Sybille Krämer

Zur Begründung des Infinitesimalkalküls durch Leibniz

Fast schon ein Gemeinplatz der mathematikhistorischen Forschung ist es, daß die Infinitesimalrechnung, die ihre geschliffenste Gestalt in Newtons Fluxionsrechnung und Leibnizens Infinitesimalkalkül erhielt, ein zwar überaus effektives, nicht jedoch begründetes Verfahren gewesen sei.[1] Typische Frucht eines Jahrhunderts, in welchem der Sinn der Mathematiker sich ganz auf die Schaffung von Problemlösungsverfahren ausgerichtet habe, ohne in gleicher Weise um die Sicherung der Grundlagen bemüht zu sein.[2] Soweit Leibniz Rechtfertigungsversuche überhaupt zugestanden werden, gelten sie als inkonsistent.[3] Bestenfalls werden pragmatisch wechselnde Begründungsweisen attestiert.[4]

Einzig der Mathematikhistoriker H.J. Bos betont in seiner ausgefeilten Rekonstruktion der Infinitesimalrechnung von Leibniz, daß dessen Grundlegung gelungen sei.[5] Zwei Wege diagnostiziert er, auf denen Leibniz die Fundamente seines Kalküls errichtete: „one connected with the classical method of proof by exhaustion, the other in connection with the law of continuity."[6]

In der Tat: Das allzu griffige Interpretationsschema der Leibnizschen Infinitesimalrechnung als eines effektiven Verfahrens auf defizienter Grundlage ist unangemessen. Vielmehr kristallisiert sich in den Leibnizschen Überlegungen eine Idee heraus, welcher nicht nur die *technische Wirkungskraft* seiner Infinitesimalrechnung geschuldet ist, sondern die zugleich auch die Basis abgibt für deren *Grundlegung*. Es ist dies die Idee eines operativen Gebrauches mathematischer Symbole mittels Kalkülisierung.

Falls die Leitidee eines operativen Symbolgebrauches sich tatsächlich identifizieren läßt, treten die von Bos zu Recht diagnostizierten zwei Wege der Begründung auf neue Weise zueinander in Beziehung: Die klassische, an Archimedes orientierte Argumentationsweise wäre dann noch orientiert an einer vor-operativen, und d.h. referentiellen Symbolkonzeption. Mit ihr machte Leibniz ein Zugeständnis an die herrschenden Auffassungen seiner Zeitgenossen. Die auf das Kontinuitätsgesetz zurückgreifende Argumentation markierte demgegenüber Leibnizens eigentliche Grundlegung seiner Differentialrechnung. Mit ihr führte er eine operative Deutung der Differentialsymbolik ein.[7] Dies ist die Hypothese, welche die folgenden Überlegungen plausibel zu machen versuchen.

1. Kalkülisierung und operativer Symbolgebrauch

Der Aufschwung der Infinitesimalmathematik in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts, welcher mit den Namen Roberval[8], Fermat[9], Barrow[10], Cavalieri[11], Wallis[12], Pascal[13] und Huygens[14] verbunden ist, geht zurück auf die Entwicklung spezieller Verfahren für Probleme wie die Geschwindigkeitsbestimmung, die Tangentenbestimmung, die Extremwertbestimmung und die Flächen- und Volumenbestimmung. *Partikulare* Lösungsansätze werden entwickelt, ohne daß ein Zusammenhang zwischen den einzelnen Verfahren in Form einer einheitlichen *allgemeinen* Methode entdeckt worden wäre. Eben dieser Zusammenhang wird in Newtons Fluxionsrechnung[15] und in Leibnizens Differentialrechnung[16] hergestellt.[17] Von allen früheren Formen infinitesimaler Mathematik unterscheiden sich Newtons und Leibnizens Verfahren dadurch, daß es sich (1) um eine *universale* Methodik handelt und daß (2) diese Methode *algorithmischen* Charakter trägt. Bei Leibniz nun tritt noch ein weiteres Merkmal hinzu, welches die spezifische Physiognomie seines Verfahrens sowohl gegenüber seinen Vorgängern in der Infinitesimalmathematik wie auch gegenüber Newton selbst charakterisiert: Es ist dies (3) die *Kalkülisierung* des infinitesimalen Rechnens.

Einem ersten Blick erscheint diese Kalkülisierung eine Vervollkommnung der Notationsweise: Für das Differential wird ein eigenständiges Symbol eingeführt, so daß die undifferenzierte Größe x von ihrer ersten Ableitung dx eindeutig unterschieden werden kann. Zudem sind die Ordnungen der Ableitungen ihren symbolischen Repräsentanten – dx, d^2x, d^3x – unmittelbar ablesbar.[18]

Beim genaueren Hinsehen allerdings zeigt sich, daß hier mehr geschieht, als die bloße Vervollkommnung einer Notation. Vielmehr erhält die Symbolsprache eine neuartige Funktion: Leibniz konzipiert seinen Differentialsymbolismus nicht einfach als ein *referentielles*, sondern als ein *operatives* Medium. Markantes Signum dieser Funktionsverlagerung der Symbolsprache ist die Verdrängung der geometrischen Figur durch die Formel: Auf der Suche nach einer Methode, mit der geometrische Probleme der Kurvenquadratur und der Tangentenbestimmung gelöst werden können, gelangt Leibniz zu einem Verfahren, das ausschließlich mit typographischen Zeichenausdrücken arbeitet.[19] Folgende „regulae calculi" stellt Leibniz auf:

(1) Wenn $a = \text{const.}$, so $da = 0$
(2) Wenn $a = \text{const.}$, so $d(ax) = adx$
(3) Wenn $y = v$, so $dy = dv$
(4) $d(z-y+w+x) = dz-dy+dw+dx$
(5) $d(xv) = xdv+vdx$
(6) $d\,\frac{v}{y} = \frac{xdy - ydx}{y^2}$
(7) $d(x^a) = a\,x^{a-1}dx$
(8) $d(\sqrt[b]{x^a}) = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$
(9) $d\left(\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}\right) = \frac{-bdx}{a\sqrt[b]{x^{b-a}}}$

Leibniz fährt dann fort: „Et cognitio hoc velut Algorithmos, ut ita dicam calculi hujus, quem voco differentialem, omnes aliae aequationes differentiales inveniri possunt per calculum communem…"[20] Obwohl Leibniz gerade in seinen frühen Veröffentlichungen häufig um eine geometrische Interpretation seines Calculus bemüht ist, hat er Rechenregeln für das Differenzieren von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten und Potenzfunktionen aufgestellt, in denen er lehrt, wie das Differential gewisser analytischer Kombinationen sich zu den Differentialen der Komponenten verhält und in denen er sich ausschließlich bezieht auf die Bildung und Umbildung formaler Zeichenreihen, nicht aber mehr auf die Gegenstände, für welche die Zeichen eigentlich stehen, auf ihre Bedeutung also.[21] Geometrische Bezüge dienen Leibniz lediglich zur Illustrierung algebraischer Sachverhalte; für den Gedankengang der Differentialanalysis fällt ihnen keine konstitutive Rolle zu. Die für die Analysis des beginnenden 18. Jahrhunderts so typische Verlagerung des mathematischen Interesses vom Studium der Kurven zum Studium der Formeln und die damit einhergehende Trennung der Analysis von der Geometrie, wird durch die Leibnizsche Kalkülisierung der Infinitesimalmathematik auf den Weg gebracht.

Die Grundidee dieser Kalkülisierung ist es, daß die Kontrolle über die Richtigkeit der mathematischen Operation unabhängig wird von der inhaltlichen Deutung der Infinitesimalsymbole. Im Sinne dieses deutungsfreien Operierens mit symbolischen Ausdrücken ist es zu verstehen, daß Leibniz seine ursprünglich geometrischen Interpretationen der Differentiale nach und nach fallen ließ; Newton hat demgegenüber an der quasi-mechanischen Deutung der Fluxionen stets festgehalten.[22] In diesem Sinne auch ist Leibnizens Rede zu verstehen, daß die Gegenstände der Mathematik von metaphysischen Kontroversen nicht abhängig zu machen seien. Darauf wird zurückzukommen sein.[23]

Die Unabhängigkeit der Korrektheit des Verfahrens von der Deutung der Symbole heißt also, die Unabhängigkeit zu wahren von der Beantwortung der Frage, ob infinitesimale Größen als mathematische Gegenstände tatsächlich existieren. Im Kalkül wird der symbolische Ausdruck zum eigentlichen Gegenstand des mathematischen Tuns.

Für Leibniz hat der Begriff „calculus" eine die Mathematik überschreitende Bedeutung:[24] „Calculus ... constitit in relationem productione facta per transmutationes formularum, secundum leges quasdam praescriptas factas."[25] Wo immer es gelänge, ein System typographischer Zeichen, die „characteres", sowie Formations- und Transformationsregeln zur Bildung regelgerechter Zeichenausdrücke zu etablieren, und wo immer es möglich wäre Zeichen derart zu bilden und zu ordnen, daß sie Gedanken darstellen,[26] da könnten „... veritates rationis velut calculo quodam, ut in Arithmetica Algebraque, ita in omni alia materia quatenus ratiocinationi subjecta est, consequi liceret."[27] Wahrheit wird so zurückführbar auf Richtigkeit. Dies ist die epistemische Rolle, die Leibniz der Kalkülisierung zuweist.

Den Infinitesimalkalkül als ein operatives Medium zu charakterisieren heißt also, daß die Effektivität und Kontrolle des mathematischen Verfahrens von der inhaltlichen Deutung der Symbole, von ihrer Referenzfunktion also, unabhängig gemacht wird.

2. Das „referentielle Mißverständnis" in der Rezeption des Leibnizschen Infinitesimalkalküls

Positive Aufnahme fand der Leibnizsche Differentialkalkül bei Jakob und Johann Bernoulli,[28] sowie dem Schüler Johann Bernoullis, dem Marquis de l'Hospital.[29] Doch ging deren Rezeption einher mit schwerwiegenden Mißverständnissen. 1691/92 verfaßt Johann Bernoulli einen Kursus über Differentialrechnung, in welchem er das folgende Postulat aufstellt: „Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleine Größe, wird weder vermindert noch vermehrt."[30] Dieses Postulat übernahm l'Hospital 1696 in die erste Monographie, die über die Infinitesimalrechnung erschien.[31] Der paradoxe Charakter solcher Formulierung liegt auf der Hand: dx wird als eine konstante, fixierte Größe gefaßt, die kleiner als jede positive Größe und zugleich von Null verschieden ist. Wird die unendlich kleine Größe nicht gleich Null gesetzt, ergibt sich ein logischer Widerspruch. Wird sie gleich Null gesetzt, so entsteht die Frage, was für einen Sinn die Division von Nullgrößen haben kann, z.B. bei der Aufstellung des Differentialquotienten dx/dy.

