Technische Universität Berlin Stand: 4.8.07

Wissenschaftstheoretisches Propädeutikum für Philologen

Grundlagenwissen zu Mengenlehre und Logik einschließlich eines Abrisses zur Definitionslehre

Monika Budde

Inhaltsübersicht

Vorbemerkung

In diesem Propädeutikum ist Handwerkszeug zum wissenschaftlichen Arbeiten zusammengestellt, das in dieser kompakten Form für Studienanfänger der Geisteswissenschaften bisher nicht zur Verfügung stand. Obwohl Grundkenntnisse in Mengenlehre und Logik zum gewöhnlichen Schulstoff einer Gymnasialausbildung gehören (oder muß man auch hier inzwischen sagen: gehörten?), hat sich in meinen Lehrveranstaltungen immer wieder gezeigt, daß Studierende mit diesem fachübergreifend relevanten, für die Lektüre sprachwissenschaftlicher Arbeiten aber ganz unerläßlichen Werkzeug kaum im Ansatz vertraut sind. Besonders hinderlich war dabei nicht selten das Vorurteil, Mengenlehre und Logik gehörten zur Mathematik und als Geisteswissenschaftler brauche man sich daher damit nicht zu beschäftigen. Wer sein Studium (auch) als Befreiung von Vorurteilen begreift, wird schon nach kurzer Zeit der Übung erstaunt feststellen, wie sehr dieses Werkzeug nicht nur dem Mathematiker, sondern jedem wissenschaftlich Denkenden die Arbeit erleichtert und ihn vor Fehlschlüssen bewahrt (eigenen und solchen in der Literatur). Nichts desto trotz habe ich bei den Übungsbeispielen immer wieder auf allgemein vertraute aus der Mathematik zurückgegriffen.

Während die Abschnitte I.B und I.C in besonderer Weise auf meine (sprachwissenschaftlichen) Lehrveranstaltungen zugeschnitten sind, behandeln die übrigen Abschnitte Begriffe und Techniken von allgemeinerem Interesse. Wer sich über die ersten Anfangsgründe hinaus üben will, findet dazu am Schluß eine kleine Literaturauswahl.

Über Kommentare und Verbesserungsvorschläge würde ich mich sehr freuen.

I. Mengentheoretische Grundlagen

A. Grundbegriffe der Mengenlehre

1. *Der Begriff der Menge*

Unter eine ***Menge*** verstehen wir mit Cantor die Zusammenfassung bestimmter, wohl unterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens.[1] Die Objekte, die zu einer Menge gehören, heißen ***Elemente*** der Menge. Ist r Element der Menge M, so wird dies durch $r \in M$ (lies: „r ist Element von M") symbolisiert.[2] Ist r nicht Element von M, so schreibt man $r \notin M$.

Mengen können mithilfe von geschweiften Klammern beschrieben werden, und zwar:

– durch Aufzählen ihrer Elemente: die Menge der geraden Zahlen zwischen –1 und 9 $= \{0, 2, 4, 6, 8\}$
– durch die Angabe einer Eigenschaft, die genau den Elementen der Menge zukommt: die Menge der geraden Zahlen zwischen –1 und 9 $= \{r \mid r$ ist eine gerade Zahl und $-1 \leq r \leq 9\}$ (lies: „die Menge aller r mit der Eigenschaft: r ist eine gerade Zahl und –1 kleiner-gleich r kleiner-gleich 9")[3]

Aufzählbar sind streng genommen nur endliche Mengen: Eine quasi-aufzählende Darstellung von unendlichen Mengen wie z.B. „$\{1, 3, 5, ...\}$" ist unvollständig, da das Gesetz für die Fortsetzung implizit bleibt.

Ü 1: Überlegen Sie sich ein Beispiel, wo unterschiedliche Fortsetzungen möglich sind.

Die Menge, die kein Element enthält, heißt „leere Menge" und wird mit dem Symbol „$\varnothing$" bezeichnet. Gewöhnlich definiert man:[4]

$\varnothing$:= ***die leere Menge*** := $\{r \mid r \neq r\}$.

---

[1] Die folgende Darstellung lehnt sich eng an Schäfer/Georgi/Trippler (1999: 104–109) an.

[2] Im Rahmen dieses Propädeutikums verwenden wir die Variable „r" für beliebige Entitäten, weil die Variable „x" in meinen Lehrveranstaltungen regelmäßig eine speziellere Interpretation hat. In anderen Zusammenhängen ist es üblich, die Variablen vom Ende des Alphabets – speziell „x", „x_1", ..., „y", „y_1", ... – für beliebige Entitäten zu verwenden.

[3] Anstelle des senkrechten Striches wird auch der Doppelpunkt verwendet: $\{r$: r ist .... $\}$. Üblich, wenngleich nicht ganz exakt, ist auch die Angabe eines Grundbereiches *vor* dem Strich bzw. Doppelpunkt (anstelle danach): $\{r \in 9 \mid r$ ist gerade und $-1 \leq r \leq 9\}$.

[4] Das Zeichen „:=" steht für „ist per definitionem gleich". In einer Definition werden wir den definierten Begriff immer hervorheben. Dies ist besonders wichtig bei informellen Definitionen, die in den fortlaufenden Text eingestreut sind: Nicht jede Aussage, die als Definition infrage kommt, ist auch als Definition zu verstehen. Ein Autor spart seinen Lesern daher gegebenenfalls sehr viel Arbeit, wenn er Definitionen immer eindeutig als solche kennzeichnet.

2. *Relationen zwischen Mengen*

Eine der wichtigsten Relationen („Beziehungen“) zwischen Mengen ist die des Enthaltenseins:

Definition: Eine Menge M_1 ist ***Teilmenge*** einer Menge M_2 („M_1 ist in M_2 enthalten“), symbolisch: $M_1 \subseteq M_2$, genau dann, wenn jedes Element der Menge M_1 auch Element von M_2 ist.

Anstelle von „Teilmenge“ wird auch ***Untermenge*** gebraucht. Zum Beispiel ist $\{1, 2\}$ eine Teilmenge von $\{1, 2, 3\}$ (*Übung*: Ist die definierende Bedingung tatsächlich erfüllt? Wie muß man Bedingungen dieser Art – „für jedes ...“ – überprüfen?). Wenn M_1 Untermenge von M_2 ist, so heißt M_2 auch ***Obermenge*** von M_1.

Gleichheit von Mengen läßt sich nun erklären als wechselseitige Teilmengenbeziehung:[5]

Definition: Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen ***gleich***, symbolisch: $M_1 = M_2$, genau dann, wenn M_1 Teilmenge von M_2 und M_2 Teilmenge von M_1 ist.

Zwei Mengen sind also gleich, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten. Ungleichheit kann man dann symbolisch mithilfe von „$\neq$“ ausdrücken.

Manchmal interessiert man sich für Teilmengen einer Menge, die verschieden von der Ausgangsmenge sind. Solche Teilmengen heißen „echte Teilmengen“:

Definition: Eine Menge M_1 ist ***echte Teilmenge*** einer Menge M_2 („M_1 ist in M_2 echt enthalten“), symbolisch: $M_1 \subset M_2$, genau dann, wenn M_1 Teilmenge von M_2 ist und wenigstens ein Element von M_2 nicht zu M_1 gehört.

Eine echte Teilmenge einer Menge M_2 ist also immer verschieden von M_2.
Hinweis zur Notation: Für die Teilmengenbeziehung ($\subseteq$) wird in der Literatur, insbesondere in der mathematischen Fachliteratur, häufig auch das Symbol „$\subset$“ verwendet. Bei diesem Notationssystem wird dann ein Symbol wie „$\subsetneqq$“ benutzt, um auszudrücken, daß eine Menge M_1 eine echte Teilmenge von M_2 ist. Vorsicht ist also geboten bei der Interpretation von „$\subset$“ (hier wird „$\subset$“ aber natürlich nur im definierten Sinne verwendet).

---

[5] Gleichheit ist für jeden Typ von Entitäten gesondert zu erklären. Die verschiedenen Gleichheitsbegriffe werden aber üblicherweise terminologisch nicht unterschieden.

Ü 2: Welche Beziehungen bestehen zwischen den folgenden Mengen:

$M_1 = \{r \mid (r+1)(r+2)(r+3) = 0\}$[6]

$M_2 = \{-1, -2, -3\}$

$M_3 = \{-2\}$

$M_4 = \{1\}$

$M_5 = \{r \mid r \text{ ist eine ganze Zahl mit } -4 < r < 0\}$

$M_6 = \{-2, -1, -3\}$

$M_7 = \varnothing$

Ü 3: Überprüfen Sie mithilfe der Definitionen zunächst an Beispielen und dann für beliebige Mengen M, M_1, M_2 und M_3, ob gilt:

a. Reflexivität:
- (i) $M = M$
- (ii) $M \subseteq M$
- (iii) $M \subset M$
- (iv) $M \neq M$

b. Symmetrie:
- (i) aus $M_1 = M_2$ folgt $M_2 = M_1$
- (ii) aus $M_1 \subseteq M_2$ folgt $M_2 \subseteq M_1$
- (iii) aus $M_1 \neq M_2$ folgt $M_2 \neq M_1$

c. Transitivität:
- (i) aus $M_1 = M_2$ und $M_2 = M_3$ folgt $M_1 = M_3$
- (ii) aus $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3$ folgt $M_1 \subseteq M_3$
- (iii) aus $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$ folgt $M_1 \subset M_3$
- (iv) aus $M_1 \neq M_2$ und $M_2 \neq M_3$ folgt $M_1 \neq M_3$

3. *Mengenoperationen: Vereinigung, Schnitt und Differenz*

Mengenoperationen ordnen jeweils zwei Mengen eine dritte zu (*Übung*: Überlegen Sie sich nach der Lektüre dieses Abschnitts, ob die Ausgangsmengen verschieden voneinander sein müssen und ob die dritte Menge verschieden von den beiden Ausgangsmengen sein muß).

Definition: ***Die Vereinigung*** zweier Mengen M_1 und M_2, symbolisch: $M_1 \cup M_2$ (lies: „M_1 vereinigt mit M_2“) ist die Menge aller Elemente, die zu wenigstens einer der beiden Mengen M_1 und M_2 gehören.

Jedes Element der Vereinigung $M_1 \cup M_2$ gehört also zu M_1 oder zu M_2 (im Sinne des nicht-ausschließenden „oder“: ein Element der Vereinigung kann auch zu beiden Mengen gehören).

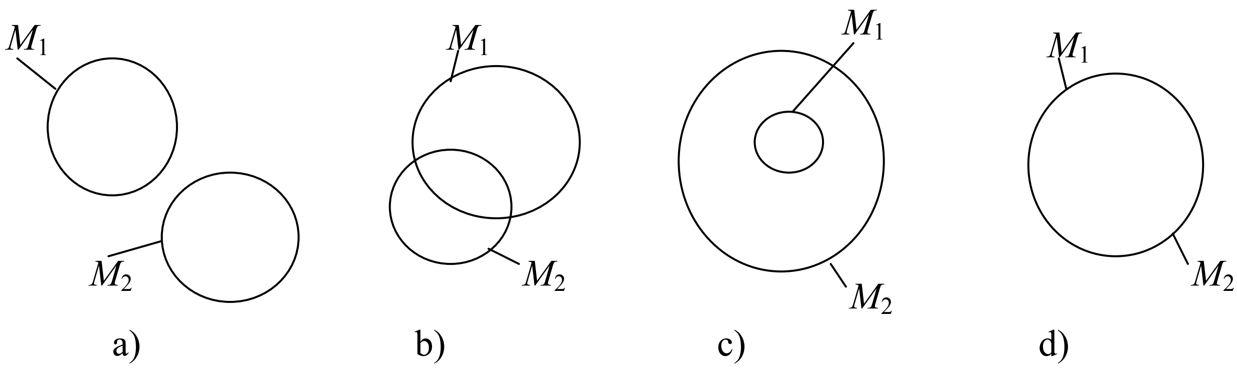
---

[6] Zur Erinnerung: ein Produkt ist 0, wenn wenigstens einer der Faktoren 0 ist.

