quadriken
$d=2$: (Flächen)

$n=2$: Kegelschnitte.
$d=2$ (Kurven)

Wenn $\deg f = 2$: $\quad f = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_i \cdot x_j + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i + c$.

Konvention.
(geht weil $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$)

Also: $$f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + 2 \cdot (c_1 \ldots c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c$$

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (1\ x_1 \ldots x_n) \left(\begin{array}{c|ccc} c & c_1 & \cdots & c_n \\ \hline c_1 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Wir wollen Hyperquadriken bis auf Affinität verstehen. Das heißt, wir wollen zwei Hyperquadriken als äquivalent (gleich) betrachten wenn sie durch Affinitäten ineinander umgewandelt werden können.

Genauer: Bezeichne $AGL_n(\mathbb{K}) = \{\sigma : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \mid \text{Affinität}\}$.

Bem: Sei $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ und $\sigma \in AGL_n(\mathbb{K})$. Es gilt:

$$\sigma(N(f(\underline{x}))) = N(f(\sigma^{-1}(x))).$$

Bew: $\sigma(M) = \{\sigma(m) : m \in M\}$

also: $$\sigma(N(f(\underline{x}))) \overset{\text{Def } N(f)}{=} \sigma\{\underline{\alpha} \in \mathbb{K}^n : f(\underline{\alpha}) = 0\}$$

$$\overset{\text{Def } \sigma(M)}{=} \{\sigma(\underline{\alpha}) \in \mathbb{K}^n : f(\underline{\alpha}) = 0\}.$$

$$\overset{\sigma^{-1}\circ\sigma = id}{=} \{\sigma(\underline{\alpha}) \in \mathbb{K}^n : f(\sigma^{-1}(\sigma(\underline{\alpha}))) = 0\}$$

$$\overset{\sigma = \text{bij.}}{=} \{\underline{\beta} \in \mathbb{K}^n : f(\sigma^{-1}(\underline{\beta})) = 0\}$$

$$\overset{\text{def } N(f)}{=} N(f(\sigma^{-1}(\underline{x}))).$$

Bem: Wenn $f \sim g$, dann $f(\sigma(\underline{x})) \sim g(\sigma(\underline{x}))$

Definition: Zwei Hyperflächen $\hat{f}, \hat{g} \in \mathbb{K}[\underline{x}]/_\sim$ sind affin Äquivalent, wenn es $\sigma \in AGL_n(\mathbb{K})$ gibt so dass

$$f(\sigma(\underline{x})) = g(\underline{x}).$$

Affine Klassifizierung der Hyperquadriken heißt also die Äquivalenzklassen dieser ÄR. zu beschreiben.

<u>Satz</u>: Jede Hyperquadrik in $\mathbb{C}^n$ ist zu genau einer der folgenden Hyperquadriken affin äquivalent:

- $x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_{r+1}$, mit $1 \leq r < n$
- $x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 1$, mit $1 \leq r \leq n$.
- $x_1^2 + \ldots + x_r^2$, mit $1 \leq r \leq n$

<u>Beweis</u>: Sei $f = (1 \ \ \underline{x}^T) \cdot C' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x} \end{pmatrix}$ wobei $C \in \mathrm{Mat}_n^{sym}(\mathbb{C})$

und $C' = \left(\begin{array}{c|ccc} c & c_1 & \ldots & c_n \\ \hline c_1 & & & \\ \vdots & & C & \\ c_n & & & \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}_{n+1}^{sym}(\mathbb{C})$.

Korollar 11.37. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, dann existiert für jede symmetrische Bilinearform $\varphi \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{sym}}(V)$ eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{I_r} & \\ & \mathrm{O} \end{pmatrix}.$$

Aus Korollar 11.37.

existiert $A \in GL_n(\mathbb{C})$, sodass

$$A^T \cdot C \cdot A = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt also für $\sigma : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ $\sigma(\underline{x}) = A \cdot \underline{x} + \underline{0}$,

dann

$$f(\sigma(\underline{x})) = (1 \ \ \sigma(x)^T) \cdot C' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\underline{x}) \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ \ \underline{x}^T) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A^T \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} c & c_1 & \ldots & c_n \\ \hline c_1 & & & \\ \vdots & & C & \\ c_n & & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x} \end{pmatrix}$$

$$= (1\ \underline{x}^T) \cdot \begin{array}{c} \\ \end{array}\left(\begin{array}{c|ccc} c & c_1 & \cdots & c_n \\ \hline c_1 & \boxed{I_r} & & \\ \vdots & & & \\ c_n & & & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \underline{x} \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 2c_1x_1 + \ldots + 2c_rx_r + 2c_{r+1}x_{r+1} + \ldots + 2c_nx_n + c\,.$$

Diese war die schwierigste Transformation.

Für $i = 1, .., r$ verwenden wir quadratische Ergänzung:

$$x_1^2 + 2c_1x_1 + c_1^2 - c_1^2 = (x_1 + c_1)^2 - c_1^2\,.$$

Also wenn wir $x_1 \longmapsto x_1 - c_1$ abbilden, dann verschwindet der lineare (i.e. deg=1) Teil in x_1.