Worauf es für uns ankommt ist, daß diese referentielle Interpretation der Differentiale in der Annahme eines aktual Unendlichen resultiert. In einem am 7. 1. 1699 an Leibniz gerichteten Brief versucht Johann Bernoulli die aktuale, reale Existenz des Unendlichen mit der folgenden Argumentation zu verteidigen:[32] Eine endliche Strecke könne in Abschnitte unterteilt werden entsprechend den Gliedern der unendlichen Reihe 1/2, 1/3, 1/4, 1/8... Die aktuale Existenz des unendlich Kleinen folge nun daraus, daß ein unendlichstes Glied dieser Reihe gegeben sein müsse. Dessen Existenz könne so bewiesen werden: Wenn zehn Glieder einer Reihe gegeben sind, so auch ein zehntes, wenn hundert, so auch ein hundertstes, wenn tausend, so auch ein tausendstes; wenn unendlich viele Glieder gegeben sind, „existit infinitesimus".

Leibnizens Konzeption des Infinitesimalen wird uns später beschäftigen. Doch sei seine Zurückweisung der Argumentation Bernoullis zumindest erwähnt: „... argumentum de finito ad infinitum hic non valere: et cum dicitur dari infinita, non dicitur dari eorum numerum terminatum, sed dari plura quovis numero terminato".[33]

Angesichts der logischen Schwierigkeiten und der inkonsistenten Argumentation, in denen sich die frühen Verfechter der Infinitesimalmathematik verfingen, wundert es nicht, daß kritische Stimmen sich erhoben. In den Niederlanden widersetzt sich Bernard Nieuwentijt,[34] in England George Berkeley[35] der infinitesimalen Analysis.

Bezeichnend nun ist, daß die Kritiker mit den Verfechtern des Differentialkalküls dessen denotative Interpretation teilen: Akzeptanz oder Verwerfung des Differentialkalküls ist in jedem Falle daran gebunden, daß die Existenz eines mathematischen Gegenstandes nachgewiesen werden kann, der als Referenzgegenstand des Differenzialsymbols einsichtig gemacht werden kann, und dem die Eigenschaft zuzusprechen ist, unendlich klein zu sein.

Für Nieuwentijt hat die Mathematik ein ontologisches Fundament: Es existiert also eine Entsprechung zwischen Ausdrücken des Kalküls und empirischen Gegenständen.[36] Die Bildung von Infinitesimalen erster Ordnung findet ihr empirisches Gegenstück in jenen unendlich kleinen Teilen, zu denen zu gelangen sei, wenn ein endlicher Gegenstand unbegrenzt oft unterteilt werde. In der Perspektive dieses „ontologischen Gegenstücks" interpretiert Nieuwentijt die Ableitung von Differentialen erster Ordnung so, daß eine gegebene endliche Größe b dividiert werde durch die unendliche Größe m, so daß aus dieser Division die unendlich kleine Größe b/m resultiere.[37] Seine Kritik an Leibniz setzt erst da an, wo Leibniz von der unbegrenzten Wiederholbarkeit der Operation des Differenzierens ausgeht, also zu Differentialen höherer Ordnung gelangt. Für Nieuwentijt ist die Annahme von Differentialen höherer Ordnung kontradiktorisch, hieße dies doch zwei infinitesimale Größen so zu verknüpfen, daß eine Größe resultiere, die noch unendlich kleiner sei, als die schon unendlich kleinen Ausgangsgrößen.[38] Infinitesimale Größen, die – miteinander verknüpft – nicht zu finiten Größen führen, seien gleich Null anzusehen.[39]

Für Nieuwentijt setzt das Operieren mit den Infinitesimalsymbolen voraus, jeweils zu vergegenwärtigen, welche „wirkliche" Handlung mit real existierenden Größen dem entspreche. In dieser realistischen Interpretation macht zwar die Möglichkeit einen endlichen Gegenstand unbegrenzt oft unterteilen zu können, Sinn; nicht jedoch die Ableitung von Größen, die dadurch entstehen, daß aus bereits unendlich kleinen Größen noch unendlich kleinere gebildet würden.

Berkeleys Kritik ist radikaler angesetzt.[40] Sie bezieht sich auf die Annahme infinitesimaler Größen überhaupt. Den Infinitesimalmathematikern bescheinigt Berkeley einen „inconsistent way of arguing".[41]

Zwar könnten symbolische Ausdrücke für Fluxionen und Infinitesimale erster, zweiter, dritter etc. Ordnung beliebig hingeschrieben werden. Doch sobald in Augenschein genommen werde, worauf solche Ausdrücke eigentlich referierten und „the things themselves which are supposed to be expressed and marked by" betrachtet werden, bleibe nichts als „emptiness, darkness and confusion; nay if I mistake not direct impossibility and contradiction".[42]

Berkeley bekennt sich explizit zum Standpunkt einer denotativen Interpretation der Infinitesimalsymbolik: "I admit that signs may be made to denote either any thing or nothing; and consequently that in the original notation x + 0, 0 might have signified either an increment or nothing. But then which of these soever you make it signify, you must argue consistently with its signification, and not proceed a double meaning: Which to do were a manifest sophism."[43]

Mit seiner Kritik an der inkonsistenten denotativen Verwendung der Infinitesimalsymbolik trifft Berkeley im „Negativabdruck" den Nerv des infinitesimalen Verfahrens, so wie Leibniz es konzipierte. Die Kalkülisierung des Verfahrens heißt für Leibniz gerade, daß die Konsistenz der mathematischen Operation unabhängig geworden ist, von der extrasymbolischen Deutung derselben. Und Berkeley erahnt den Kunstgriff der Kalkülisierung, Wahrheit auf Richtigkeit zurückzuführen, wenn er kritisch bemerkt, daß „the usefulness of a rule (is confused) with the certainty of a truth and accept one for the other".[44] Berkeley spricht hier aus, was für Leibniz als die eigentliche Auszeichnung eines kalkülisierten Verfahrens gilt. Pointiert gesprochen: daß gerechnet werden kann und nicht nachgedacht zu werden braucht. So bemerkt Berkeley: "Such disciples may to save themselves the trouble of thinking... (that) men are accustomed rather to compute than to think."[45]

In der Leibnizschen Differentialrechnung kulminiert eine für die neuzeitliche Mathematik charakteristische Entwicklung, bei der die *Problemlösungskompetenz* abgekoppelt wird von der *Begründungskompetenz*, bei der also das „Richtig-Rechnen-Können" unabhängig wird vom Wissen, womit eigentlich gerechnet werde und wie die Rechenregeln zu begründen seien. Ein Sachverhalt, der für das alltägliche Rechnen im dezimalen Positionssystem, welches sich im Europa des 14. und 15. Jahrhunderts durchsetzte, immer schon galt.[46] Berkeley hat erkannt, daß dieser „rechenhafte" Umgang mit den mathematischen Gegenständen, nun übergreift auf die höhere Analysis: "The rules may be practised by men who neither attend to, nor perhaps know the principles ... and as any ordinary man may solve divers numerical questions by the vulgar rules and operations of arithmetic, which he performs and applies without knowing the reason of them: Even so... you may operate, compute and solve problems thereby, not only without an acutal attention to, or an actual knowledge of the grounds of method."[47]

Die für Leibniz wie vor ihm schon für Descartes so charakteristische Aufhebung der traditionellen Scheidelinie von technē und epistēmē, von ars und scientia,[48] wird von Berkeley noch einmal grundsätzlich verteidigt. Konsequenz ist, daß Berkeley die Analysis aus dem Kanon der Wissenschaften verbannen muß: „... although you may pass for an artist, computist, or analyst, yet you may not be justly esteemed a man of science and demonstration".[49]

In der Folge von Berkeleys Kritik läßt Newton – diese Auffassung vertritt zumindest Juškevič – die „unendlich kleinen Größen" fallen und schließt sie aus der Analysis aus, indem er alle Probleme mit Hilfe der Theorie des Grenzüberganges zu lösen sucht.[50] Nicht so Leibniz, dessen Differentialrechnung sich von Newtons Fluxionsrechnung immer schon dadurch unterschied, daß die mathematische Korrektheit der kalkülisierten Operation unabhängig von ihrer extrasymbolischen Deutung gewährleistet ist.

Gleichwohl finden sich bei Leibniz eine Vielzahl von Überlegungen zur Interpretation der Infinitesimalsymbolik, zumeist im Zusammenhang von Versuchen der Rechtfertigung der infinitesimalen Verfahren. Zwei Argumentationsstränge kristallisieren sich dabei aus. Einerseits argumentiert Leibniz im Rahmen einer referentiellen Interpretation der Differentialsymbole. Andererseits argumentiert Leibniz mit dem Gesetz der Kontinuität und gelangt dabei zu einer operativen Deutung des Infinitesimalsymbolismus.[51]

Was ich nun zeigen möchte ist, daß diese beiden Argumentationsweisen keine gleichberechtigten Möglichkeiten einer Begründung des Differentialkalküls innerhalb des Leibnizschen Œuvres bilden. Vielmehr greift Leibniz auf nicht-archimedische Größen zurück, sofern er sich einläßt auf die Argumente seiner zeitgenössischen Anhänger und Kritiker und der von ihnen wie selbstverständlich vorausgesetzten referentiellen Deutung des Infinitesimalsymbolismus. Demgegenüber bildet die auf das Kontinuitätsgesetz zurückgreifende Argumentation mit ihrer operativen Deutung das Herzstück von Leibnizens eigentlicher Grundlegung.