Ü 4: Sei $M_1 = \{k, a, r, l\}$ und $M_2 = \{u, r, s, e, l\}$. Überprüfen Sie, ob gilt:

$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}.$$

Ü 5: In den folgenden Graphiken sind jeweils zwei Punktmengen der Ebene durch entsprechende Kreise dargestellt. In a) sind die beiden Punktmengen ***disjunkt*** („elementfremd“, d.h. sie haben kein Element gemeinsam); in b) enthalten die beiden Punktmengen gemeinsame Elemente; in c) und in d) ist eine der beiden Mengen (welche?) eine Teilmenge der anderen. Schraffieren Sie jeweils die Vereinigungsmenge.



Ü 6: Überprüfen Sie mithilfe der Definition zunächst an Beispielen und dann für beliebige Mengen M_1, M_2 und M_3, ob gilt:

a. Kommutativgesetz: $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$

b. Assoziativgesetz: $(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$

Wenn für eine Operation das Assoziativgesetz gilt, dann dürfen die Klammern ganz weggelassen werden, z.B. ist die Addition assoziativ, weshab wir 1+2+3 statt z.B. (1+2)+3 schreiben dürfen.

Eine zweite Mengenoperation ist der Durchschnitt:

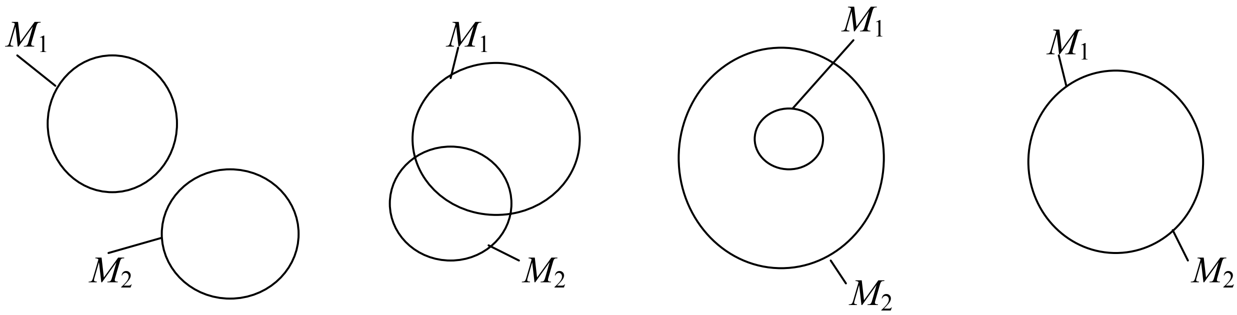
Definition: ***Der Durchschnitt*** zweier Mengen M_1 und M_2, symbolisch: $M_1 \cap M_2$ (lies: „M_1 geschnitten mit M_2“) ist die Menge aller Elemente, die zugleich zu jeder der beiden Mengen M_1 und M_2 gehören.

Jedes Element des Durchschnitts $M_1 \cap M_2$ ist also Element von M_1 *und* Element von M_2.

Ü 7: Sei $M_1 = \{k, a, r, l\}$ und $M_2 = \{u, r, s, e, l\}$. Überprüfen Sie, ob gilt:

$$M_1 \cap M_2 = \{r, l\}.$$

Ü 8: In den folgenden Graphiken sind wieder jeweils zwei Punktmengen der Ebene durch entsprechende Kreise dargestellt. Schraffieren Sie die jeweiligen Durchschnitte.



a) b) c) d)

Ü 9: Überprüfen Sie mithilfe der Definition zunächst an Beispielen und dann für beliebige Mengen M_1, M_2 und M_3, ob gilt:

a. Kommutativgesetz: $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$

b. Assoziativgesetz: $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$

c. Distributivgesetze:

(i) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$

(ii) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

Ü 10: Vergleichen Sie die Gesetze für die Vereinigung und den Durchschnitt mit den Gesetzen für die Addition und die Multiplikation. Was fällt auf?

Ü 11: Charakterisieren sie die Disjunktheit zweier Mengen mithilfe von „Durchschnitt“: Zwei Mengen M_1 und M_2 sind disjunkt genau dann, wenn gilt: ..... .

Gelegentlich möchte man mehr als zwei Mengen ‘auf einen Schlag’ vereinigen bzw. schneiden. Dazu ist es nützlich, entsprechende Verallgemeinerungen einzuführen:

Definition: ***Die Vereinigung*** einer Menge M von Mengen, symbolisch: $\bigcup M$, ist die Menge aller Elemente, die zu wenigstens einem der Elemente von M gehören.

Definition: ***Der Durchschnitt*** einer Menge M von Mengen, symbolisch: $\bigcap M$, ist die Menge aller Elemente, die zugleich zu jedem Element von M gehören.

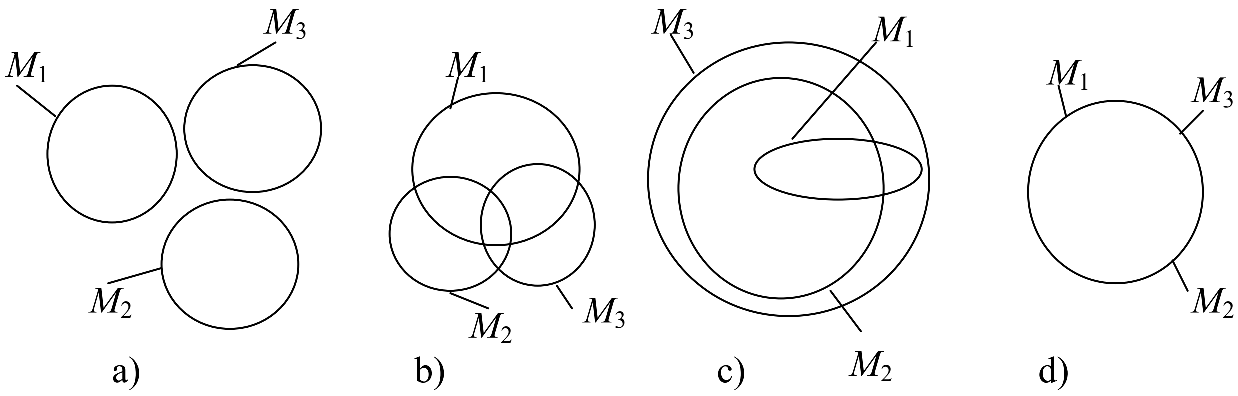
Man beachte, daß die Elemente von M selbst wieder Mengen sind.

Ü 12: Sei $M_1 = \{k, a, r, l\}$, $M_2 = \{u, r, s, e, l\}$, $M_3 = \{k, u, r, s\}$, $M = \{M_1, M_2, M_3\}$. Überprüfen Sie, ob gilt:

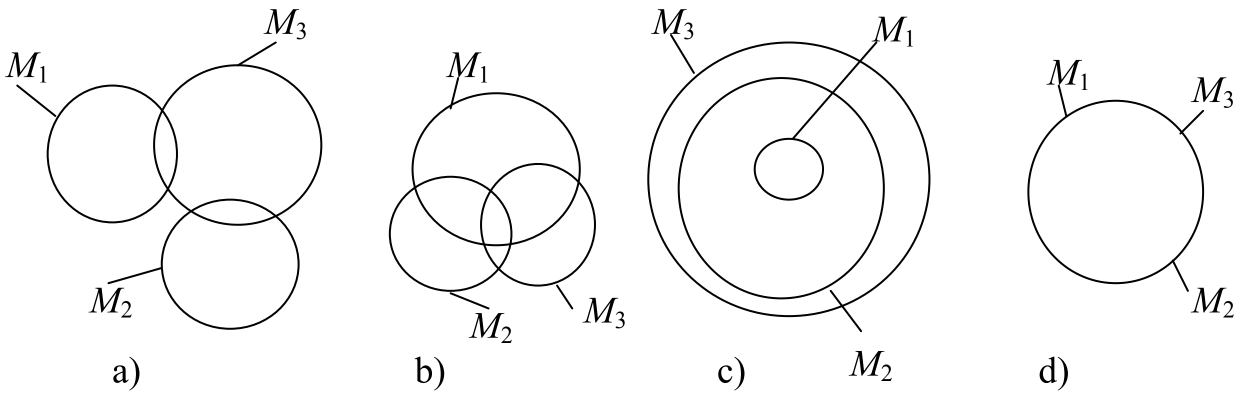
a. $\bigcup M = \{k, a, r, u, s, e, l\}$

b. $\bigcap M = \{r\}$.

Ü 13: In den folgenden Graphiken sind drei Punktmengen der Ebene durch entsprechende Kreise dargestellt. Schraffieren Sie die jeweiligen Vereinigungen $\bigcup\{M_1, M_2, M_3\}$.



Ü 14: In den folgenden Graphiken sind drei Punktmengen der Ebene durch entsprechende Kreise dargestellt. Schraffieren Sie die jeweiligen Durchschnitte $\bigcap\{M_1, M_2, M_3\}$.



Ü 15: Überprüfen Sie mithilfe der Definitionen zunächst an Beispielen und dann für beliebige Mengen M_1, M_2 und M_3, ob gilt:

a. $\bigcup\{M_1, M_2\} = M_1 \cup M_2$

b. $\bigcap\{M_1, M_2\} = M_1 \cap M_2$

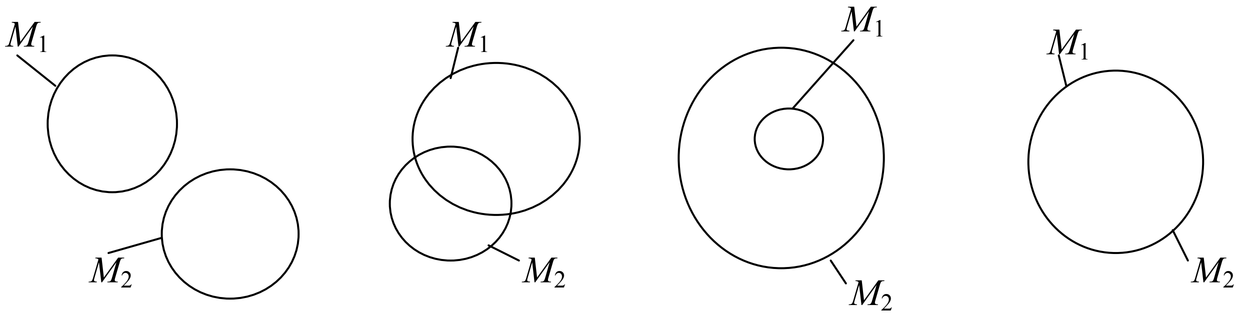
Die dritte Mengenoperation, die wir hier behandeln wollen, ist die Differenz:

Definition: ***Die Differenz*** zweier Mengen M_1 und M_2, symbolisch: $M_1 \setminus M_2$ (lies: „M_1 ohne M_2“) ist die Menge aller Elemente, die zu M_1, aber nicht zu M_2 gehören.

Die Differenzmenge $M_1 \setminus M_2$ ist also diejenige Menge, die übrig bleibt, wenn man alle Elemente von M_2 aus M_1 entfernt. Die Differenz zweier Mengen M_1 und M_2 wird gelegentlich auch durch „$M_1 - M_2$" (gelesen: „M_1 minus M_2") dargestellt.

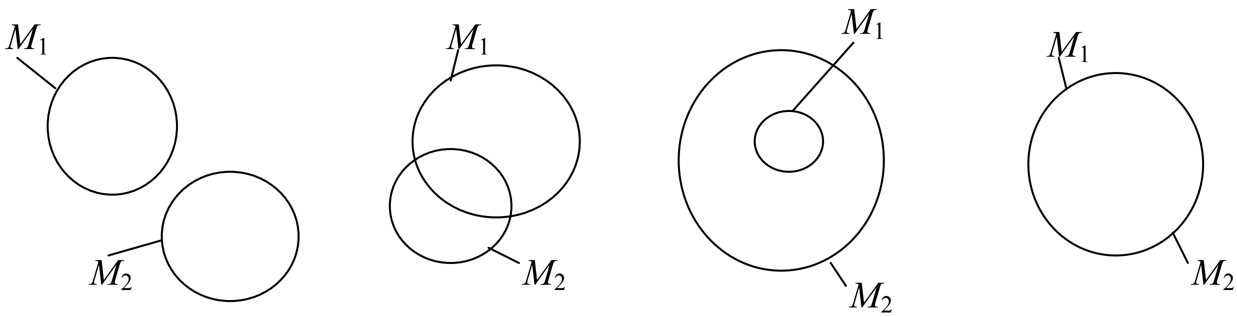
Ü 16: Sei $M_1 = \{k, a, r, l\}$ und $M_2 = \{u, r, s, e, l\}$. Überprüfen Sie, ob gilt:
$M_1 \setminus M_2 = \{k, a\}$, $\quad M_2 \setminus M_1 = \{u, s, e\}$.