Für $\sigma \in AGL_n(\mathbb{C})$ mit

$$\sigma(x_1, .., x_n) = (x_1 - c_1, .., x_r - c_r, x_{r+1}, .., x_n)$$

bekommen wir also:

$$f(\sigma(\underline{x})) = x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 2c_{r+1}x_{r+1} + \ldots + 2c_nx_n + c\,.$$

wir können jetzt $x_{r+1}, .., x_n$ permutieren, sodass $c_{r+1}, .., c_s \neq 0$, $c_{s+1} = \ldots = c_n = 0$.
und $x_i \longmapsto \frac{1}{2c_i} x_i$ für $i = r+1, .., s$ anwenden.

<u>Also</u>: $f \underset{\text{aff.}}{\sim} x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_{r+1} + \ldots + x_s + c$

<u>Fall 1</u>: $\boxed{s > r}$, dann, durch $x_s \longmapsto x_s - c$

bekommen wir $f \sim_{aff} x_1^2 + \dots + x_r^2 + x_{r+1} + \dots + x_s$

Durch $x_{r+1} \longmapsto x_{r+1} - x_{r+2} - \dots - x_s$ und $x_i \longmapsto x_i \quad \forall i \neq r+1$

bekommen wir: $\boxed{f \sim_{aff} x_1^2 + \dots + x_r^2 + x_{r+1}}$.

<u>Fall 2</u>: $\boxed{s = r}$ D.h. Kein Teil von Grad 1.

Also $f \sim_{aff.} x_1^2 + \dots + x_r^2 + c$

<u>Fall 2.1</u>: Wenn $c \neq 0$, dann $\sigma \in AGL_n(\mathbb{C})$ mit

$$x_i \longmapsto \sqrt{c} \cdot x_i \quad (\text{geht } \forall c \in \mathbb{C}, c \neq 0)$$

gibt uns $f \sim_{aff} c \cdot x_1^2 + \dots + c \cdot x_r^2 + c \sim \boxed{x_1^2 + \dots + x_r^2 + 1}$.

<u>Fall 2.2</u>: Wenn $c = 0$, dann haben wir schon:

$$f \sim_{aff} \boxed{x_1^2 + \dots + x_r^2}$$

Um den Beweis zu beenden, brauchen wir noch zu zeigen, dass die Hyperquadriken aus der Liste paarweise nicht äquivalent sind.

<u>Dafür reicht</u>: Für jede Hyperquadrik haben wir zwei symmetrische Matrizen, die sie characterisieren:

$$C \in \mathrm{Mat}_n^{sym}(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad C' = \left(\begin{array}{c|ccc} c & c_1 & \dots & c_n \\ \hline c_1 & & & \\ \vdots & & C & \\ c_n & & & \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}_n^{sym}(\mathbb{C}).$$

Jedes Mal das wir $\sigma \in AGL_n(\mathbb{C})$ anwenden haben wir eine Kongruenz von symm. Matrizen:

$(A')^T \cdot C' \cdot A'$ und $A^T \cdot C \cdot A$, wobei $A' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ b_n & & & \end{array}\right)$

Der Rang bleibt unverändert unter Kongruenz.

Es reicht also zu zeigen, dass $(\operatorname{rang} C, \operatorname{rang} C')$ für die Hyperquadriken in der Liste paarweise verschieden sind.

Es gilt: $\operatorname{rang} C = r$ in allen Fällen.

<u>Im Fall 1</u>:

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & 1 & & & \\ \frac{1}{2} & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{hat Rang } r+2$$

<u>Im Fall 2.1</u>:

$$C' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{array}\right) \quad \text{hat Rang } r+1$$

<u>Im Fall 2.2</u>:

$$C' = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{array}\right) \quad \text{hat Rang } r.$$

Also die Hyperquadriken aus der Liste sind paarweise nicht affin äquivalent. $\square$

Bem: Um die Äquivalenzklasse einer Hyperquadrik zu finden reicht also die Ränge der zugeordneten Matrizen C und C' zu bestimmen.

Eine Hyperquadrik heißt nicht entartet falls Rang $C' = n+1$

Die nicht entartete Hyperquadriken in $\mathbb{C}^n$ sind also affin äquivalent zu

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1 \quad \text{oder} \quad x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n .$$

In dem reellen Fall kommen auch Vorzeichen vor.
Der Kern der Klassifizierung ist aber wieder die Diagonalisierung der symmetrischen Matrizen und der Trägheitssatz II von Sylvester.

Für Kegelschnitte ($n=2$) haben wir folgenden Satz:

Satz Affine Klassifizierung der reellen Kegelschnitten:

Jeder quadratische Kurve in $\mathbb{R}^2$ ist zu genau einer der folgenden affin äquivalent:

▬ = nicht entartet.

(i) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (***Ellipse***)

(ii) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (*Ellipse ohne reellen Punkten*)

(iii) $x^2 + y^2 = 0$ (*Entartete Ellipse*)

(iv) $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (***Hyperbel***)

(v) $x^2 - y^2 = 0$ (*Entartete Hyperbel*)

(vi) $x^2 - y = 0$ (***Parabel***)

(vii) $x^2 - 1 = 0$ (*entartete Parabel (parallele Geraden)*)

(viii) $x^2 + 1 = 0$ (*entartete Parabel ohne reellen Punkten*)

(ix) $x^2 = 0$ (*doppelt entarteter Kegelschnitt (doppelte gerade)*)

Der Beweis läuft ähnlich wie im komplexen Fall, nur mit mehreren Fallunterscheidungen.

Bem: In dem komplexen Fall sind die Ellipse und die Hyperbel affin äquivalent.