3. Differentiale als nicht-archimedische Größen

Überlegungen, die Leibniz selbst als „du stile d'Archimede" kennzeichnet, finden sich vor allem in drei Texten:

(1) 1695 publiziert Leibniz in den Acta Eruditorum einen Text, in welchem er sich mit den Auffassungen Nieuwentijts auseinandersetzt.[52] Leibniz wiederholt hier Nieuwentijts Aussage, daß nur solche Größen gleich seien, deren Differenz Null ist, und setzt dem entgegen: „Caeterum aequalia esse puto, non tantum quorum differentia est omnio nulla, sed et quorum differentia est imcomparabiliter parva."[53] Er gibt das Beispiel einer unvergleichlich kleinen Strecke, welche, einer anderen Strecke hinzugefügt, deren Größe nicht verlängere – so wie auch die Anfügung eines Punktes an eine Strecke deren Ausdehnung nicht größer mache – und fährt dann fort: „Nec ulla constructione tale augmentum exhiberi potest. Scilicet eas tantum homogeneas quantitates comparabiles esse, cum Euclide lib. 5 def. 5 censeo, quarum una numero, sed finito multiplicata, alteram superare potest. Et quae tali quantitate non differunt, aequalia esse statuo, quod Archimedes sumpsit, aliique post ipsum omnes. Et hoc ipsum est, quod dicitur differentiam esse data quavis minorem."[54]

(2) 1701 verfaßt Leibniz einen für das Journal de Trevoux bestimmten Artikel, in dem er sich nicht mit den Kritikern, wohl aber mit seinen Anhängern auseinandersetzt.[55] Er bezieht sich darin auf eine Veröffentlichung Johann Bernoullis in eben diesem Journal über den „calcul des differences" sowie auf ein Buch des Marquis de l'Hospital über die Infinitesimalrechnung. In diesem Buch postulierte l'Hospital im Anschluß an Johann Bernoulli unendlich kleine Größen, die, endlichen Größen hinzugefügt, diese weder vermindern noch vermehren. Dazu äußert Leibniz sich nun auf folgende Weise:[56] Es sei nicht nötig, das Unendliche hier in aller Strenge zu verstehen, sondern nur so, wie man z.B. in der Optik davon spreche, daß die Strahlen der Sonne von einem unendlich weit entfernten Punkte kämen, sie zugleich aber als parallel behandelt werden. Es gebe mehrere Grade des unendlich Kleinen. So sei die Erdkugel im Verhältnis zum Fixsternhimmel und sei ein Ball im Verhältnis zur Erdkugel nur ein Punkt derart, daß die Entfernung der Fixsterne eine „infiniment infini ou infini de l'infini" sei im Verhältnis zum Durchmesser des Balles.[57] Den Sinn dieser Analogie verdeutlicht Leibniz mit den Worten: «Car au lieu de l'infiniment petit, on prend

des quantites aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donée, de sorte, qu'on ne diffère du stile d'archimede que dans les expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer.»[58]

(3) In einem undatierten Manuskript,[59] welches erst 1846 durch Gerhard publiziert wurde, rechtfertigt Leibniz seinen Calculus mit explizitem Bezug auf Nieuwentijt. Hier argumentiert Leibniz mit undefinierbaren Größen, die er so einführt: Es werde hilfreich sein, wenn immer wir von unendlich großen oder unendlich kleinen Größen sprechen, dies so zu verstehen, daß wir damit Größen meinen, die undefinierbar groß und undefinierbar klein seien, so groß oder so klein also, wie man wolle, so daß der Fehler, den irgendjemand feststellen könne, kleiner sei als jede gegebene Größe.

Die Unvergleichbarkeit bzw. Undefinierbarkeit seiner infinitesimalen Größen charakterisiert Leibniz in den Termini einer nicht-archimedischen Eigenschaft. Diese nicht-archimedischen Größen hatte Leibniz in einem Brief an l'Hospital vom 14. 6. 1695[60] ähnlich wie in der anderen 1695 publizierten Antwort auf Nieuwentijt so definiert, daß eine Größe als unvergleichbar bzw. undefinierbar im Verhältnis zu einer anderen gelte, wenn diese Größe multipliziert mit einer endlichen Zahl kleiner sei als jede angebbare Zahl.[61]

Kein Zweifel: Mit seiner wiederholten Rede von nicht-archimedischen Größen weist Leibniz die Annahme eines aktual Unendlichen zurück zugunsten einer Auffassung, der das unendlich Kleine im Prinzip als eine endliche Größe gilt, die lediglich in Relation zu sehr großen Größen zu behandeln ist, als ob sie unendlich klein sei, da der Fehler, der bei dieser Behandlung entsteht, kleiner ist, als daß er noch irgendeine Rolle spielen könnte.[62] Mit solcher Argumentation verbleibt Leibniz in den Grenzen eines referentiellen Symbolismus: Das Symbol für das Differential bzw. den Differentialquotienten steht für eine vorgegebene, bestimmte, endliche Größe.

Nun fällt auf, daß es nirgendwo im Œuvre Leibnizens einen Versuch gibt, die infinitesimalen Rechnungen auf nicht-archimedischen Größen aufzubauen. Zwar bezog sich A. Robinson, der in den sechziger Jahren eine nicht-klassische Theorie der unendlich kleinen Größen im Rahmen seiner „Non-Standard-Analysis“ entwickelte, auf archimedisch nicht vergleichbare Größen, die dennoch allen Anforderungen mathematischer Strenge genügten.[63] Auch vermutete Robinson in Leibniz einen Vorläufer seiner Theorie[64] – doch konnten Bos[65] wie auch Earman[66] deutlich machen, daß mit Robinsons Anspruch, durch die Non-Standard-Analysis könnten „Leibniz ideas … fully be vindicated",[67] essentielle Differenzen zwischen dem Leibnizschen Calculus und modernen nicht-klassischen Theorien übersehen werden.[68] Diese Differenzen können unser Gegenstand nicht sein.

Hier kann gegen die Vereinnahmung von Leibniz als einem Wegbereiter einer Infinitesimalmathematik, die mit archimedisch nicht vergleichbaren Größen operiert, nur zu bedenken gegeben werden, daß für Leibniz selbst die Bezugnahme auf „unvergleichlich kleine" bzw. „undefinierbare" Größen keineswegs das Zentrum seiner Überlegungen zu den Grundlagen des Differentialkalküls bildet.

4. Die Relativierung der Argumentation mit nicht-archimedischen Größen

Der Bezug auf nicht-archimedische Größen setzt die Existenz, das wirkliche Gegebensein dieser Art von Größen voraus. Doch im Leibnizschen Œuvre, anders als in der Non-Standard-Analysis, findet sich ein solcher Existenzbeweis nicht. So drängt die Annahme sich auf, daß die Argumentation mit nicht-archimedischen Größen ein Zugeständnis sein könnte an die herrschende Auffassung eines denotativ zu interpretierenden mathematischen Symbolismus. Eine Auffassung, welche umso eher bereit ist, den Differentialkalül zu akzeptieren, wie es gelingt zu zeigen, daß die Symbole dieses Kalküls für bestimmte Größen stehen. So kann Leibniz die für die Brüder Bernoulli wie für l'Hospital so selbstverständliche Annahme eines aktual Unendlichen revidieren, ohne doch zugleich deren symboltheoretische Grundannahme erschüttern zu müssen: Mit der Erklärung durch nicht-archimedische Größen bleibt die Annahme, daß die Differentialsymbole Stellvertreter sind für fixierte, gegebene Größen unangetastet. Und Leibniz kann die für Nieuwentijt und später Berkeley konstitutive Position, das Infinitesimale als eine wohlbestimmte Größe einzuführen, mit der konsistent zu rechnen heißt, sie entweder als gleich oder als größer als Null zu bestimmen, durch die Einführung nicht-archimedischer Größen korrigieren, ohne doch den symboltheoretischen Konsens, zu rechnen sei nur mit Zeichen, die auf bestimmte Größen referieren, in Frage stellen zu müssen. Leibnizens Bezugnahme auf nicht-archimedische Größen kann als ein Versuch interpretiert werden, *von dem aktual Unendlichen Abstand zu nehmen, ohne dabei zugleich den Rahmen eines referentiellen Symbolismus sprengen zu müssen.*

Bestärkt wird diese Vermutung dadurch, daß Leibniz selbst seine Redeweise in den Termini von nicht-archimedischen Größen eingeschränkt hat. Schon in dem erst 1846 publizierten Manuskript „Cum prodiisset" gesteht Leibniz zwar zu, daß von undefinierbar großen oder kleinen Größen gesprochen werden könne, doch berühre solche Interpretation nicht den vorteilhaften Gebrauch dieser Größen im Kalkül, welchen er in Analogie sehe zum Gebrauch imaginärer Wurzeln in der Algebra.[69] Leibniz unterscheidet in diesem Text zwischen der Effizienz des Verfahrens und seiner denotativen Interpretation. Letztere wird relativiert, nicht indem Leibniz eine alternative, nicht-denotative Deutung für möglich hält, sondern weil er die Rolle der Deutung des Infinitesimalsymbolismus überhaupt relativiert, da sie bedeutungslos bleibe für die Praxis des Kalküls.

Doch ist uns ein Brief vom 2.2.1702 an Pierre Varignon überliefert,[70] in welchem Leibniz die Argumentation mit nicht-archimedischen Größen als ein Zugeständnis an die „Allgemeinverständlichkeit" charakterisiert: „... mon dessein a esté de marquer qu'on n'a point besoin de faire deprendre l'analyse Mathematique des controverses metaphysiques, ny d'asseurer qu'il y a dans la nature lignes infiniment petites à la rigeur..." und fährt dann fort: «C'est pourquoy à fin d'eviter ces subtilités, j'ay cru que pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde, il suffisoit d'expliquer icy l'infini par l'incomparablement, c'est à dire de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que le nostres.»[71] Es geht also um das *Vermeiden* subtiler Erörterungen, um die Wahrung von *Allgemeinverständlichkeit*, so daß es *genüge* von unvergleichlich kleinen Größen zu sprechen.

Im gleichen Brief charakterisiert Leibniz das Diktum von den unvergleichbaren Größen auch als eine Redeweise, die zur „Abkürzung" – à abreger – dafür diene, daß diese Größen unbegrenzter Verminderung fähig seien und betont, „que les incomparables communs memes n'estant nullement fixes ou determinés, et pouvant estre pris aussi petits qu'on veut... estant en nostre pouvoir tant qu'on peut tousjours prendre une grandeur aussi petite qu'on veut." Und Leibniz fügt hinzu: „...

et c'est sans doute en cela que consiste la demonstration rigoureuse du calcul infinitesimal..."[72] Da hier von einem „strengen Beweis" gesprochen wird, lohnt es, nach weiteren Textstellen zu forschen, die belegen können, wie diese „unbegrenzte Verminderung" gemeint ist.