Ü 17: In den folgenden Graphiken sind wieder jeweils zwei Punktmengen der Ebene durch entsprechende Kreise dargestellt. Schraffieren Sie jeweils die Differenzmenge $M_1 \setminus M_2$.



a) b) c) d)

Ü 18: Schraffieren Sie nun jeweils die Differenzmenge $M_2 \setminus M_1$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen der vorherigen Aufgabe.



a) b) c) d)

Ü 19: Überprüfen Sie mithilfe der Definition zunächst an Beispielen und dann für beliebige Mengen M_1, M_2 und M_3, ob gilt:
a. Kommutativgesetz: $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1$
b. Assoziativgesetz: $(M_1 \setminus M_2) \setminus M_3 = M_1 \setminus (M_2 \setminus M_3)$

Ü 20: In der Übersicht in II.C sind weitere Aussagen über die Mengenoperationen zusammengestellt. Zeigen Sie auch deren Gültigkeit sowohl an Beispielen als auch allgemein.

B. Folgen

1. *Vorklärungen:* n-*Tupel (Paare usw.), Relationen und Funktionen*

Folgen sind Relationen zwischen natürlichen Zahlen *n* und den jeweils anzuordnenden Entitäten *r*. Folgen sind also Mengen bestimmter Art: Mengen von Paaren <*n*,*r*>. ***Paare*** (***Tripel***, ***Quadrupel***, usw.) bestehen aus zwei (drei, vier usw.) ***Komponenten*** in einer festgelegten Reihenfolge. Allgemein: *n*-Tupel bestehen aus *n* Komponenten (*n* > 1). Namen für *n*-Tupel werden gebildet aus den spitzen Klammern „<“ und „>“ und aus den (durch Kommata abgegrenzten) Namen der Komponenten, z.B. <1, a>, <a, b>, <*haus*^{W}, *S*>. Zwei (geordnete) *n*-Tupel sind ***identisch***, wenn sie komponentenweise übereinstimmen; also sind verschieden: <5, u> und <u, 5>.

Ü 21: Überprüfen Sie, ob gilt: (a) {Anton, Petra} = {Petra, Anton}
(b) <Anton, Petra> = <Petra, Anton>

Mengen von *n*-Tupeln heißen auch (***extensionale***) ***Relationen***. Sie werden durch ***intensionale Relationen*** festgelegt – so, wie Mengen von einfachen Entitäten durch Eigenschaften festgelegt werden. Z.B. bestehen in der fünfköpfigen Familie von Karl und Emilie mit ihren Kindern Anton, Petra und Karla die (intensionalen) Relationen Bruder-von und Schwester-von derart, daß Bruder-von für diese Familie {<Anton, Petra>, <Anton, Karla>} festlegt, und Schwester-von {<Petra, Anton>, <Petra, Karla>, <Karla, Anton>, <Karla, Petra>}.

Ü 22: Welche Mengen werden von den intensionalen Relationen Kind-von und Vater-von für die Beispielfamilie festgelegt?

Die Menge der ersten Komponenten einer 2-stelligen Relation *R* heißt auch ***Vorbereich*** von *R*, und die Menge der zweiten Komponenten heißt auch ***Nachbereich*** von *R*. Relationen, die jedem Element ihres Vorbereichs genau ein Element ihres Nachbereichs zuordnen, sind ***Funktionen***.

2. *Definition von „Folge“*

Eine zweistellige Relation *R* ist nun genau dann eine (nicht-leere, endliche) ***Folge***, wenn *R* eine Funktion ist, deren Argumente die natürlichen Zahlen 1 bis *n* sind (für ein *n* ≥ 1). Z.B. sind Folgen (von Buchstaben):

{<1, a>, <2, b>}; {<1, à>}; {<1, a>, <2, b>, <3, a>, <4, k>, <5, u>, <6, s>}.

Die zweiten Komponenten einer Folge heißen auch **(*Folgen-*)*Glieder***.

> Zu beachten: Die Begriffe „Folge“ und „Folge von“ verhalten sich zueinander wie „Menge“ und „Menge von“: „Folge von ...“ ist eine Abkürzung für „Folge, deren Glieder vom Typ der ... sind“.

Aus der Definition von „Folge“ ergibt sich:

(a) Jede natürliche Zahl kommt in einer Folge höchstens einmal vor.

(b) Jede Folge ist nicht-leer und endlich (sonst gäbe es kein *n*, so daß der Vorbereich der Folge gerade die Menge der Zahlen 1 bis *n* ist).

(c) In einer Folge gibt es keine ‘Lücken’: {<1, *der*>, <2, *alte*>, <3, *mann*>} ist z.B. eine Folge, {<1, *der*>, <3, *mann*>} dahingegen nicht.

(d) Eine Folge fängt immer mit 1 an: $alte_2$ und $alte_2$ $mann_3$ sind nur Teilmengen der Folge der_1 $alte_2$ $mann_3$.

(e) *n* = 1 ist zugelassen. Eine Folge mit einem einzigen Element heißt auch ***Einerfolge***.

3. *Notationskonventionen zu Folgen*

Die folgenden Notationskonventionen sind nützlich:

(a) Eine mindestens zweigliedrige Folge wird durch Hintereinanderschreiben ihrer Glieder bezeichnet: ab = {<1, a>, <2, b>}

(b) Bei einer Einerfolge ist die Konvention (a) nicht anwendbar: man könnte die Folge nicht mehr von ihrem einzigen Glied unterscheiden. Für Einerfolgen wird daher eine andere Konvention festgelegt: ab^1 = {<1, ab>}.

(c) Wenn man es nicht mit einer Folge, sondern nur mit einem ‘folgenähnlichen’ Gegenstand zu tun hat (z.B. mit einer Teilmenge einer Folge), dann verwendet man die folgende Konvention: Man schreibt die zweiten Komponenten hintereinander und verwendet die ersten Komponenten als Indizes:
b_2 a_3 u_5 = {<2, b>, <3, a>, <5, u>}
das_2 $kind_5$= {<2, *das*>, <5, *kind*>}
Diese Konvention kann auch bei Folgen angewendet werden.

Die abkürzenden Notationen für Folgen und vergleichbare Funktionen dürfen nicht verwechselt werden mit indizierten Variablen und Konstanten: „f_1“, „$\mathbf{f}_1$“, „nuc^1“, „Wort_1“ („Wort in einem ersten Sinne“) usw. sind nicht-trennbare Ausdrücke.

Ü 23: Warum sind die folgenden Mengen keine Folgen:
(a) { } = ∅ (b) {<3, a>} (c) {<1, a>, <5, u>, <6, s>}
(d) die Menge der <*n*, a>, für die gilt: *n* > 5

Ü 24: Schreiben Sie aus: *karla* *der mann steht auf* *steuer ung*

Ü 25: Wenden Sie die Notationskonventionen auf die Beispiele an, die oben zur Erläuterung der Definition von „Folge“ dienen.

Ü 26: Gilt: ab = a_1 b_2?

4. *Vorkommen und Positionsvarianten einer Folge*

Eine Folge R_2 kann in einer Folge R_1 ***vorkommen***: In diesem Falle gibt es eine Teilmenge R_3 von R_1, die eine Positionsvariante von R_2 ist. Eine ***Positionsvariante*** einer Folge R ist eine Funktion, die sich aus R durch Addieren von ganzen Zahlen zu den ersten Komponenten von R ergibt (die addierten Zahlen können verschieden sein, und es kann sich auch um negative Zahlen bzw. 0 handeln). Zum Beispiel ist das_2 $buch_6$ eine Positionsvariante von das_1 $buch_2$ und eine Teilmenge von $f = lies_1$ das_2 $gerade_3$ neu_4 $herausgekommene_5$ $buch_6$ von_7 XYZ_8 $bloß_9$ $nicht_{10}$. Es gilt also: das_2 $buch_6$ ist ein Vorkommen von das_1 $buch_2$ in f.

5. *Verkettung von Folgen*

Zwei Folgen R_1 und R_2 können auch miteinander verkettet werden: Die ***Verkettung*** von R_1 mit R_2 ist die Folge R, die R_1 und eine bestimmte Positionsvariante R_3 von R_2 als Teilmengen enthält: R_3 ergibt sich aus R_2, indem man zu jeder ersten Komponente von R_2 die Länge von R_1 addiert. (*Die* ***Länge*** einer Folge R_1 ist die größte Zahl im Vorbereich von R_1.) Zum Beispiel ist die Verkettung von $karl^1$ mit $schläft^1$ die Folge *karl schläft*.

Ü 27: Bestimmen Sie die Vorkommen von *hat gesehen*, von $wundert^1$ und von *der junge mann* in f = *der junge mann wundert sich darüber daß er seit tagen keine LKWs mehr gesehen hat.*

C. Die Auswahlfunktion (–,)

Ausdrücke wie „Nom(–,*S*)“ und „VB(–,*S*)“ bezeichnen syntaktische Kategorien: Mengen von syntaktischen Einheiten bzw. Mengen von lexikalischen Wörtern. Ausdrücke wie „Nom“ (für „Nominativ“) und „VB“ (für „VERB“) bezeichnen dahingegen Relationen zwischen syntaktischen Einheiten bzw. lexikalischen Wörtern und sprachlichen Systemen, genauer: Idiolektsystemen *S*. Während Relationen wie Nom und VB primär Gegenstand der (allgemeinen) Sprachtheorie sind, sind Mengen wie Nom(–,*S*) und VB(–,*S*) primär Gegenstand von Einzelsprachtheorien: von angewandten empirischen Theorien, die mithilfe der jeweils vorausgesetzten Sprachtheorie formuliert werden. Von einer Relation wie Nom oder VB läßt sich mithilfe der Auswahlfunktion gerade diejenige Teilmenge des Vorbereichs herausgreifen, die zu einem gegebenen Idiolektsystem *S* gehört. Die Auswahlfunktion kann hierzu folgendermaßen definiert werden:[7]

[7] Eine Verallgemeinerung dieser Funktion, die auf Vorschläge in Carnap (1954: 117) zurückgeht, findet sich in Lieb (1993: 136–138), wo diese Funktion „Bindestrichfunktion“ heißt.

Def.: R sei eine 2-stellige Relation und r sei aus dem Nachbereich von R.
$R(–,r) = \{r_1 | <r_1,r> \in R\}$
[lies: R-von-r ist die Menge aller r_1, für die gilt: das Paar mit den Komponenten r_1 und r ist ein Element von R]

Beispiel: Nom[inativ]$(–,S) = \{f | <f,S> \in$ Nom$\}$. Informell gesagt greift die Auswahlfunktion also die erste Komponente eines jeden Paares heraus, das r (bzw. S) als zweite Komponente enthält.

Definiert wird „(–,)“, also der Name einer Funktion, deren Argumente Paare $<R,r>$ sind, wobei R eine 2-stellige Relation ist und r zum Nachbereich von R gehört. Für einen Ausdruck wie „Nom(–,S)“ kann es dahingegen keine Definition geben: Ein solcher Ausdruck ist aus „Nom“, „(–,)“ und „S“ zusammengesetzt. Zusammengesetzte Ausdrücke kommen von vornherein nicht als Definiendum infrage: ein Definiendum muß atomar sein. (Zu weiteren Anforderungen an Definitionen vgl. u., Abschn. III.)

Syntaktische Kategorien kommen regelmäßig nicht in Isolation, sondern als Elemente von Klassifikationen vor.