In einem Text von 1710[73] führt Leibniz aus, daß die Größe dx selbst nicht immer konstant sei, sondern gemeinhin sich kontinuierlich vermehre oder vermindere.[74] Und in einem Brief an den Freiherrn von Bodenhausen schreibt Leibniz: „Es ist gantz nicht nötigh ad summandum, dass die dx oder dy constantes und die ddx = 0 seyen, sondern man assumiret die progression der x und y" und erklärt später die Annahme, daß dx und dy unendlich klein seien damit, daß den Termen der Reihe jeweils Linien entsprächen, die sich kontinuierlich vergrößerten bzw. vermehrten.[75]

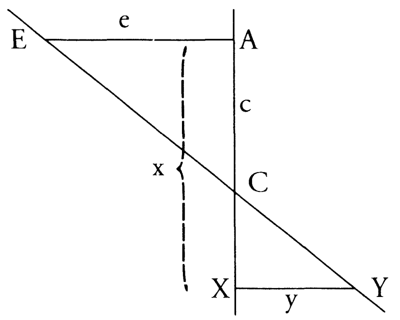
Aus diesen Textstellen dürfen wir folgern, daß die Differentiale als *veränderliche* Größen gelten, die ihrerseits abhängen von anderen veränderlichen Größen und deren Abhängigkeit untersucht wird in den Termini von Differentialgleichungen. Hermann Cohen machte erstmals darauf aufmerksam, daß die infinitesimalen Größen kontinuierlich zu- und abnehmen;[76] und Cassirer hat, auf Cohen aufbauend, diese Idee ins Zentrum seiner Interpretation der Leibnizschen Infinitesimalmathematik gestellt.[77]

Gleichwohl fand dieser Gedanke in der kommentierenden Leibniz-Literatur außerhalb der Marburger Schule keine Aufnahme[78], und erst der Mathematikhistoriker Bos hat den Variablencharakter der Differentiale in den Mittelpunkt seiner Rekonstruktion der Leibnizschen Differentialrechnung gestellt.[79]

5. Die operative Deutung der Infinitesimalsymbolik

Die Differentiale als sich kontinuierlich verändernde Größen zu erklären, wahrt den Standpunkt eines referentiellen Symbolismus, in welchem das Differential so interpretiert wird, daß es für eine gegebene – wenn auch fließende, veränderliche – Größe stehe. Quer zu solcher Ansicht liegt Leibnizens Charakterisierung der Differentiale als „ideale Begriffe",[80] als „Fiktionen"[81] oder gar als imaginäre bzw. fingierte Größen, Beschreibungen, für die sich eine Fülle von Belegen finden lassen. Wie aber ist die Eigenschaft der Differentialsymbole auf veränderliche, jedoch gegebene Größen zu referieren, vereinbar mit ihrer Eigenschaft, für bloß ideale, fiktive, imaginierte Gegenstände zu stehen? Hier könnte eine operative Interpretation des Differentialsymbolismus den Weg weisen, kraft derer es möglich wird zu unterscheiden zwischen einer gewissen *Vorschrift*, die idealen Charakter hat, insofern sie das idealisierte Schema einer methodischen Handlung abgibt, und dem *Resultat*, welches entsteht, wenn die Vorschrift umgesetzt wird und solche Umsetzung z.B. als eine kontinuierlich sich verändernde Größe beschrieben werden kann.

Einen ersten Hinweis auf eine operative Deutung können wir einem Text entnehmen, der mit „justification du calcul des infinitesimales" betitelt ist,[82] und in dem sich die folgende Zeichnung findet:



Angenommen wird, daß der Winkel ECA nicht gleich 45° sein soll. Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke ergibt sich

$$(x - c)/y = c/e$$

Nimmt man an, daß die Gerade EY sich parallel zu sich selbst verschiebt in Richtung auf a, jedoch der variable Punkt C immer denselben Winkel mit AX bildet, so werden die Strecken c und e immer kleiner, doch bleibt ihr Verhältnis konstant. Geht EY durch den Punkt A hindurch, verschwinden c und e. Die Gleichung

$$(x - c)/y = c/e$$

gestaltet sich um zu:

(1)	vor der „Grenze":	$x - c_0/y_0 = c_0/e_0$
(2)	in der „Grenze"[83]:	$x - y_\infty \;= c_0/e_0$

Leibniz kommentiert: «Donc c et e dans ce calcul d'Algebre ne sont prises pour rien que comparativement par rapport à x et y, mais cependant c et e ont du rapport l'une à l'autre.»[84] „Algebraisches Verhältnis" aber heißt hier nichts anderes, als die funktionelle Abhängigkeit zwischen den veränderlichen Größen c und e, gemäß der Vorschrift, daß der Winkel ECA konstant und von 45° verschieden bleibt, so daß die funktionelle Zuordnung von c und e ausgedrückt werden kann durch die Bedingung $c > e$. Der Ausdruck c/e ist also nicht als ein Symbol für eine bestimmte Größe zu interpretieren, sondern ist eine Vorschrift, eine Operationsanleitung, welche festlegt, daß wie auch immer c/e sich verändere, stets die Relation $c > e$ gewahrt bleiben muß. Leibniz betont in diesem Text, daß dies auch für die Differentiale gelte.[85]

Wir können daraus schließen, daß das Symbol für den Differentialquotienten nicht für eine, wenn auch noch so kleine, jedoch gegebene Größe stehe, sondern eine Operationsanleitung darstellt: Dieses Symbol fungiert weniger als ein referentielles, denn als ein operatives Symbol.[86] Eine Auffassung, die sich bisher einzig bei Ernst Cassirer ausgesprochen findet, der die operative Deutung zum Angelpunkt seiner Interpretation des Leibnizschen Differentialkalküls machte: „Das Differential verhält sich zur Größe... wie eine methodische Operation zu ihrem Ergebnis."[87] Das Symbol für den Differentialquotienten ist also kein Zeichen, das einen gegebenen Gegenstand be-schreibt, sondern eine funktionelle Abhängigkeit vor-schreibt.

Doch falls es sich so verhält, daß das Differential als eine Operationsanweisung aufzufassen ist, so besteht das eigentliche Problem darin, daß diese Operationsanweisung auch da noch ihre Geltung behält, wo sie augenscheinlich erlöschen muß. Auf Leibnizens Beispiel bezogen: Die vorgeschriebene funktionelle Abhängigkeit $c > e$ ist auch da noch zu bewahren, wo die Ausdehnung dieser Strecken gegen Null strebt und sie also in einem Punkte zusammenfallen. Der Gedanke, daß „im Grenzfall" sich Eigenschaften dessen, wovon etwas Grenzfall ist, bewahren, nennt Leibniz das Gesetz der Kontinuität. Auf eben dieses Gesetz nimmt er in dem weiteren Text seiner Rechtfertigungsschrift auch Bezug. Gemäß dem „loy de la continuité"[88] kann z.B. die Gleichheit als Sonderfall der Ungleichheit, die Ruhe als Sonderfall der Bewegung, der Parallelismus als Sonderfall der Konvergenz zweier Geraden und der Kreis als Grenzfall eines regulären Vierecks mit unendlich vielen Seiten gelten.

Nun scheint die Verschiebung der Rechtfertigungsargumentation von rein algebraischen Überlegungen hin auf das Kontinuitätsgesetz kein zufälliges Abgleiten zu sein. Vielmehr bildet das Kontinuitätsgesetz das Fundament der Leibnizschen Differentialrechnung.[89]

6. Die Begründung der Differentialrechnung durch das Kontinuitätsgesetz

Schon in dem Manuskript „Cum prodiisset",[90] dem Entwurf zu einem Artikel, in welchem Leibniz die Regeln seines Differentialkalküls, die er in den Acta Eruditorum zunächst unbewiesen publizierte, zu beweisen versucht, bezieht Leibniz sich auf das Kontinuitätsgesetz in Gestalt des folgenden Postulats: „Propositio quocumque transitu continuo in aliquem terminum desinente liceat ratiocinationem communem instituere, qua ultimus terminus comprehendatur."[91] In diesem Manuskript gibt Leibniz mathematische Beweise für die Regeln der Addition, Subtraktion, Division, Multiplikation und für das Potenzieren im Differentialkalkül. Das Kontinuitätsgesetz spielt im Beweisgang insofern eine Rolle, als bei der geometrischen Veranschaulichung des rein rechnerischen Beweisganges Leibniz die Tangente als Grenzfall einer Sekante interpretiert. So kann er zeigen, daß die Regeln zum Operieren mit den Differentialsymbolen dx und dy, im Falle, daß $dx = 0$ ist, vollständig den korrekten Operationen mit den Symbolen (d)x und (d)y entsprechen, die für finite Größen stehen. Die mathematische Korrektheit der Beweise hat im einzelnen H.J. Bos aufgezeigt.[92] Für uns genügt, daß dieses Manuskript als ein Dokument dafür gelten kann, daß Leibniz auch in seiner strengen mathematischen Begründung des Differentialkalküls auf das Kontinuitätsgesetz zurückgreift.

Es lohnt, einen genaueren Blick auf Leibnizens Verständnis von „Kontinuität" zu werfen. 1687 verfaßt er einen Text über das Kontinuitätsgesetz,[93] in welchem er dieses als ein „principium ... ordinis generalis" kennzeichnet und so formuliert: „Wenn die Fälle sich kontinuierlich nähern, so daß letzten Endes der eine in den anderen übergeht, so muß das auch für die entsprechenden abhängigen Größen bzw. Ereignisse der Fall sein", und resümiert mit den Worten: „Einer geregelten Ordnung im Gegebenen entspricht eine geregelte Ordnung im Gesuchten."[94] Mit dieser Formulierung hat Leibniz die Bedingungen stetiger Funktionen aufgestellt. Doch wollen wir unser Augenmerk auf einen einfacheren Tatbestand lenken: Das Kontinuitätsgesetz wird als ein *Ordnungsgesetz* konzipiert. Wie aber ist „ordo" hier zu verstehen? Daß damit nicht einfach eine Ordnung im Sinne einer vorgegebenen Ordnung des Seienden gemeint sein muß, signalisiert Leibnizens Sprachgebrauch. Mit seiner Rede, daß „datis ordinis etiam quaesita sunt ordinata",[95] knüpft Leibniz unmittelbar an den algebraischen Sprachgebrauch an:[96] Der algebraischen „ars analytica" gilt „ordo" als die methodisch geleitete Kunst, Gleichungen auf eine Form zu bringen, in welcher das Quaesitum aus den Bedingungen der Data vollständig hergeleitet werden kann. Gleichwohl gibt Leibniz in dem 1687 verfaßten Text Beispiele für Kontinuität lediglich aus den Bereichen der Physik und Geometrie.

Nun ist uns durch die mathematikhistorische Forschung verbürgt, daß Leibniz zur Entdeckung des Differentialkalküls im Zusammenhang mit Überlegungen über unendliche Reihen gelangte.[97] Könnte es nicht sein, daß in diesen Überlegungen sich weitere Aufschlüsse finden ließen über das Kontinuitätsgesetz verstanden als ein Ordnungsprinzip? Bei der Berechnung der Quadratur eines Viertelkreises stieß Leibniz auf die Reihe für die Zahl $\pi/4$ und benutzte bei der Herleitung dieser Reihe Pascals Methode des „charakteristischen Dreiecks", eine Methode, welche Leibniz wiederum unmittelbar zum Aufbau seines Differentialkalküls anregt.[98] Schauen wir uns die von Leibniz entdeckte Reihe für die Quadratur des Viertelkreises an:

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - + \ldots$$

In diesem Rechnungsausdruck wird die Zahl $\pi/4$ durch eine unendliche Reihe aus den Reziproken der ungeraden Zahlen dargestellt. Leibnizens Interesse an dieser Reihe ist durch die Frage bestimmt, ob eine unendliche Reihe konvergent ist, d.h. ob sie einen endlichen Wert hat. Leibniz ist der erste Mathematiker, der ein Konvergenzkriterium aufstellt: Eine unendliche Reihe ist konvergent, d.h. hat eine endliche Summe, wenn der Wert der Glieder monoton abnimmt und die Reihe alterniert.[99] Daher kann eine konvergente Reihe als Definition derjenigen Zahl aufgefaßt werden, nach der sie konvergiert. Ein Ausdruck wie

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + - \ldots$$

kann daher als Definition der Zahl $\pi/4$ gelten.

Diese Definition hat den Charakter einer Erzeugungsvorschrift. Sie gibt an, wie $\pi/4$ durch ein streng determiniertes Verfahren zu bilden ist. „Streng determiniert" heißt dabei nur: Nach Ausführung jedes einzelnen Schrittes steht fest, wie der nächste Schritt auszuführen ist, nämlich als wiederholte Anwendung der Herstellungsvorschrift auf das Ausgangsresultat. Die Herstellungsvorschrift selbst, die Summenformel, ist mit endlich vielen Zeichen anzuschreiben; doch die Ausführung der Vorschrift ist ein nicht abbrechendes, ein „unendliches" Verfahren. Das „Unendliche" ist somit als ein potentiell Unendliches zu verstehen, genauer als die Möglichkeit, durch kontinuierliche Wiederanwendung einer Formel über jedes gegebene letzte Glied hinaus einen weiteren Term einer Reihe zu bilden.

Im Zusammenhang mit monoton zu- und abnehmenden Zahlenfolgen spricht Leibniz von einer „ordo naturalis";[100] doch erweist sich diese Ordnung weniger als die vorgegebene Ordnung von Dingen, denn als die Ordnung des Verfahrens zu ihrer regelgeleiteten Hervorbringung.

Unendlich konvergente Reihen werden also zum Beispiel dafür, daß Kontinuierlichkeit nicht einfach als vorgefundene Eigenschaft eines Gegenstandes gilt, sondern als Auszeichnung einer Handlung, mit der wir gewisse Klassen mathematischer Gegenstände erzeugen, z.B. Zahlen, die als Grenzwerte konvergenter Reihen gelten. So wird es verständlich, daß Leibniz in dem Brief an Varignon vom 2. 2. 1702 schreibt:[101] „...on peut dire en general que toute la continuité est une chose ideale et qu'il n'y a jamais rien dans la nature, qui ait des parties parfaitement uniformes, mais en recompense le reel ne laisse pas de so gouverner parfaitement par l'ideal et l'abstrait, et il se trouve que les regles du fini reussissent dans l'infini..." Der Terminus „Kontinuität" enthüllt so eine operative Dimension: Er gilt als eine Vorschrift, eine gewisse Ordnung beim unbegrenzten Ausführen einer Operation zu wahren und auf diese Weise die Ordnung der durch die Operation erzeugten Gegenstände zu verbürgen.

Doch ist damit der Erklärungswert infinitesimaler Reihenbildung für die Leibnizsche Auffassung von „Kontinuität" und „Unendlichkeit" noch keineswegs erschöpft. Denn es läßt sich zeigen, daß die iterativen Operationen, auf die „Kontinuität" sich bezieht, nicht einfach Handlungen sind zur Erzeugung von *Dingen*, vielmehr Handlungen sind zur Erzeugung von *Symbolen*.

Zwar haben sowohl Cohen wie Cassirer auf die grundlegende Bedeutung des Kontinuitätsprinzips für die Leibnizsche Behandlung des Infinitesimalen hingewiesen, und hat insbesondere Cassirer betont, daß für Leibniz sich „das Problem des Kontinuums in das Problem der Kontinuation" auflöst und somit „Stetigkeit zur Charakteristik nicht eines Dinges, sondern einer Entwicklung, nicht eines Begriffes, sondern eines Verfahrens wird".[102] Doch weder Cohen noch Cassirer haben der Tatsache Aufmerksamkeit geschenkt, daß das Vorbild eines kontinuierlichen Verfahrens für Leibniz gewonnen wird am Vorbild einer unbegrenzt fortsetzbaren Operation, mit welcher eine Reihe symbolischer Ausdrücke erzeugt wird.

Einen Hinweis darauf können wir Leibnizens Brief an Varignon entnehmen. Den Sinn mit dem unendlichen Kleinen zu operieren, auch wenn dieses nicht als reales Ding, sondern nur als idealer Begriff gelte, verdeutlicht er durch eine Analogie zum Gebrauch der imaginären Wurzeln. Über die imaginären Wurzeln führt er aus: «De plus comme les racines imaginaires ont leur fundamentum in re, de sorte que feu Mons. Hugens, lorsque je luy communiquay que

$$\sqrt[2]{1+\sqrt{-3}} + \sqrt[2]{1-\sqrt{-3}} = \sqrt[2]{6}$$

est egal à $\sqrt[2]{6}$, le trouva si admirable, qu'il me repondit, qu'il y a là dedans quelque chose qui nous est incompréhensible.»[103]

Auf den ersten Blick verweigern sich die Symbole, mit denen wir uns imaginäre Zahlen vergegenwärtigen, einer referentiellen Interpretation im Sinne des Stehens für eine wohlbestimmte Zahl: Das Quadrat jeder reellen Zahl – ob positiv oder negativ – ist positiv. Es gibt daher keine reelle Zahl, deren Quadrat z.B. –2 ist. Doch wird für imaginäre Zahlen eine eigene Symbolsprache eingeführt, so kann innerhalb derselben mit imaginären Zahlen wie mit reellen Zahlen gerechnet werden: Einzig die Multiplikationsregel ist zu verändern (allerdings so, daß die „normalen" Multiplikationen und alle anderen Rechenarten unveränderte Ergebnisse zeigen). An den imaginären Zahlen tritt nur besonders deutlich zu Tage, was für die Zahlen seit der Einführung des dezimalen Ziffernsystems implizit und seit Viète's Buchstabenalgebra explizit gilt: Rechnen heißt nicht einfach mit Zahlen operieren, wie etwa mit Anzahlen von Rechensteinen „hantiert" werden kann, sondern heißt, mit den symbolischen Repräsentanten der Zahlen regelgeleitet verfahren. Zahl ist, wofür ein Symbol und Regeln seiner korrekten Manipulation eingeführt werden kann.[104] Die Leibnizsche Analogie zwischen imaginären Zahlen und Differentialen legt den Blick dafür frei, daß auch die Differentiale mathematische Gegenstände sind, die wir uns nur noch mit Hilfe von Symbolen vergegenwärtigen können, mit denen auf regelhafte Weise verfahren werden kann. Gegenstände also deren „Existenz" allein verbürgt ist durch die Einführung operativ zu gebrauchender Symbole.

Nur in diesem Zusammenhang wird Leibnizens Aussage plausibel, die imaginären Wurzeln hätten, wie auch die infinitesimalen Zahlen, ein „fundamentum in re". Da Leibniz explizit ausschließt, daß es so etwas wie imaginäre Zahlen „in der Natur" bzw. als „reale Dinge" gebe,[105] kann dieses „fundamentum in re" nur so gedeutet werden, daß hier das Symbol selbst zum Gegenstand wird, mit dem gerechnet werden kann. Imaginäre Zahlen wie infinitesimale Größen verfügen über eine nur noch symbolisch vermittelte „Gegenständlichkeit".[106]

Der Kreis unserer Argumentation schließt sich. Der Ort der Hervorbringung nur noch symbolisch vermittelter „Gegenstände" ist der Kalkül. Hier auch ist der Ort, wo „Kontinuierlichkeit" und „Unendlichkeit" einen prozessualen und handlungsbezogenen Sinn erhalten. „Kontinuierlichkeit" heißt: Mit Hilfe eines begrenzten Vorrates an Zeichen und einer endlichen Herstellungsvorschrift können im Kalkül unendlich viele Zeichenkonfigurationen erzeugt werden. „Unendlichkeit" heißt: Zu jeder erreichten Zeichenkonfiguration kann durch iterative Anwendung der Kalkülregeln eine weitere Zeichenkonfiguration gewonnen werden.

Mit dem Gesetz der Kontinuität macht Leibniz die Grundidee der Kalkülisierung, welcher die technische *Effizienz* seiner Differentialrechnung geschuldet ist, auch zur Grundlage von dessen *Rechtfertigung*.