D. Klassifikationen und Klassifikationssysteme

1. *Klassifikationen: Beispiel und Begriff*

Klassifikationen und Klassifikationssysteme spielen eine Schlüsselrolle bei der Beschreibung von Mengen und ihren Elementen. Ein Beispiel für eine Klassifikation ist die Menge der einfachen syntaktischen Konstituentenkategorien eines deutschen Idiolektsystems $S = \{$Vf$(–,S)$, Nf$(–,S)$, Pf$(–,S)\}$.[8] Diese Menge ist eine Klassifikation auf der Menge der syntaktischen Wortformen von S = sWf$(–,S)$, schematisch:

sWf$(–,S)$

einfache synt. Konstituentenkategorien von S

Vf$(–,S)$ Nf$(–,S)$ Pf$(–,S)$

Allgemein gilt: Eine ***Klassifikation*** auf einer Menge M_1 ist eine Menge M von Teilmengen von M_1. M_1 heißt auch die ***Ausgangsmenge*** der Klassifikation. Die Klassifikation erschöpft M_1, wobei wir keine der Klassen weglassen dürfen (d.h. zu jeder Klasse in M gehört wenigstens ein Element, das zu keiner der anderen Klassen in M gehört). Und von zwei verschiedenen Elementen der Klassifikation ist keines eine Teilmenge des anderen. Also gehört die leere Menge ($\varnothing$) nur dann zu einer Klassifikation, wenn bereits die Ausgangsmenge M_1 leer ist. Und die Ausgangsmenge M_1 gehört nur dann zu einer Klassifikation auf M_1, wenn diese die

[8] „Vf“: verbale Wortform, „Nf“: nominale Wortform, „Pf“: Partikelform.

Einermenge von M_1 ist. Zusammengefaßt („gdw[g]“ lies: „genau dann, wenn [gilt]“; „$M \setminus \{M_2\}$“ lies: „M ohne $\{M_2\}$“):[9]

Def.: M ist eine ***Klassifikation*** auf M_1 gdwg:

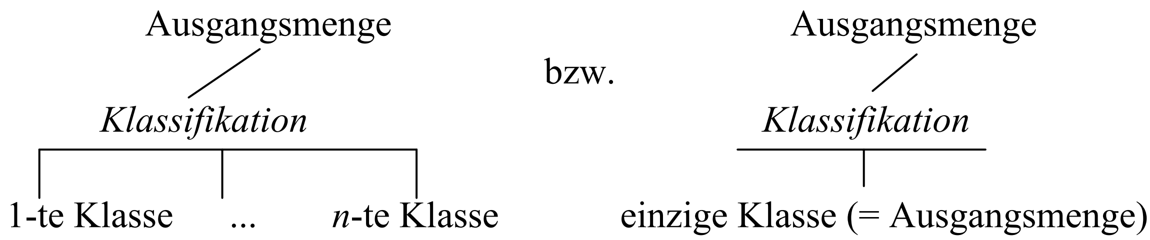
a. $\bigcup M = M_1$,

b. für alle $M_2 \in M$ gilt: $\bigcup M \neq \bigcup (M \setminus \{M_2\})$,

Bedingung (a) stellt sicher, daß die Ausgangsmenge erschöpfend eingeteilt wird: $\bigcup M$ = die Vereinigung von $M = \{r |$ es gibt ein $M' \in M$ mit $r \in M\}$. Bedingung (b) stellt sicher, daß zu jeder Klasse in M wenigstens ein Element gehört, das in keiner der anderen Klassen von M enthalten ist. Daraus folgt insbesondere, daß sich zwei verschiedene Elemente einer Klassifikation höchstens teilweise überlappen:

für alle $M_2, M_3 \in M$ mit $M_2 \neq M_3$ gilt: M_2 ist keine Teilmenge von M_3.

Zur Darstellung von endlichen Klassifikationen verwenden wir Diagramme wie in dem Beispiel, d.h. allgemein:



Die Klassifikation wird also durch einen Schrägstrich mit der Ausgangsmenge verbunden und durch einen waagerechten Strich sowie einen oder mehrere senkrechte Striche mit ihren Elementen.

Einelementige Klassifikationen spielen nur in bestimmten theoretischen Zusammenhängen eine Rolle (bei der Formulierung von gewissen Verallgemeinerungen). Interessant sind in der Regel nur Klassifikationen, die wenigstens zwei verschiedene Elemente enthalten. Solche Klassifikationen sind Klassifikationen im strengen Sinne, kurz: ***strenge Klassifikationen***.

Ü 28: Zeigen Sie, daß $\{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{N}\}$ eine Klassifikation auf $\mathbb{Z}$ ist ($\mathbb{Z}$ = die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}^-$ = die Menge der negativen ganzen Zahlen, $\mathbb{N}$ = die Menge der natürlichen Zahlen (ohne Null)).

Ü 29: Ist $\{\{1, 2\}, \emptyset\}$ eine Klassifikation auf $\{1, 2\}$?

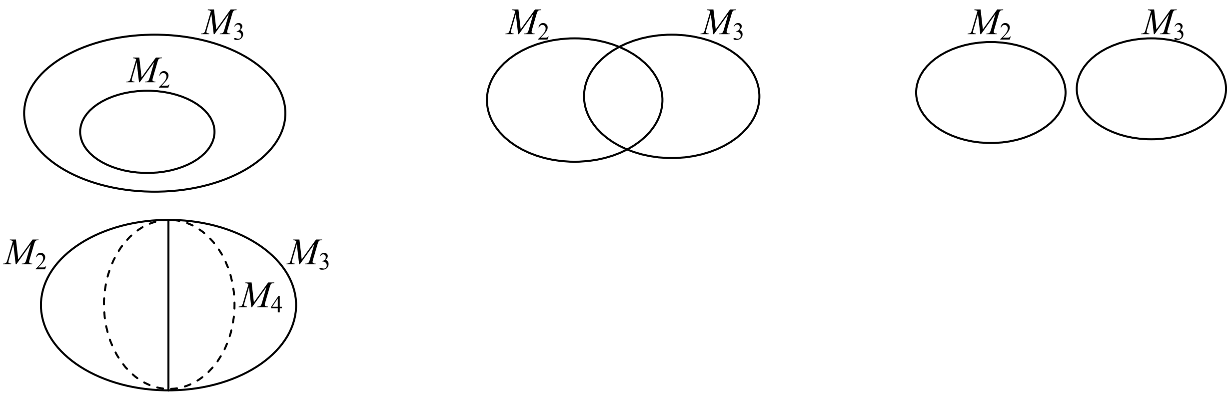
Ü 30: Welche der Beispiel-Klassifikationen sind zugleich strenge Klassifikationen?

[9] In Anlehnung an die Definition in Lieb (1993a: 441); vgl. zum folgenden ausführlicher Lieb (1993: 47 ff., 77–90) bzw. Budde (2000: Abschn. 1.2.3). – Dem deutschen „gdwg“ entspricht im Englischen „iff“ („if and only if“).

2. *Abgrenzung: Klassifikationen, Einteilungen und Zerlegungen*

Klassifikationen müssen einerseits von Einteilungen und andererseits von Zerlegungen unterschieden werden: Im Unterschied zu einer Klassifikation ist eine ***Einteilung*** einer Menge M_1 eine Menge M von Mengen, die die Bedingung (a), aber u.U. nicht die Bedingung (b) erfüllt. Insbesondere ist also $\varnothing \in M$ für $M \neq \varnothing$ zugelassen. Deshalb folgt: Jede Klassifikation auf einer Menge M_1 ist eine Einteilung auf M_1, aber das Umgekehrte gilt nicht. Und eine ***Zerlegung*** zu einer Menge M_1 ist eine Klassifikation auf M_1, für die zusätzlich gilt: keine zwei (verschiedenen) Elemente von M haben einen nicht-leeren Durchschnitt. Zwei verschiedene Elemente einer Zerlegung sind also immer disjunkt (elementfremd). Die entscheidenden Unterschiede seien mithilfe von Venn-Diagrammen veranschaulicht:

bei einer Einteilung von M_1 zugelassen | bei einer Klassifikation auf M_1 zugelassen | bei einer Zerlegung zu M_1 gefordert



In der Literatur wird „Klassifikation“ häufig im Sinne von „Zerlegung“ verwendet. In der Sprachwissenschaft haben wir es jedoch regelmäßig mit Klassifikationen zu tun, die keine Zerlegungen sind. Daher ist eine solche Verwendung von „Klassifikation“ in der Sprachwissenschaft unzweckmäßig. Z.B. ist *grüne*[1] sowohl eine verbale Wortform als auch eine nominale Wortform (Nf) eines Idiolektsystems S des Deutschen. Die Menge der einfachen syntaktischen Konstituentenkategorien von S ist also nur eine Klassifikation auf sWf(–,S), und keine Zerlegung zu sWf (–,S).

Ü 31: Überprüfen Sie, welche der Klassifikationen in den vorigen Übungsaufgaben auch Zerlegungen sind.

Ü 32: Suchen Sie weitere motivierende Beispiele für überlappende Kategorien.

3. *Verhältnis zu Klassifikationsverfahren, -gesichtspunkten und -kriterien*

Da der Begriff „Klassifikation" rein mengentheoretisch definiert ist, braucht es zu einer Klassifikation weder ein ***Klassifikationsverfahren*** noch einen einheitlichen ***Klassifikationsgesichtspunkt*** zu geben. Und umgekehrt: Zu ein und derselben Klassifikation kann es mehrere Klassifikationsverfahren bzw. -gesichtspunkte geben, die diese Klassifikation festlegen. Allgemein gilt: Was ein relevantes ***Kriterium*** einer Klassifikation ist, ist keine mengentheoretische, sondern eine einzelwissenschaftliche Frage. Klassifikationskriterien können sich in komplizierter Weise auf mehrere Gesichtspunkte gleichzeitig beziehen.

Falls es in einer Theorie zu jeder Klasse einer Klassifikation einen definierten Begriff gibt, der zur Bezeichnung dieser Klasse dient, dann gibt es trivialerweise ein Verfahren, dessen Resultat die Klassifikation ist: die Anwendung der definierenden Bedingungen. Und falls diese Begriffe alle ‘gleichartig’ definiert sind, d.h. wenn z.B. in den Bedingungen jeweils auf Gegenstände ‘gleichen Typs’ Bezug genommen wird, dann gibt es trivialerweise auch einen einheitlichen Gesichtspunkt, so daß die Klassifikation eine Klassifikation nach diesem Gesichtspunkt ist. Alle syntaktischen Kategorien gehören z.B. zu Klassifikationen dieser Art.

4. *Klassifikationssysteme*

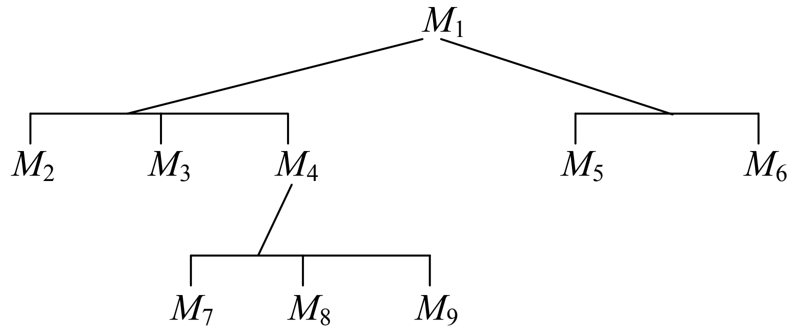
Klassifikationen können häufig zu Systemen zusammengefaßt werden. Zum Beispiel gehört zu jedem Idiolektsystem S ein Klassifikationssystem auf der Menge der syntaktischen Einheiten von S (sEinh(–,S)), und ein Klassifikationssystem auf der Menge der lexikalischen Wörter von S (LW(–,S)). Allgemein gilt: Ein ***Klassifikationssystem*** auf einer Menge M_1 ist eine Menge von zusammenhängenden ***Kreuzklassifikationen*** (auch ***Querklassifikationen*** genannt) und ***Subklassifikationen***. Enthält das Klassifikationssystem ausschließlich strenge Klassifikationen, so handelt es sich um ein ***strenges Klassifikationssystem***. Klassifikationssysteme, die Verfahren zur Ermittlung von Klassifikationen bzw. Klassifikationssystemen sowie die Lehre von diesen Verfahren werden auch als ***Taxonomie*** bezeichnet.