Anmerkungen

1 Boyer 1959, 210 ff.; Kline 1972, 389; Oberschelp 1969, 27; Slawkow-Christow 1972, 77; Struik 1980, Kap. IV; Whiteside 1960/62, 186.
2 Kline 1972, 387.
3 Exempl.: Boyer 1959, 210–13.
4 Juškevič 1969, 13–16.
5 Bos 1974/75, 53 ff.; Bos 1986, 117.
6 Bos 1974/75; Horvath 1986, 55 f. übernimmt Bos' Auffassung.

7 Schon Belaval 1986 spricht im Zusammenhang mit dem Differentialsymbolismus von „des signes opérationnels".
8 Roberval entwickelte Methoden, zu bestimmten Punkten einer Kurve die Tangente zu finden, vgl. Auger 1962; Walker 1932.
9 Fermat 1637 arbeitete eine Tangentenmethode zur Extremwertbestimmung aus; vgl. Duhamel 1864.
10 Auch Barrow 1670 arbeitete geometrische Methoden zur Tangentenbestimmung aus, die er von Rechnung möglichst frei zu halten trachtete; vgl. Child 1916.
11 Cavalieri 1635 entwickelte Galileis Gedanken über „Indivisiblen" – unter denen der kleinste Teil des Kontinuums verstanden wird – zu einer geometrischen Methode fort; vgl. Andersen 1985; dies. 1986; Giusti 1980; Wallner 1903.
12 John Wallis 1656 wendet die Analysis und Indivisiblenmethode, welche er nicht – wie Cavalieri – geometrisch, sondern arithmetisch auffaßte, auf Quadraturen und Kubaturen an; vgl. Scott 1938; Scriba 1966.
13 Pascal 1659 führte das kleine rechtwinklige Dreieck, dessen Hypothenuse mit der Tangente in einem Kreispunkt zusammenfällt, in die Betrachtung des Tangentenproblems ein; vgl. Genty 1784.
14 Huygens kam zu neuen Resultaten vor allem bei der Rektifikation der Kurven, bei Quadraturen und Konstruktionen der Enveloppen. Wesentlich ist, daß er zu all seinen Ergebnissen durch rein geometrische Überlegungen gelangte. Huygens erweist sich daher als der letzte bedeutende Vertreter der „klassischen Schule" der Infinitesimalmathematik, die an Archimedes orientiert ist und mit geometrischen Methoden arbeitet; vgl. Cekic 1977, 123. Daher auch sein Unverständnis gegenüber der algorithmischen Infinitesimalmethodik Leibnizens, obwohl Huygens den jungen Leibniz seit dessen Ankunft in Paris in jeder Hinsicht förderte; vgl. Hofmann 1949.
15 Newton 1704a; ders. 1704b; ders. 1711; ders. 1779; ders. 1927.
16 Die einschlägigen Texte finden sich in: GM IV 91–5, 95–6; GM V 127–7, 135–43, 220–26, 226–33, 266–9, 279–85, 301–6, 308–18, 320–26, 327–8, 377–82; GM VII 218–23; Gerhardt 1846, 32–38, 39–50; Briefwechsel 1899, 147–67.
17 Newton und Leibniz gelangen zu ihren Verfahren auf verschiedenen Wegen und jeweils unabhängig voneinander. Vgl. Gerhard 1848; Hofmann 1943; ders. 1949; Mahnke 1926; ders. 1932.
18 Zu weiteren Vorteilen der Leibnizschen Notationsweise vgl. Edwards 1979, 23 ff. Newton behandelte demgegenüber Bezeichnungsfragen gleichgültiger. Ursprünglich entwickelte er keine eigene Symbolik für die Differentiale. Anstelle der Leibnizschen dx, dy, dz standen bei ihm nur Kleinbuchstaben. Später führe er dann die Bezeichnungen x,y,z ein für die Fluxionen, $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ für die Fluxionen der Fluxionen, $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$ für die Ableitungen nächster Ordnung etc. Vgl. Perez de Laborda 1986, 256.
19 Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, Acta Eruditorum 1684: GM V 220–226.
In dieser frühesten Veröffentlichung über seine Infinitesimalrechnung gibt

Leibniz eine (geometrische) Definition des Differentials, die algebraisch so wiedergegeben werden kann: Das Differential einer von x abhängigen Veränderlichen v wird unter der Verwendung der Subtangente t mittels der Proportion „$dv : dx = v : v^2 + t^2$" definiert.

20 GM V 222: „Kennt man, wenn ich sagen soll, den obigen Algorithmus des Kalküls, den ich Differentialrechnung nenne, so lassen sich alle anderen Differentialgleichungen durch ein gemeinsames Rechnungsverfahren finden."

21 „Welche Bedeutung den Zeichen dx, dy, dz beizulegen ist, wird von Leibniz auffallend selten berührt... je mehr er von der Zuverlässigkeit seiner neuen Rechnung überzeugt wurde, umso laxer gewissermaßen und unbestimmter äußerte er sich über die Bedeutung der Differentiale", Gerhardt, in: GM V 217 f.

22 Juškevič 1969, 12 f.

23 „On n'a point besoin de faire dependre l'analyse mathématique des controverses métaphysiques", GM IV 91.

24 Zur Kalkülisierung als ein Charakteristikum neuzeitlicher Mathematik und zu ihrer epistemologischen Bedeutung für Leibniz vgl. Krämer 1991, 88–158.

25 GP VII 206: „Ein Kalkül... besteht in der Herstellung von Beziehungen, welche durch die Umwandlung von Formeln bewerkstelligt werden, wobei die Umwandlungen entsprechend gewiß vorgeschriebenen Gesetzen vollzogen werden."

26 Vgl. Bodemann 1889–95, 80 f.

27 GP VII 32: „... die Wahrheiten der Vernunft wie in der Arithmetik und Algebra so auch in jedem anderen Bereich ... gewissermaßen durch einen Kalkül erreicht werden."

28 Jakob Bernoulli (1654–1705) wurde durch das Studium der Werke von Wallis, Barrow und Leibniz auf die Infinitesimalmathematik aufmerksam, die er, seit er 1690 Leibniz den Begriff „Integral" vorgeschlagen hatte, durch Beiträge in den Acta Eruditorum fortbildete, s. Jakob Bernoulli 1690; ders. 1693; ders. 1694.
Johann Bernoulli (1667–1748) schrieb 1691/92 zwei Textbücher über den Differential- und Integralkalkül, die erst nach seinem Tode veröffentlicht wurden, s. Johann Bernoulli 1691/92, ders. 1924; vgl. auch: Hess/Nagel (Hg.) 1989.

29 L'Hospital 1696.

30 Bernoulli 1924, 11.

31 „Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes." Zu l'Hospitals „Analyse" vgl. Boyer 1946 und Coolidge 1949, 147–170.

32 GM III 563.

33 Brief vom 13.1.1699: GM III 566: „...die Schlußfolgerung vom Endlichen auf das Unendliche ist hier nicht gültig. Daß eine Reihe unendlich viele Glieder enthält, bedeutet, daß die Reihe mehr Glieder hat, als durch eine endliche Zahl beschrieben werden kann, nicht aber, daß die Zahl der Glieder selbst unendlich ist" (SK).

34 Nieuwentijt 1694; ders. 1720; Zu Nieuwentijts Kritik an der Infinitesimalrechnung vgl. Petry 1986; Vermeulen 1986; Vermy 1989.

35 Berkeley 1707; ders. 1734.
36 Nieuwentijt 1694, 281 ff.; ders. 1696, 31–33.
37 Vermeulen 1986, 180.
38 Nieuwentijt 1696, 31–33; Vermy 1989 zeigt allerdings, daß Nieuwentijt seine Leibniz-Kritik in späteren Jahren revidiert habe.
39 Nieuwentijt 1694, 281 ff.
40 Berkeley kannte Leibniz seit Beginn seiner wissenschaftlichen Tätigkeit 1706/7. In einem Kolloquiumsvortrag „Of Infinites" 1707 argumentiert Berkeley gegen die unendliche Teilbarkeit der Materie, d.h. gegen die Existenz unendlich kleiner Teile. Eine solche Annahme verstieße gegen das Prinzip „esse est percipi", welches impliziere, daß der kleinste Teil der Materie immer ein „minimum sensible" sein müsse. In diesem Vortrag nimmt Berkeley auch zur Kontroverse Nieuwentijt-Leibniz Stellung (236 f.). Berkeley kritisiert an Nieuwentijt dessen Inkonsequenz, die Differentiale erster Ordnung noch als legitime Objekte der Mathematik anzuerkennen.
41 Berkeley 1734 § 14, 73
42 Ibid. § 8, 69
43 Ibid. § 15, 74
44 Ibid. § 10, 71
45 Ibid.
46 Krämer 1988, 54 ff.
47 Berkeley 1734, § 32, 86
48 Krämer 1991, 159 ff.
49 Berkeley 1734, § 33, 86
50 Juškevič 1969, 12 f. Juškevič bezieht sich dabei auf die „Quadratura curvarum" (1676) Newtons, in: Opuscula, edit. J. de Castillon, Lausanne und Genf 1744, Vol. I: Philosophiae naturalis principia mathematica, London 1687, in der Übersetzung von G. Kowalewski (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften) zit. bei O. Becker, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg/München 1954, S. 154. Ein Gutachter gibt allerdings zu bedenken, ob es nicht vielmehr die Schüler Newtons gewesen seien, die auf Berkeleys Kritik ausdrücklich reagierten.
51 Daher ist Slawkow-Christows Auffassung unhaltbar: „Nach der gegenständlichen Auffassung spiegelt das Differential unmittelbar eine äußerliche Realität wider. Diese Auffassung vertreten auch die Schöpfer der Infinitesimalrechnung, Leibniz und Newton", 1972, 81.
52 Responsio ad nonullas difficultates a Dn. Bernardo Niewntii circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas", GM V 320–8.
53 GM V 322: „Im übrigen glaube ich, daß nicht nur solche (Größen) gleich sind, deren Differenz Null, sondern deren Differenz unvergleichlich klein ist."
54 GM V 322: „Solcher Zuwachs ist durch Konstruktion nicht kenntlich zu machen. Mit Euklid Buch V, Definition 5, stimme ich darin überein, daß alle diejenigen Größen vergleichbar sind, von denen die eine größer werden kann als die andere, sofern sie mit einer allerdings endlichen Zahl multipliziert werden. Und ebenso, wie sich diejenigen Größen nicht unterscheiden, die Archimedes als gleich annahm, so auch die anderen nicht. Und eben

dies ist gemeint, wenn gesagt wird, eine Differenz sei kleiner als jede gegebene Größe" (SK).