Endliche Klassifikationssysteme können durch Diagramme dargestellt werden. Z.B. sei

$$M' = \{\{M_2, M_3, M_4\}, \{M_5, M_6\}, \{M_7, M_8, M_9\}\}$$

ein Klassifikationssystem auf $M_1 = \bigcup(\bigcup M')$ = die Vereinigung der Vereinigung von M'. Dabei seien $\{M_2, M_3, M_4\}$ und $\{M_5, M_6\}$ Klassifikationen auf M_1, und $\{M_7, M_8, M_9\}$ sei eine Klassifikation auf M_4. M' kann dann durch ein Diagramm der folgenden Art dargestellt werden:

Darstellung von M' durch ein Diagramm



$\{M_2, M_3, M_4\}$ und $\{M_5, M_6\}$ sind Querklassifikationen auf M_1 in M', und $\{M_7, M_8, M_9\}$ ist eine Subklassifikation zu M_1 in M'. M_1 heißt auch ***Ursprung*** des Klassifikationssystems.

Bei Klassifikationssystemen spielen die Endpunkte des Systems eine besondere Rolle: Die ***Endpunkte*** eines Klassifikationssystems M' [EP(M')] sind diejenigen Klassen in M', die in M' nicht Ausgangsmenge einer Klassifikation sind, also im Beispiel: M_2, M_3, M_5, M_6, M_7, M_8 und M_9.

Wenn man die Endpunkte eines Klassifikationssystems anhand eines Diagramms bestimmt, muß man beachten, daß die Ausgangsmenge einer Klassifikation zu mehreren Klassifikationen des Systems gehören kann: Da jede Klassifikation in dem Diagramm nur einmal repräsentiert wird, kann man die Endpunkte des Systems nicht ‘mechanisch’ aus dem Diagramm ableiten. Die diagrammatische Darstellung kann insbesondere dann intuitiv in die Irre führen, wenn sich dieselbe Klasse bei der Anwendung zweier verschiedener Gesichtpunkte ergibt und diese Klasse daher zwei systematisch verschiedene Namen hat. Solche Klassen können sprachtheoretisch regelmäßig nicht ausgeschlossen werden. Sie spielen jedoch in unseren Zusammenhängen faktisch keine Rolle.

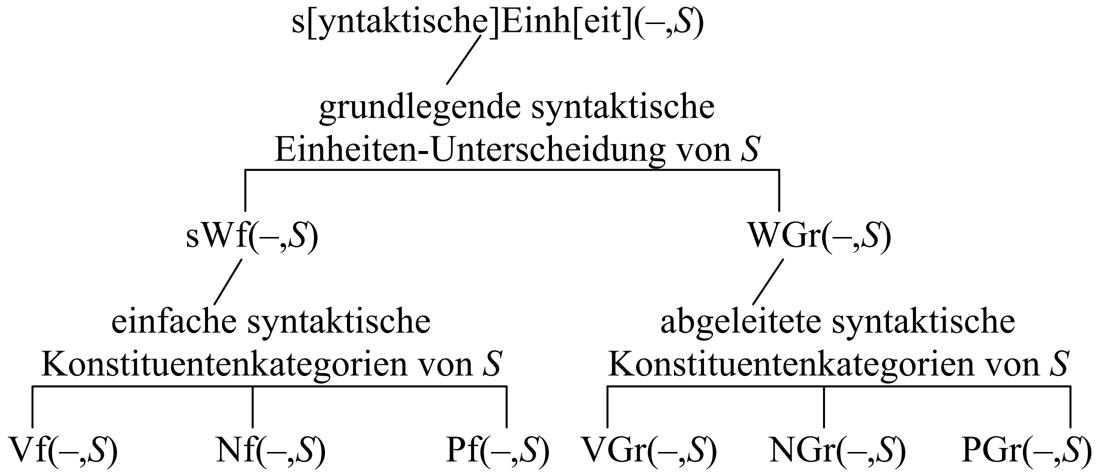
5. *Kategorisierung durch Klassifikationssysteme*

Mithilfe der Endpunkte eines Klassifikationssystems M' lassen sich alle Elemente des Ursprungs von M' in systematischer Weise beschreiben: Die Endpunkte eines Klassifikationssystems auf einer Menge M_1 kommen in den Kategorisierungen der Elemente r von M_1 durch das Klassifikationssystem vor: Eine größte Menge kompatibler Endpunkte des Systems ist eine ***Kategorisierung*** von r ***durch*** das System genau dann, wenn r ein Element von jedem dieser Endpunkte ist. Dabei ist ein Endpunkt M_2 des Systems in dem System ***kompatibel*** mit sich selbst sowie mit jedem Endpunkt $M_3 \neq M_2$ des Systems, wenn gilt: M_3 gehört weder (i) zur selben Klassifikation wie M_2 noch (ii) zu einer Subklassifikation auf einer Klasse, die zur selben Klassifikation wie M_2 gehört. Intuitiv gesagt: Jede relevante Unterscheidung wird genau einmal berücksichtigt.

Ü 33: Welche Endpunkte des Beispiel-Systems M' sind kompatibel miteinander?

Ü 34: Bestimmen Sie alle größten Mengen kompatibler Endpunkte von M'.

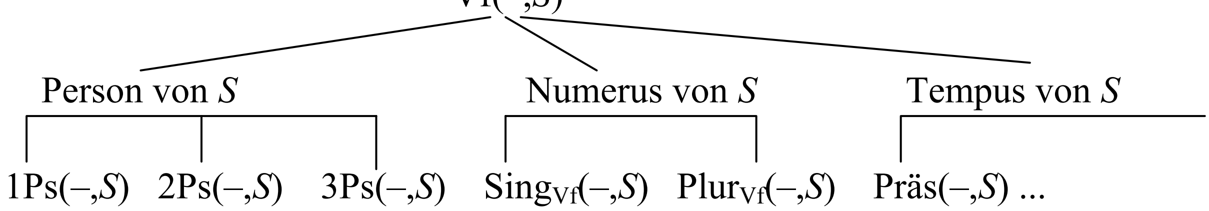
Ü 35: Überprüfen Sie, ob gilt:
{Pf(–,S)} ist eine Kategorisierung von *dort*^{1} durch den Allgemeinen Teil der syntaktischen Einheiten-Ordnung eines deutschen Idiolektsystems S, wobei der Allgemeine Teil der syntaktischen Einheiten-Ordnung eines deutschen Idiolektsystems S die folgende Gestalt hat:



Kategorisierungen durch Klassifikationssysteme mit Querklassifikationen lassen sich auch mithilfe tabellarischer Darstellungen vom Typ der Paradigmentafeln erfassen. Aus der (mengentheoretischen) Definition des Paradigmenbegriffs läßt sich ableiten: Jede Kategorisierung einer Wortform in einem Paradigma ist eine Kategorisierung der Wortform durch die syntaktische Einheiten-Ordnung bzw. durch den allgemeinen Teil der syntaktischen Einheiten-Ordnung des jeweiligen Idiolektsystems. Das umgekehrte gilt jedoch im allgemeinen nicht.

Ü 36: Mit welchen Kategorisierungen sollte die Verbform *geht*^{1} im Paradigma *gehen*$^{\mathrm{P}}$ erscheinen?

Ü 37: Welche Kategorisierungen ergeben sich für die Verbform *geht*^{1} durch die syntaktische Einheiten-Ordnung eines deutschen Idiolektsystems, wenn man den verbalen Teil dieser Ordnung (mit der Tradition) etwa folgendermaßen ansetzt:



II. Logik (Grundlagen)

A. Aussagenlogik

Die Aussagenlogik ist Grundlage aller anderen Logiksysteme: Sie beschreibt, wie sich die Wahrheitswerte komplexer Sätze aus den Wahrheitswerten einfacher, aussagenlogisch nicht weiter zerlegbarer Sätze ableiten lassen. Betrachten wir dazu einige Beispiele:

(1) a. *Paula ißt einen Apfel.*
b. *Peter wäscht ab und Anna geht einkaufen.*
c. *Anna geht nicht einkaufen.*

Während (1.a) aussagenlogisch nicht weiter zerlegt werden kann, läßt sich (1.b) in die Teilsätze *Peter wäscht ab* und *Anna geht einkaufen* sowie den Satzverknüpfer *und* zerlegen.[10] Weitere Satzverknüpfer („Junktoren“) sind *oder* und *wenn ... dann*:

(2) a. *Peter liest ein Buch oder er spielt Schach.*
b. *Regnet es, dann wird die Straße naß.*
c. *Wenn es regnet, dann wird die Straße naß.*
d. *Wenn es regnet, wird die Straße naß.*

Die Beispiele zeigen, daß den aussagenlogischen Junktoren in der natürlichen Sprache Konstruktionen unterschiedlicher Art entsprechen: *und* und *oder* sind koordinierende Konjunktionen, *dann* ist ein Adverb und *wenn* ist eine Subjunktion (eine ’subordinierende Konjunktion’). Von diesen Unterschieden wird in der Logik abgesehen („abstrahiert“). Abgesehen wird auch von Wortstellungsphänomenen: (1.c) läßt sich aussagenlogisch zerlegen in *nicht* und *Anna geht einkaufen*. Der Satz *Anna geht einkaufen* ist aussagenlogisch nicht weiter zerlegbar; daß im Deutschen die Negation dann ’in der Mitte’ des Satzes stehen muß, spielt keine Rolle. Eine logisch äquivalente Formulierung ist etwa:

(3) *Es ist nicht der Fall, daß Anna einkaufen geht.*

(1.c) und (3) haben denselben Wahrheitswert: (1.c) ist genau dann wahr, wenn auch (3) wahr ist. Wenn wir „p“ als Abkürzung für *Anna geht einkaufen* verwenden, dann haben beide Sätze der natürlichen Sprache die (aussagenlogische) Struktur „nicht p“, symbolisch: $\neg p$. Die Negation ist kein Junktor, sondern ein (einstelliger) Operator. Die Junktoren werden dementsprechend auch als zweistellige Operatoren bezeichnet.

Die Negation und die drei Junktoren genügen, um die aussagenlogische Strukter beliebiger Sätze zu beschreiben.[11] Dabei kommt es auf den konkreten

[10] Da es in diesem Text auf die Unterscheidungen zwischen Wörtern, ihren Formen, ihren Vorkommen und den syntaktischen Grundformen nicht weiter ankommt, wird eine stark vereinfachte Notation verwendet. Zur Übung kann man sich klar machen, wie eine vollständig präzise Formulierung jeweils lauten müßte.

Inhalt eines Satzes nicht an: In der Aussagenlogik interessiert man sich nur für seinen Wahrheitswert und wie dieser sich ggfs aus den Wahrheitswerten der Teilsätze und der Wirkung der Operatoren ableiten läßt. Die Wirkung („Bedeutung“) der Operatoren läßt sich mithilfe von Wahrheitswerte-Tafeln beschreiben („w“ für „wahr“ und „f“ für „falsch“):

(4)

p	¬p
w	f
f	w

p	q	p ∧ q	p ∨ q	p → q
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

Verknüpft man zwei beliebige Sätze p und q mit *und* (symbolisch: ∧), dann ist der Gesamtsatz p ∧ q genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr ist (vgl. Beispiel (1.b)). Verknüpft man zwei beliebige Sätze p und q mit *oder* (symbolisch: ∨), dann ist der Gesamtsatz p ∨ q genau dann wahr, wenn wenigstens einer der beiden Teilsätze wahr ist. Dabei ist zu beachten, daß das logische *oder* immer inklusiv zu verstehen ist: Der Gesamtsatz ist auch dann wahr, wenn beide Teilsätze wahr sind. Das logische *oder* ist also nie als „entweder – oder“ zu lesen.

Besondere Aufmerksamkeit verdient schließlich die Implikation: Ein Satz der Form „wenn p, dann q“ („p impliziert q“, symbolisch: p → q) ist genau dann falsch, wenn der Vordersatz p wahr und der Nachsatz q falsch ist. Der Vordersatz heißt auch „Antezedens“, der Nachsatz „Konsequens“. Dabei ist es völlig unerheblich, ob zwischen den Inhalten der beiden Sätze irgendein Zusammenhang besteht: Von diesen Inhalten wird in der Aussagenlogik ja gänzlich abgesehen. Diese Festlegung, die mit Blick auf die Analyse der logisch gültigen Schlüsse sehr sinnvoll ist, wirkt aus Sicht der natürlichen Sprache gelegentlich durchaus merkwürdig:

(5) a. *Wenn 3+3 = 6 ist, dann schneiden sich zwei Geraden in höchstens einem Punkt.*
b. *Wenn der Mond aus rotem Plüsch ist, dann ist 3+3 = 6.*
c. *Wenn 4 durch 3 teilbar ist, dann ist 3 eine gerade Zahl.*
d. *Wenn 3 durch 2 teilbar ist, dann ist 3 eine gerade Zahl.*

Alle Implikationen in (5) sind wahr, wie man sich anhand der Wahrheitswerte-Tafel leicht überzeugen kann. Dies zeigt aber nur, daß die Bedeutung von *wenn ...*

[11] Tatsächlich genügen sogar die Negation und einer der drei Junktoren, da alle anderen – der insgesamt 16 – zweistelligen Operatoren dann mithilfe dieser beiden Operatoren ausgedrückt werden können. Das führt jedoch ggfs zu sehr umständlichen Formulierungen. Wir verwenden daher wie üblich alle drei Junktoren.

dann in der natürlichen Sprache durch die aussagenlogische Implikation noch nicht vollständig erfaßt wird.

Eine zweite Schwierigkeit besteht häufig darin, zwischen der Wahrheit des Nachsatzes q und der Gültigkeit oder Wahrheit der Implikation selbst zu unterscheiden. Die Wertetafel erfaßt gerade den alten Grundsatz, daß aus Falschem (Vordersatz) schlechthin alles (Wahres und Falsches) folgt. Diese Folgerung selbst ist wahr (ein gültiger Schluß), auch wenn die Ergebnisse solcher Folgerungen herzlich uninteressant sind. Was uns für gewöhnlich interessiert, ist der Fall, daß der Vordersatz wahr ist. Denn wenn wir wissen, daß ein Satz p gilt, und daß außerdem die Implikation $p \rightarrow q$ gilt, dann dürfen wir schließen, daß auch q gilt („modus ponens“):

(6) a. *Wenn 4 durch 2 teilbar ist, dann ist 4 eine gerade Zahl.*
b. *4 ist durch 2 teilbar.*

---

c. *4 ist eine gerade Zahl.*

Der Strich deutet an, daß (c) aus (a) und (b) folgt.

Ü 38: Zerlegen Sie die folgenden Sätze aussagenlogisch. Beispiele:

Peter liest ein Buch oder er spielt Schach

Wir setzen:[12] p := *Peter liest ein Buch*; q := *er* (*Peter*) *liest ein Buch*

Aussagenlogische Struktur des Beispielsatzes: $p \vee q$ (lies: „p oder q“)

Anna geht nicht einkaufen.

Es ist nicht der Fall, daß Anna einkaufen geht.

Wir setzen: p := *Anna geht einkaufen.*

Aussagenlogische Struktur der beiden Beispielsätze: $\neg p$ (lies: „nicht p“)

Wenn 4 durch 2 teilbar ist, dann ist 4 eine gerade Zahl.

Wir setzen: p := *4 ist durch 2 teilbar*; q := *4 ist eine gerade Zahl.*

Aussagenlogische Struktur des Beispielsatzes: $p \rightarrow q$ (lies: „p impliziert q“)

Stellen Sie ggfs fest, welche Aussagen logisch äquivalent sind, indem Sie die nicht weiter zerlegbaren Sätze durch geeignete Variablen darstellen und die Wahrheitswerte der zusammengesetzten Sätze mithilfe von Wertetafeln darstellen. Zwei Sätze p und q sind logisch äquivalent, wenn sich für p und für q bei jeder Belegung der Teilsätze mit einem Wahrheitswert genau dieselben Wahrheitwerte ergeben.

---

[12] Das Zeichen „:=“ deutet die Setzung (Definition) an (lies: „ist per definitionem gleich“). Hier gilt die Definition der (lokalen) Konstanten „p“, „q“ usw. nur solange, bis diese neu definiert werden. Damit vermeiden wir eine unübersichtliche und sachlich nicht relevante Indizierung („p_1“, „p_2“, ...).

(7) a. *Es regnet oder es schneit.*
b. *Es regnet.*
c. *Es regnet nicht.*
d. *Es regnet oder es regnet nicht.*

(8) a. *Wenn es brennt, darf der Fahrstuhl nicht benutzt werden.*
b. *Wenn es nicht brennt, darf der Fahrstuhl benutzt werden.*
c. *Wenn der Fahrstuhl nicht benutzt werden darf, brennt es.*
d. *Falls der Fahrstuhl benutzt werden darf, brennt es nicht.*

(9) a. *Es ist nicht der Fall, daß es nicht regnet.*
b. *Es regnet.*

(10) a. *Es ist nicht der Fall, daß es donnert und blitzt.*
b. *Es donnert nicht oder es blitzt nicht.*

Ü 39: Bei den folgenden Sätzen und Satzgruppen bereitet die aussagenlogische Zerlegung Probleme unterschiedlicher Art. Beschreiben Sie die Grenzen dieses Vorgehens, wenn man die logischen Beziehungen zwischen Sätzen der natürlichen Sprache zu erfassen versucht. Manchmal genügt es schon, einen Satz vor der Analyse in eine besser analysierbare Form zu bringen.

(11) *Karla und Anton lesen Zeitung, emil liest ein Buch.*

(12) *Karla und Anton spielen Schach.*

(13) *Karla und Anton heiraten.*

(14) *Robert trinkt Milch oder Kaffee.*

(15) *Anna trinkt kein Bier.*

(16) a. *Niemand mag Anna.*
b. *Alle mögen Anna.*
c. *Jemand mag Anna.*

(17) Klassisches Beispiel für ein gültiges Schlußverfahren
a. *Alle Menschen sind sterblich.*
b. *Sokrates ist ein Mensch.*
c. *Sokrates ist sterblich.*

Die letzte Übung zeigt, daß es möglich sein sollte, auch die innere Struktur von Sätzen berücksichtigen zu können. Dies erreichen wir mit den Mitteln der Prädikatenlogik.

B. Prädikatenlogik

In der Prädikatenlogik werden zusätzlich die Beziehungen zwischen den Satzgliedern eines Satzes erfaßt. Daher müssen jetzt auch den Satzgliedern Bedeutungen zugeordnet werden. Im einfachsten Fall kann man annehmen, daß die Bedeutung eines Eigennamens ein Individuum ist („Eigennamen bezeichnen Einzelgegenstände“), und daß die Bedeutung eines (logischen) Prädikats eine Menge von Individuen ist: In

(18) *Anna schläft.*

ist dann die Bedeutung von *Anna* die Person Anna, und die Bedeutung von *schläft* ist die Menge aller Schlafenden. Damit ist der Satz (18) genau dann wahr, wenn Anna zu der Menge der Schlafenden gehört.

Diese einfache Lösung genügt für die Zwecke der Logik, nicht jedoch für die Beschreibung der Bedeutungen natürlichsprachlicher Sätze. Das soll uns im Augenblick aber nicht stören.

Nicht verwechseln darf man
(a) Eigennamen im logischen Sinne und Eigennamen im grammatischen Sinne,
(b) Prädikate im logischen Sinne und Prädikate im grammatischen Sinne.
Beispiele für Eigennamen im logischen Sinne, die keine Eigennamen im grammatischen Sinne sind:

(19) a. *der Papst (zum Zeitpunkt der Äußerung)*
b. *die Königin von England*
c. *der Autor des „Zauberbergs“*

Beispiele für Prädikate im logischen Sinne (unterstrichen), die keine Prädikate im grammatischen Sinne sind:

(20) a. *Peter <u>ist größer als</u> Anton.*
b. *Peter <u>ist ein Bruder von</u> Anton.*
c. *Peter <u>ist fleißig</u>.*

Das Prädikat im grammatischen Sinne besteht nach überwiegender Auffassung in allen drei Fällen nur aus dem Vorkommen von *ist*. Für Sätze wie (20.c) wird jedoch auch in der Sprachwissenschaft z.T. angenommen, daß das grammatische Prädikat *ist fleißig* ist. Das heißt: Auch innerhalb der Sprachwissenschaft ist der Begriff des Prädikats mehrdeutig.

Die Unterscheidung von Eigennamen und Prädikaten genügt nun noch nicht, um die logische Struktur von einem Schluß wie in (17) zu erfassen: *alle* bzw. *alle Menschen* ist weder ein Eigenname noch ein Prädikat im logischen Sinne. Eine zweite Gruppe von problematischen Sätzen illustriert das folgende Beispiel:

(21) *Wenn Karl den Emil besucht, dann bringt er ihm einen Kaktus mit*

Mit *er* bezieht sich der Sprecher auf dieselbe Person wie mit *Karl*, man sagt auch: *er* und *Karl* sind koreferent („haben denselben Referenten"), und Analoges gilt für *ihm* und *den Emil*.

Beide Probleme können dadurch gelöst werden, daß man Variablen (für Individuen) sowie Quantoren verwendet und die Sätze in eine geeignete Form bringt:

(22) a. *Alle Menschen sind sterblich.*
b. *Für alle (Individuen) x gilt: wenn x ein Mensch ist, dann ist x sterblich.*

(23) a. *Jemand schnarcht.*
b. *Es gibt (ein Individuum) x, für das gilt: x schnarcht.*

Zu (21):

(24) a. *Es gibt ein (Individuum) x, für das gilt: x heißt Karl, und wenn x den Emil besucht, dann bringt x dem Emil einen Kaktus mit.*
b. *Es gibt ein (Individuum) x und ein (Individuum) y, für die gilt: x heißt Karl, y heißt Emil, und wenn x den y besucht, dann bringt x dem y einen Kaktus mit.*

Diese Beschreibung ist noch sehr grob, zeigt aber ganz gut die Idee: Mithilfe von Platzhaltern kann man Quantoren (wie *alle* oder *jemand*) und in substantivischen Ausdrücken versteckte (logische) Prädikate aus dem Satz herausziehen.

Über diese ersten Anfänge der Prädikatenlogik werden wir in dem Propädeutikum nicht hinaus kommen. Aber vielleicht ist dies ja dem einen oder anderen Anstoß genug, sich im Selbststudium (s. Literaturhinweise) oder in entsprechenden Lehrveranstaltungen gründlicher mit der Logik zu beschäftigen: Die Prädikatenlogik mit Quantoren ist ein äußerst mächtiges Werkzeug, das seit dem Ende des 19. Jahrhunderts allen Wissenschaften zur Verfügung steht und ohne das wissenschaftliches Arbeiten (auch auf der Ebene studentischer Arbeiten) heute nicht mehr möglich ist: Die aristotelische Logik, die bereits Schlüsse wie in (17) erfassen konnte, jedoch insgesamt bei weitem nicht so leistungsfähig ist wie die Prädikatenlogik, war bis ins 19. Jahrhundert hinein das einzige zur Verfügung stehende Werkzeug und gehörte zur Grundausbildung eines jeden Akademikers. Der Sache nach hat diese Rolle heute die Prädikatenlogik übernommen, auch wenn sie in den Studienplänen einiger Fächer nicht einmal erwähnt wird.

Ü 40: Versuchen Sie, die Sätze aus den Übungen zur Aussagenlogik prädikatenlogisch zu analysieren.