55 Mémoire de Mr. G.G. Leibniz touchant son sentiment sur le calcul différentiell", GM V 350.

56 GM V 322.

57 Zur Zurückweisung aktual unendlich kleiner Größen vgl. auch eine Notiz v. 26.3.1676: GM V 317 f.

58 GM V 350: „Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man Größen an so groß oder so klein wie nötig, damit der Fehler kleiner ist denn jeder angegebene Fehler, so daß man von Archimedes' Stil abweicht nur in bezug auf die Ausdrücke, welche eher auf unsere Methode ausgerichtet sind und konform gehen mit der Erfindungskunst" (SK).

59 „Cum prodiisset atque increbuisset analysi mea infinitesimalis", in: Gerhardt 1846, 39–50. Zur Datierung des Manuskriptes auf das Jahr 1701: Bos 1974/75, 56, Anm. 2.

60 GM II 288.

61 Child 1920, 92, datiert Leibniz' Argumentation mit nicht-archimedischen Größen schon auf die Jahre 1675/76. Earman 1975, 240, Anm. 6, betont, daß ihm der Zeitpunkt, an dem Leibniz von Infinitesimalen, verstanden als finite, aber unvergleichlich kleinen Größe spreche, nicht klar sei. Wenn aber unsere Hypothese zutrifft, daß Leibniz auf nicht-archimedische Größen bezug nimmt als Zugeständnis an eine traditionell referentielle Interpretation, ein Zugeständnis, das nötig erst wurde, *nachdem* die Brüder Bernoulli, l'Hospital und Nieuwentijt solche referentielle Interpretation im Sinne aktual unendlich kleiner Größen favorisierten, dann ist Childs Datierung auf die Jahre 1675/76 jedenfalls zu früh. 1695 (Kritik an Nieuwentijt) wäre dann das früheste Zeugnis, mit welchem Leibnizens Argumentation in den Termini nicht-archimedischer Größen belegt werden kann.

62 Vgl. auch: GM III 536.

63 Robinson 1966.

64 Ibid. 269.

65 Bos 1974/75, 81 ff.

66 Earman 1975, 246 ff.

67 Robinson 1966, 2.

68 Demgegenüber betonen Laugewitz 1983 und Oberschelp 1969 die Kontinuität zwischen Leibnizens Infinitesimalmathematik und der modernen Non-Standard-Analysis.

69 „Si omnio ultimum aliquod vel saltem rigorose infinitum quis intelliget, potest hoc facere... suffecerit enim in calculo utiliter adhiberei ut imaginarias radices magno fructu adhibent Algebristae", Leibniz, in: Gerhardt 1846, 43.

70 GM IV 91–5; Hauptschriften I, 96–100.

71 GM IV 92: „Die mathematische Analysis (ist) von metaphysischen Streitigkeiten nicht abhängig zu machen, es brauche also nicht behauptet zu werden, daß es in der Natur Linien gibt, die ...in aller Strenge unendlich klein sind..." Um daher diese subtilen Streitfragen zu vermeiden, glaubte ich, daß es, um meine Erwägungen allgemeinverständlich zu machen genüge,

das Unendliche durch das Unvergleichbare zu erklären, d.h. Größen anzunehmen, die unvergleichlich größer oder kleiner als die unsrigen sind." Hauptschriften I, 97.

72 GM IV 92: ...daß die „unvergleichlich kleinen Größen... keineswegs fixiert oder determiniert sind, und daß man sie so klein annehmen könne, wie man wolle... da es in unserer Macht steht, das unvergleichbar Kleine... hinlänglich zu verringern... Und zweifellos liegt darin der strenge Beweis unserer Infinitesimalrechnung." Hauptschriften I, 98.

73 Monitum de characteribus algebraicis, GM VII 218–23.

74 GM VII 222 f.

75 GM VII 387; und in den „Elementa..." (Gerhardt 1846, 32–38) erklärt Leibniz seine Annahme, dx und dy seien unendlich klein damit, daß den Termen der Reihe jeweils Linien entsprächen, die sich kontinuierlich vergrößerten oder verminderten.

76 Cohen 1984, 75; Cohen interpretiert das Differential nicht als reale aktual unendlich kleine Größe, der ein anschauliches Sein zukäme (§ 89), sondern als ein Element des Denkens, das selbst Erzeugung, Konstruktion (§ 59) sei. Auch in seinen „Jubiläumsbetrachtungen" 1888 unterstreicht Cohen, daß das dx nicht als ein Zeichen für eine Sache, sondern als ein Geltungswert in der Erzeugung der Dinge als wissenschaftliche Gegenstände aufzufassen sei.

77 Cassirer 1902, 165 ff.

78 Cohens Leibniz-Interpretation ist vielleicht im Sog der vernichtenden Kritik verloren gegangen, welche seine erkenntniskritische Rekonstruktion der Infinitesimalmethode von Seiten der Mathematiker widerfuhr. Frege, Russell und Cantor, die seine geschichtliche Darstellung lobten, warfen Cohen vor, daß er die infinitesimale Größe gerade als separate, wirkliche Entität behandele, also jenen Standpunkt versäume, den Cohen als die eigentliche Auszeichnung des leibnizschen Verfahrens herausarbeitete: Cantor 1884, 267; Russell 1972, §§ 262, 316; zit. n. Schulthess 1984, 31.
Paul Natorp 1921, 221 f. hat Cohen gegen Russell verteidigt. Gleichwohl brach die Rezeption von Cohens Infinitesimalinterpretation einschließlich der darin entwickelten Leibniz-Deutung vor dem Ersten Weltkrieg ab; dazu: Schulthess 1984, 44.

79 Bos 1974/75, 16 f.; Bos 1986, 108.

80 GM IV 92.

81 GP VI 629; GP II 365; GM IV 111.

82 Justification du Calcul des infinitesimales par celuy d l'Algebre ordinaire, GM IV 104–6; Hauptschriften I, 101 ff.

83 Leibniz vergißt bei dem Grenzübergang, daß y dabei nicht konstant ist. Hierauf machte mich Professor Scheibe/Heidelberg aufmerksam.

84 GM IV 105: „Die Größen c und e werden also in diesem algebraischen Kalkül nur vergleichsweise, mit Bezug auf x und y als Nichts gerechnet, besitzen jedoch untereinander ein algebraisches Verhältnis"; Hauptschriften I, 101 f.

85 GM IV 105.

86 In diesem Sinne weist Leibniz auch die Behauptung eines unendlichen

Ganzen bzw. einer unendlichen Zahl zurück, da „Unendlichkeit" allein dem Erzeugungsprozeß derselben zukomme: GM III 575; vgl. auch: GM V 389.

87 Cassirer 1902, 178.

88 GM IV 105.

89 Eine völlig andere Einschätzung des Kontinuitätsgesetzes gibt Freudenthal 1986.

90 L. Scholtz 1932 hat in ihrer Dissertation erstmals auf die Bedeutung dieses Manuskriptes für die Begründung der Infinitesimalrechnung aufmerksam gemacht. Doch erst Bos 1974/75, 56 ff. hat diese Anregung aufgegriffen und das Manuskript „Cum prodiisset" in den Mittelpunkt seiner Rekonstruktion der Leibnizschen Begründung gestellt.

91 Gerhardt 1846, 40: „Bei jedem angenommenen Übergang, der in einen Grenzfall ausläuft, ist es erlaubt, allgemeine Überlegungen anzustellen, die den letzten Grenzfall einbegreifen" (SK).

92 Bos 1974/75, 57.

93 GM VI 129–35.

94 GM VI 129.

95 GM VI 129.

96 Descartes, Regulae ad directionem ingenii: AT X Regel 13, 431 ff.; Regel 16, 454 ff.

97 Hofmann 1949, 6 ff.; Hofmann/Wieleitner/Mahnke 1931.
Auf den Zusammenhang zwischen Reihenuntersuchungen und Kontinuitätsüberlegungen macht Leibniz vor allem in dem Brief an Jacob Hermann v. 26.6.1705 (GM IV 772) aufmerksam. „Continuatio" begreift Leibniz hier im Sinne einer lückenlosen Fortsetzung, mit der eine Reihe dem Gesuchten angenähert wird und die verbürgt, daß der Fehler kleiner ist als jede angebbare Größe.

98 Brief an Oldenburg v. 15.7.1674: GM I 51–3.

99 Hofmann/Wieleitner/Mahnke 1931, 40.

100 Zit. Hofmann/Wieleitner/Mahnke 1931, 40.

101 GM IV 93: „Ganz allgemein kann man sagen, daß die Kontinuität überhaupt etwas Ideales ist, und es in der Natur nichts gibt, das vollkommen gleichförmige Teile hat, dafür aber wird auch das Reele vollkommen von dem Ideellen und Abstrakten beherrscht; die Regeln des Endlichen behalten im Unendlichen Geltung"; Hauptschriften I, 100.

102 Cassirer 1902, 169.

103 GM IV 93: „Auch die imaginären Wurzeln haben ihr fundamentum in re. Als ich z.B. den verstorbenen Herrn Huyghens darauf aufmerksam machte, daß

$$\sqrt[x]{1+\sqrt{-3}} + \sqrt[x]{1-\sqrt{-3}} = \sqrt[x]{6}$$

ist, so fand er dies so wunderbar, daß er mir erwiderte, es läge darin etwas für uns Unbegreifliches"; Hauptschriften I 99; vgl. auch: GM II 15.

104 Zum neuzeitlichen Zahlbegriff: Klein 1936 II, 195 ff.

105 GM IV 92; GM III 551.

106 Robinet 1986 a und 1986 b ist zuzustimmen, wenn er (1) betont, daß nach

Leibniz' Auffassung die Mathematik von fiktiven Gegenständen handelt, und sich dadurch von der Metaphysik unterscheide, deren Gegenstände wirklich existieren und (2) darauf hinweist, daß für Leibniz die Gegenstände der Mathematik imaginierbar, die Gegenstände der Metaphysik aber nur denkbar sind.

Entscheidend aber ist, daß die mathematische Imagination – trotz der bloß fiktiven Gegebenheitsweise ihrer Gegenstände – dadurch gesichert ist, daß die mathematischen Fiktionen in Symbolen zur gegenständlichen „Existenz" gelangen.