C. Mengenoperationen, Relationen zwischen Mengen und aussagenlogische Junktoren (Übersicht)

A, B, C: beliebige Mengen

symbolisch	wortsprachlich	Definition	Wahrheitswerte-Tabelle		
$\mathbf{A \cap B}$	A geschnitten mit B (Schnittmenge)	$:= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	$x \in A$	$x \in B$	$\mathbf{x \in A \wedge x \in B}$
			W	W	**W**
			W	F	**F**
			F	W	**F**
			F	F	**F**
$\mathbf{A \cup B}$	A vereinigt mit B (Vereinigungsmenge)	$:= \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	$x \in A$	$x \in B$	$\mathbf{x \in A \vee x \in B}$
			W	W	**W**
			W	F	**W**
			F	W	**W**
			F	F	**F**
$\mathbf{A \setminus B}$	A ohne B (Differenzmenge)	$:= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	$x \in A$	$x \in B$	$\mathbf{x \in A \wedge x \notin B}$
			W	W	**F**
			W	F	**W**
			F	W	**F**
			F	F	**F**
$\mathbf{A \subseteq B}$	A ist Teilmenge von B	gdw $(\forall x)\ (x \in A \rightarrow x \in B)$	$x \in A$	$x \in B$	$\mathbf{x \in A \rightarrow x \in B}$
			W	W	**W**
			W	F	**F**
			F	W	**W**
			F	F	**W**
$\mathbf{A = B}$	A ist gleich B	gdw $(\forall x)\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$	$x \in A$	$x \in B$	$\mathbf{x \in A \leftrightarrow x \in B}$
			W	W	**W**
			W	F	**F**
			F	W	**F**
			F	F	**W**

Gleichungen:

$A \cap A = A$
$A \cup A = A$

$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$ Kommutativität

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Assoziativität

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Distributivität

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ De Morgansche Regeln

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \varnothing = A$
$A \setminus A = \varnothing$
$A \setminus \varnothing = A$

Leere Menge:

$\varnothing := \{x \mid x \neq x\}$

Sätze:

$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
$A \setminus B \subseteq A$
$\varnothing \subseteq A \subseteq A$
$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$
$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \leftrightarrow A = B$

Analoge Gleichungen und Sätze lassen sich für die aussagenlogischen Operatoren formulieren, wenn man „$\cap$“ durch „$\wedge$“, „$\cup$“ durch „$\vee$“ und „\“ durch „$\wedge \neg$“ ersetzt.

Übungen:

1. Veranschaulichen Sie sich die Gültigkeit der Gleichungen und Sätze mithilfe von Venn-Diagrammen.
2. Formulieren Sie die entsprechenden aussagenlogischen Gesetze. Wodurch ist „$\subseteq$“ zu ersetzen?

D. Wichtige Schlußregeln (Übersicht)

1. *Aussagenlogik*

a. Modus ponens (Abtrennungsregel)

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline \quad B \end{array}$$

b. Modus tollens (Widerlegungsregel)

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

c. Schnittregel (Disjunktiver Syllogismus)

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \vee C \\ \hline B \vee C \end{array} \qquad \begin{array}{r} A \vee B \\ \neg A \\ \hline B \end{array}$$

d. Kontraposition

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \hline \neg B \to \neg A \end{array}$$

e. Abschwächung der Konjunktion

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline A \end{array} \qquad \begin{array}{r} A \wedge B \\ \hline B \end{array}$$

f. Disjunktionseinführung

$$\begin{array}{l} A \\ \hline A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{r} B \\ \hline A \vee B \end{array}$$

g. Konjunktionseinführung

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline A \wedge B \end{array}$$

h. Kettenschluß

$$\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ \hline A \to C \end{array}$$

i. Reductio ad absurdum

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \to \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

2. *Prädikatenlogik*

a. Allbeseitigung (universelle Spezialisierung)

Wenn P(x) für alle x gilt, dann auch P(a) für ein konkretes Individuum a.

$$\begin{array}{c} (\forall x)\, P(x) \\ \hline P(a) \end{array}$$

b. Existenzbeseitigung (existenzielle Spezialisierung)

Es gibt wenigstens ein Individuum, das bei der Einsetzung seines Namens anstelle von x zu einer wahren Aussage führt. Die ∃-Beseitigung gibt diesem Individuum einen Namen (a).

$$\begin{array}{c} (\exists x)\, P(x) \\ \hline P(a) \end{array}$$

III. Definitionen und wissenschaftliche Theorien

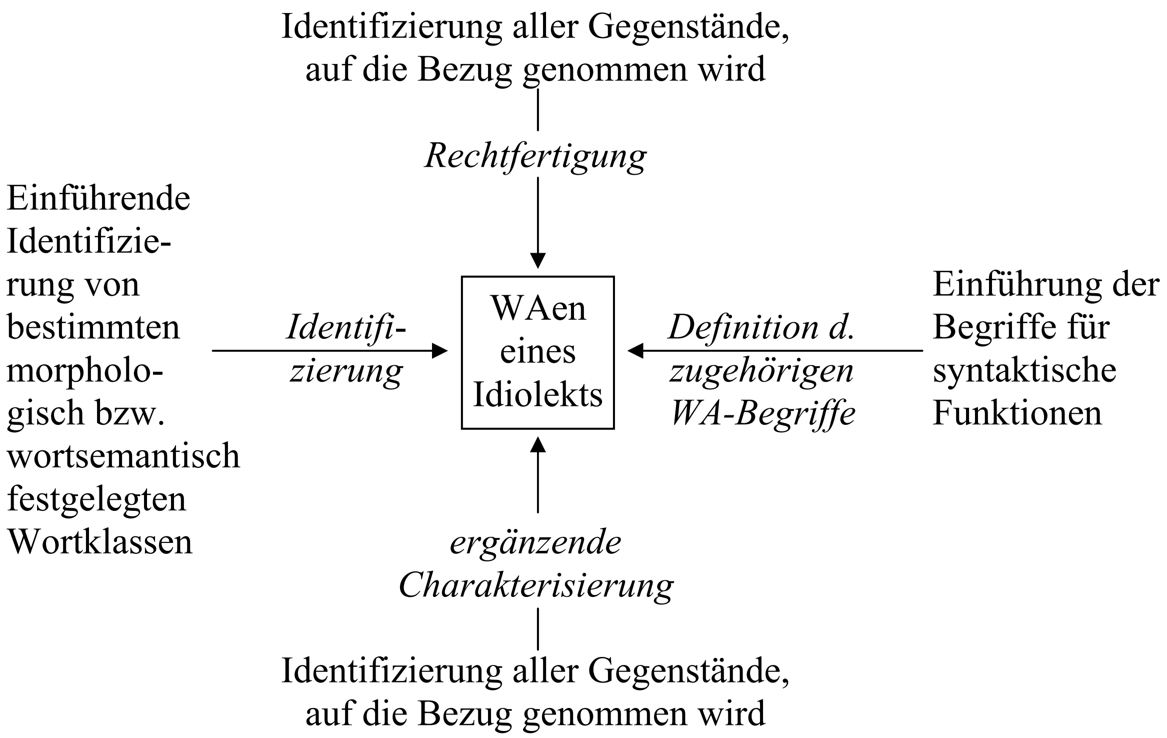
A. Anmerkungen zum Aufbau (sprach)wissenschaftlicher Theorien

Eine ***Theorie*** läßt sich in erster Annäherung auffassen als eine strukturierte Menge von Aussagen, deren Gültigkeit mit der Theorie behauptet wird. Bei den gültigen Aussagen einer Theorie kann man unterscheiden zwischen den ***Axiomen***, den ***Definitionen*** und den (beweisbaren) ***Sätzen***. Allerdings kann man einer Aussage nicht a priori ansehen, ob sie ein Axiom, eine Definition oder ein beweisbarer Satz ist: Zu ein und derselben Menge gültiger Aussagen kann es ganz unterschiedliche Axiomatisierungen geben.

Entscheidend für die Struktur einer Theorie sind ihre Axiome (‘Grundannahmen’): Die Definitionen sind als Abkürzungen prinzipiell eliminierbar; und als Implikationen aus den Axiomen entfalten die beweisbaren Sätze lediglich das, was in den Axiomen bereits erfaßt ist. Neben den Axiomen muß man daher streng genommen nur noch die Regeln für gültige Schlüsse kennen, um sich alle Sätze einer Theorie selbst herleiten zu können.

In den empirischen Wissenschaften besteht die entscheidende Aufgabe nun offensichtlich darin, die Menge der gültigen Aussagen überhaupt erst einmal zu ermitteln und dann die Theorie so aufzubauen, daß sie auch von ihrer Struktur her möglichst gut zu den empirischen, d.h. zu den im weitesten Sinne erfahrbaren Phänomenen ‘paßt’. Dabei kommt den Definitionen eine Schlüsselrolle zu: definiert werden Begriffe für empirisch relevante Phänomene – und nicht Bezeichnungen für ‘Äpfel-und-Birnen’. Welche formalen Anforderungen an Definitionen zu stellen sind, gehört daher mit zum Grundlagenwissen für jeden, der sich in eine Wissenschaft einarbeiten will, und soll in einem eigenen Abschnitt behandelt werden (s.u.).

Von der Definition eines Begriffs zu unterscheiden ist die ***Identifizierung*** der Gegenstände, die unter den Begriff fallen: Beides kann, muß aber nicht parallel laufen. Insbesondere in der Sprachwissenschaft spielt die Unterscheidung von Definition (der Begriffe) und Identifizierung (der Gegenstände) wegen des Problems der zwischensprachlichen Variabilität eine zentrale Rolle. Der griechisch-römischen Grammatiktradition liegt nämlich eine Auffassung zugrunde, bei der die Begriffe für so zentrale Gegenstände wie die Wortarten, die Flexionskategorien usw. in der ***(Allgemeinen) Sprachtheorie***, also einzelsprachübergreifend, mit Bezug auf ihre satzsemantischen Funktionen ***definiert*** werden, die konkreten Objekte (Wortklassen, Formenklassen usw.) aber in den ***Einzelsprachtheorien*** in einzelsprachspezifischer Weise mit Bezug auf ihre formalen Eigenschaften ***(einführend) identifiziert*** werden: Zum Beispiel sind Verben Wörter, die als Kern einer Prädikation vorkommen können (Definitionsidee für „Verb“); und die Verben eines gegenwartsdeutschen Idiolekts sind gerade die konjugierbaren Wörter in diesem Idiolekt (Identifizierung, die nur für Sprachen mit Flexion funktionieren kann).[13] Hier laufen Definition und Identifikation also gerade nicht parallel, und deren Nichtunterscheidung führt gegebenenfalls zu gegenstandslosem Streit. Darüberhinaus haben die Verben dieses Idiolekts weitere charakteristische Eigenschaften syntaktischer, semantischer und morphologischer Art, die in einer ***vollständigen grammatischen Charakterisierung*** dieser Wortklasse selbstverständlich auch noch zu erfassen sind. Und schließlich bedürfen die Annahmen, die zur Abgrenzung (‘definitio’ im wörtlichen Sinne) gerade dieser Wortklasse als der Klasse der Verben (dieses Idiolekts) geführt haben, der ***Rechtfertigung***. Hierzu kann man auf Phänomene beliebiger Art Bezug nehmen, einschließlich solcher des Sprachwandels und des Spracherwerbs. Insgesamt hat man es also mit vier verschiedenen Aufgaben mit jeweils spezifischen Voraussetzungen zu tun (am Beispiel der Wortarten [WAen]; vgl. Budde 2000):