Literatur

Andersen, K., 1985, „Cavalieri's method of indivisibles", *Arch. Hist. Ex. Sciences*, 31, 291–367.

Andersen, K., 1986, „The Method of Indivisibles: Changing Understandings", *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 14, Wiesbaden.

Auger, L., 1962, *Un Savant méconnu: Gilles Personne de Roberval (1602–1675)*, Paris.

Barrow, I., 1670, *Lectiones geometricae*, London.

Belaval, Y., 1986, *„La Place de la ‚Nova Methodus' dans la système leibnizien"*, in: Heinekamp (Hg.) 1986, 38–47.

Berkeley, G., 1707, *Of Infinites*, in: Works of George Berkeley, vol. 4, 235–38.

Ders. 1734, *The Analyst*, in: Works of George Berkeley, vol. 4, 65–102.

Bermoulli, Johann, 1691/92, *Integral Calculus. Lectiones mathematicae de methodo integralium, aliisque ...*, Paris.

Ders. 1924, *Die Differentialrechnung aus dem Jahre 1691/92*, übers. v. P. Schafheitlein (Oswald's Klassiker No. 211), Leipzig.

Bernoulli, Jakob, 1690, „Analysis problematis antehac propositi de inventiore linea descensus a corpore...", *Acta Erud.*, Mai, 217–219.

Ders. 1693, „Curvae diacausticae earum relatio ad evolutas...", in: *Acta Erud.*, Juni, 244–256.

Ders. 1694, „Curvatura laminae elasticae", *Acta Erud.*, Juni, 262–276.

Bos, H.J.M., 1974/75, „Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivation in the Leinizian Calculus", *Arch. Hist. Ex. Sciences*, 14, 1–90.

Ders., 1986, *„Fundamental Concepts of the Leibnizian Calculus"*, in: Heinekamp 1986, 103–18.

Boyer, C.B., 1959, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York.

Cantor, M.B., 1884, „Rezension zu: Hermann Cohen, Das Prinzip der Infinitesimalrechnung und seine Geschichte, Berlin 1883", *Deutsche Literaturzeitung* 8, 266 ff.

Cassirer, E., 1902, *Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen*, Marburg (repr. Hildesheim/Darmstadt 1962).

Cavalieri, B., 1635, *Geometria Indivisilibus Continuarum Nova quadam Ratione Promota*, Bologna.

Cekic, M., 1977, „Leibniz und die Mathematiker des 17. Jahrhunderts", *Studia Leibnitiana*, XXII, 119–29.

Child, J.M., 1916, *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow, Chicago*, London.

Child, J.M., 1920, *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, Chicago, London.

Cohen, H., 1888, „Jubiläumsbetrachtungen", in: *Phil. Monatsh.*, 24, 257–91.

Ders., 1984, *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* (Berlin 1883), Hildesheim, 4. Aufl.

Coolidge, J.L., 1949, *The Mathematics of Great Amateurs*, New York (3. Aufl., 1963).

Duhamel, J.M.C., 1864, „Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes", in: *Mémoires de l'Academie des Sciences de l'Institut Imperial de France*, 32, 269–330.

Earman, J., 1975, „Infinities, Infinitesimals and Indivisibles: The Leibnizian Labyrinth", *Studia Leibnitiana* VII, 2, 236–251.

Edwards, C.H., 1979, *The Historical Development of the Calculus*, Berlin/Heidelberg/New York.

Fermat, Pierre de, 1891–1922, *Oeuvres*, ed. P. Tannery u. C. Henry, 4 Bde., Paris.

Genty, Abbé Louis, 1784, *L'influence de Fermat sur son siècle relativement au progrès de la haute géométrie det du calcul*, Orleans.

Gerhardt, C.I., 1848, *Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz*, Halle.

Giusti, E., 1980, *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Bologna.

Heinekamp, A. (Hg.), 1986, *300 Jahre „Nova Methodus" von G.W. Leibniz (1684–1984)*, Stuttgart.

Hess, H.J./F. Nagel (Hg.), 1989, Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli", *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 17, Wiesbaden.

Hofmann, J.E., 1943, „Studien zur Vorgeschichte des Prioritätenstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis", *Abh. d. Preuß. Ak. d. Wiss.* 1943, Math. Nat. Kl. Nr. 2, Berlin.

Ders. 1949, *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672–1676)*, München.

Hofmann, J.E./H. Wieleitner/D. Mahnke, 1931, „Die Differenzrechnung bei Leibniz", *Sonderausgabe aus den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Phys. Math. Kl. 1931, Berlin.

L'Hospital, G.F. Marquis de, 1696, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris.

Juškevič, A.P., 1969, „Gottfried Wilhelm Leibniz und die Grundlage der Infinitesimalrechnung", *Studia Leibnitia*, Suppl., I, 1–19.

Klein, J., 1936, „Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra", in: *Quellen und Studien zur Gesch. d. Math., Astr. u. Phys.*, Bd. 3, H. 1, 18–105 u. Bd. 3, H. 2, 122–235, Berlin.

Kline, M., 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York.

Krämer, S., 1988, *Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß*, Darmstadt.

Krämer, S., 1991, *Berechenbare Vernunft. Kalkül und Rationalismus im 17. Jahrhundert*, Berlin/New York.

Laugewitz, D., 1983, Die Nichtstandard-Analysis. Eine Wiederaufnahme der Ideen und Methoden von Leibniz und Euler, in: *Leonhard Euler 1707–1783*, Basel, 185–197.

Leibniz, G.W. (Bodemann), *Briefwechsel des Gottfried Wilhelm Leibniz*, ed. Eduard Bodemann, Hannover 1895 (repr. Hildesheim 1966).

Leibniz (Child), *The early mathematical manuscripts of Leibniz, translated from the Latin texts*, published by Carl Immanuel Gerhardt with critical and historical notes by J.M. Child, London 1920.

Leibniz (Gerhardt), *Historia et Origino calculi differentialis a. G.G. Leibnitio conscripta*, ed. C.I. Gerhardt, Hannover 1846.

Leibnziz (GM), *Mathematische Schriften*, ed. C.I. Gerhardt, VII Bde., Berlin/Halle 1849–1863 (repr. Hildesheim 1965).

Leibniz (GP), *Philosophische Schriften*, ed. C.I. Gerhadt, VII Bde., Berlin 1875–1890 (repr. Hildesheim 1965).

Leibniz (Hauptschriften), *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*, übers. v. A. Buchenau, durchges. u.m. Einleitungen u. Erläut. v. E. Cassirer, 2 Bde., Hamburg (1904) 1966.

Mahnke, D., 1926, Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis, in: *Abh. Preuß. Ak. d. Wiss.*, Jg. 1925, Math. Nat. Kl. Nr. 1, Berlin 1926.

Mahnke, D., 1932, *Zur Keimesgeschichte der Leibnizschen Differentialrechnung*, Berlin.

Newton, Isaac, 1704a, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, London.

Ders. 1704b, *Tractatus de quadratur curvarum*, London.

Ders. 1711, *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, London.

Ders. 1779, *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, als „Geometria analytica, sive artis analyticae specimina", in: Newtoni opera, quae extant omnia, 1, London.

Nieuwentijt, B., 1694, *Considerationes circa Analyseos ad Quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum*, Amsterdam.

Ders., 1696, *Considerationes secundae*, Amsterdam.

Ders., 1720, *Gronden van zekerheid*, Amsterdam.

Oberschelp, A., 1969, „Die Entwicklung der leibnizschen Idee der unendlich kleinen Größen in der modernen Mathematik", in: *Studia Leibnitiana*, Suppl., II, 27–33.

Pascal, Blaise, 1659, *Traité des sinus des quarts du cercle*, Paris.

Pèrez de Laborda, A., 1986, *„Newtons Fluxionsrechnung im Vergleich zu Leibniz' Infinitesimalkalkül"*, in: Heinekamp 1986, 236–57.

Petry, M., 1986, *„The Early Reception of the Calculus in the Netherlands"*, in: Heinekamp 1986, 202–31.

Robinet, A., 1986 a, *Architectonique disjonctive automates systémiques et idéalité transcendentale dans l'œuvre de Leibniz*, Paris.

Robinet, A., 1986 b, *„Sens et rôle philosophique de la Spécieuse (Sp^3): La symbolique du calcul differentiel et intégral"*, in: Heinekamp 1986, 48–63.

Russell, B., 1972, *Principles of Mathematics* (1903), London.

Scholtz, L., 1932, *Die exakte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bei Leibniz*, Dissertation Marburg.
Schulthess, P., 1984, *„Einleitung"*, in: Hermann Cohen, Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte, Hildesheim, 7*–46*.
Scott, J.F., 1938, *The Mathematical Work of John Wallis*, London.
Scriba, C.J., 1964/65, „The inverse method of tangents. A dialogue between Leibniz and Newton (1675–1677)", *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 2, 113–157.
Scriba, C.J., 1966, *Studien zur Mathematik des John Wallis*, Wiesbaden.
Slawkow-Christow, S., 1972, „Leibniz und die zweite Krise in der Mathematik", *Studia Leibnitiana*, Suppl., XIII, 77–81.
Struik, D.J., 1980, *Abriß der Geschichte der Mathematik*, Berlin.
Vermeulen, B.P., 1986, *„The Metaphysical Presuppositions of Nieuwentijt's Critics of Leibniz's Higher-order Differentials"*, in: Heinekamp 1986, 178–184.
Vermy, R.H., 1989, „Bernhard Nieuwentijt and the Leibnizian Calculus", *Studia Leibnitiana*, Bd. XXI, H. 1, 69–86.
Walker, E., 1932, *A Study of the Traité des indivisibles of Gilles Personne de Roberval*, New York.
Wallis, John, 1656, Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi..., in: *Operum mathematicorum pars altera*, Oxford.
Wallner, C.R., 1903, „Die Wandlungen des Indivisiblenbegriffes von Cavalieri bis Wallis", *Bibl. Math.*, 4, 28–47.
Whiteside, D.T., 1960/62, „Pattern of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century", *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 1, 179–388.
Wußling, H., 1979: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Berlin.

Anschrift der Verfasserin:

Sybille Krämer
Philosophisches Institut der FU Berlin
Habelschwerdter Allee 30
1000 Berlin 33