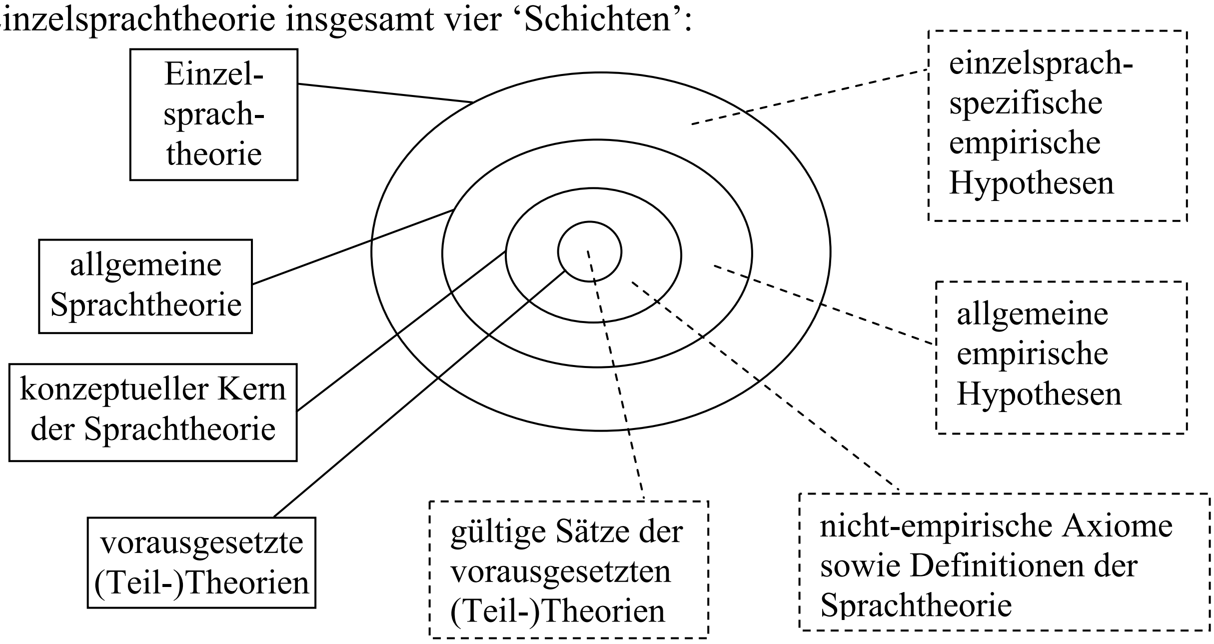
Bei den Axiomen einer empirischen Theorie kann man desweiteren unterscheiden zwischen solchen, die in den Definitionen vorausgesetzt werden, und solchen, die im engeren Sinne empirisch sind: erstere gehören zum ***begrifflichen*** oder ***konzeptuellen Kern*** der Theorie, letztere enthalten die eigentlichen

---

[13] Unter einem Idiolekt verstehen wir einen größten bzgl. aller innersprachlichen Variationsmöglichkeiten ***homogenen*** Anteil eines Sprechers an einer historischen Einzelsprache wie dem Deutschen. Eine Grammatik des Deutschen bzw. einer Varietät des Deutschen ist dann eine Abstraktion zu einzelnen Idiolektgrammatiken. In den meisten Zusammenhängen kann der Unterschied zwischen Idiolektgrammatiken und Grammatiken für ganze Varietäten vernachlässigt werden, wenn man sich die Varietät als Menge von Idiolekten vorstellt, die durch eines ihrer Elemente vertreten wird.

empirischen Erkenntnisse. Daß z.B. bisher keine Sprache ohne Verben gefunden wurde (wohl aber Sprachen ohne Adjektive und möglicherweise sogar Sprachen ohne Substantive), sollte z.B. bei der Definition der Wortartbegriffe nicht vorausgesetzt werden, sondern als empirische Hypothese unter Voraussetzung der Definition von „Verb“ in eine Theorie der Wortarten eingehen. Erweist sich die Hypothese als falsch, bleibt die Definition der Wortartbegriffe davon ganz unberührt. Würde man sie dahingegen bei der Definition der Wortartbegriffe voraussetzen, wären nicht nur alle Verwendungen von „Verb“ im Nachhinein gegenstandslos geworden und müßten bei der Korrektur der Theorie überprüft werden, sondern die Feststellung, daß es in allen Sprachen Verben gibt, wäre in dieser Theorie immer trivial: sie würde bereits aus den Definitionen folgen. Es gehört also zu den Aufgaben des Theoretikers, eine Theorie möglichst so aufzubauen, daß die eigentlich empirischen Aussagen nicht schon in den Definitionen vorausgesetzt werden.

Bei den eigentlich empirischen Aussagen können wir desweiteren zwischen den allgemeinen und den einzelsprachspezifischen unterscheiden. Und auf der anderen Seite setzen sprachwissenschaftliche Theorien regelmäßig voraus, daß z.B. die Sätze der Mengenlehre und der Logik gelten. Damit ergeben sich für eine Einzelsprachtheorie insgesamt vier ‘Schichten’:



Auch wenn die hier getroffenen Unterscheidungen in der Literatur (nicht nur der sprachwissenschaftlichen) kaum je explizit gemacht werden, so erleichtern sie doch die systematische Lektüre und Erarbeitung von Forschungszusammenhängen ganz erheblich – und nicht selten wird man verblüfft feststellen, daß sich ein Forschungsstreit von allein erledigt: unterscheidet man, was hier unterschieden wurde, so zeigt sich oft, daß und warum alle Parteien ‘ein bißchen’ recht haben, aber keine für sich allein ein hinreichend differenziertes Gesamtbild zeichnen

B. Definitionen

Eine ***(Nominal-)Definition*** dient dazu, Abkürzungen für mehr oder weniger komplexe Sachverhaltsbeschreibungen einzuführen. Die Grundform einer Definition ist daher eine Äquivalenz der Form „A gdw B", wobei A der zu definierende Ausdruck (das ***Definiendum***) und B der definierende Ausdruck (das ***Definiens***) ist. Zum Beispiel ist in

(25) *Definition:*
n ist eine ***Primzahl*** genau dann, wenn gilt: *n* ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat.

das Definiendum der Ausdruck „*n* ist eine Primzahl" und das Definiens der Ausdruck „*n* ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat" (*Übung*: An welchem sprachlichen Ausdruck erkennt man, daß der Gesamtausdruck eine Äquivalenz ist?). Der wichtigste Teil des Definiendums – der neu eingeführte Terminus – wird meistens noch einmal besonders hervorgehoben. Oft wird dieser ebenfalls „Definiendum" genannt.

Eine Äquivalenz der Form „A gdw B" läßt sich nun auflösen in „A impliziert B und B impliziert A", also in die Konjunktion zweier Implikationen.[14] Bei einer Implikation der Form „A impliziert B" heißt A auch ***hinreichende Bedingung*** (dafür, daß B gilt) und B ***notwendige Bedingung*** (dafür, daß A gilt). Dies hängt mit den beiden folgenden Schlußregeln zusammen (vgl. die Übersicht zu den Schlußregeln):

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{r} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

(Modus ponens) (Modus tollens)

Nach dem Modus ponens darf man aus der Gültigkeit der Implikation und der Aussage A auf die Gültigkeit von B schließen, nach dem Modus tollens aus der Gültigkeit der Implikation und der Nichtgültigkeit von B auf die Nichtgültigkeit von A. Das Definiens einer Definition beschreibt daher eine zugleich hinreichende und notwendige Bedingung für das, was von dem Definiendum bezeichnet wird. Setzt sich das Definiens aus mehreren Bedingungen zusammen, so ist auch jede

[14] Zur Terminologie: Man sagt „A impliziert B" oder „Wenn A, dann B" bzw. „A ist eine Paraphrase von/zu B" oder „A ist (logisch) äquivalent zu B" oder „A gdw B". Die Relationen heißen „Implikation" bzw. „Paraphrase" oder „Äquivalenz". Zu beachten ist: Aussagen der Form „A impliziert B" usw. heißen ebenfalls „Implikation", und Aussagen der Form „A gdw B" usw. „Äquivalenz", aber *nicht*: „Paraphrase".

dieser Teilbedingungen eine notwendige Bedingung, im allgemeinen aber keine hinreichende Bedingung mehr.[15]

Weil das Definiendum lediglich eine Abkürzung für das Definiens ist, muß es in allen Aussagen einer Theorie durch das Definiens ersetzt werden können, ohne daß sich der Wahrheitswert der Aussagen ändert. Welche Anforderungen müssen Definitionen nun erfüllen, damit durch sie hierbei keine Widersprüche in eine Theorie hineinkommen? Dies ist in der Logik eingehend untersucht und 1957 von Suppes zusammengefaßt worden (vgl. auch v. Savigny 1970: 126; Wunderlich 1991: 95):

(26) ***Anforderungen an eine Nominaldefinition in der Grundform***

a. Die Definition ist eine Äquivalenz.
b. Das Definiendum ist eindeutig als solches identifizierbar.
c. Das Definiendum ist atomar, d.h. nicht zusammengesetzt aus mehreren Begriffen.[16]
d. Im Definiendum kommt jede Variable, die vorkommt, genau einmal vor.
e. Im Definiens und im Definiendum kommen genau dieselben Variablen frei vor.[17]
f. Der definierte Terminus ist neu, d.h.:
   (i) Er kommt weder im Definiens seiner eigenen Definition vor noch in dem einer (logisch) früheren Definition (***Zirkelverbot***).
   (ii) Er kommt nicht bereits im Definiendum einer (logisch) früheren Definition vor (***Verbot der Mehrfachdefinition***).
   (iii) Er kommt nicht in (logisch) früheren Behauptungen vor (***Verbot der nachträglichen Interpretation***).

---

[15] Gelegentlich, vor allem bei Schlüsselbegriffen in der Mathematik wie „Gruppe“, „Ring“ usw., werden diese Teilbedingungen auch als Axiome bezeichnet. Dies ist Folge eines Perspektivenwechsels, der implizit bleibt und uns hier nicht weiter beschäftigen soll.

[16] Diese Bedingung ist vor allem beim Interpretieren von Definitionen zu beherzigen: Wenn in einer Theorie ein Ausdruck wie „syntaktische Grundform“ definiert wird, der in der zugrundeliegenden natürlichen Sprache ein mehrfach zusammengesetzter Ausdruck ist, dann muß dieser Ausdruck in der Theoriesprache als atomar aufgefaßt werden. Aus mnemotechnischen Gründen wird man einen Terminus allerdings in der Regel so wählen, daß sich seine Bedeutung möglichst nahe an die des entsprechenden natürlichsprachlichen Ausdrucks anlehnen läßt. Ein häufiger Argumentationsfehler ist es hierbei aber, die Sachdiskussion mit der Diskussion über die Bezeichnungen zu verwechseln.

[17] Aus logischen Gründen würde es genügen, wenn man verlangt: Im Definiens kommen nur solche Variablen frei vor, die auch im Definiendum vorkommen. Kommen im Definiendum noch weitere Variablen vor, so sind diese schlicht überflüssig. Die freien Variablen einer Definition kann man sich vorstellen als implizit gebunden durch einen entsprechenden Allquantor vor der gesamten Definition („für alle ... gilt: “).

In der Regel kommt von vornherein nur eine Seite der Äquivalenz als Definiendum infrage. Um das Definiendum für den Leser eindeutig zu identifizieren (Bedingung (b)), genügt es immer, den zu definierenden Terminus geeignet hervorzuheben. In (f) ist so z.B. den einzelnen Bedingungen „nachträglich" ein Name gegeben worden. Bedingung (d) impliziert, daß im Definiendum keine Quantoren vorkommen (*Übung*: warum?). Die Bedingungen (f.ii) und (f.iii) kann man nur innerhalb der gesamten Theorie abschließend überprüfen.

Ü 41: Stellen Sie die logische Struktur der Definition von „Primzahl" dar:

a. indem Sie das Definiens als logisch nicht zerlegbaren Ausdruck auffassen;
b. indem Sie das Definiens so umformen, daß seine logische Struktur sichtbar wird.

   Hinweis: „n hat genau zwei Teiler" läßt sich in einem ersten Schritt folgendermaßen übersetzen:

   „es gibt einen Teiler n_1 von n und einen Teiler n_2 von n, die voneinander verschieden sind, und für jeden Teiler n_3 von n gilt: $n_3 = n_1$ oder $n_3 = n_2$."

   In dem Ausdruck „es gibt einen Teiler n_1 von n" versteckt sich nun aber noch ein Prädikat („ist Teiler von") und der Quantor „es gibt ein ... (für das gilt:)". Analoges gilt für „(es gibt) einen Teiler n_2 von n" sowie für „für jeden Teiler n_3 von n gilt:" Durch einen Quantor kann eine Variable ***gebunden*** werden. Außer durch einen Quantor kann eine Variable auch durch den Mengenbildungsoperator gebunden werden: „die Menge der ..., für die gilt:". Diese Bindung gilt für den gesamten ***Bereich*** des Quantors bzw. Operators. Dies ist in der Regel der gesamte restliche Ausdruck (sonst muß man Klammern setzen bzw. den Geltungsbereich durch Interpunktion verdeutlichen). In diesem Bereich bezeichnen alle Vorkommen der Variablen ein und dasselbe Objekt. Alle nicht so gebundenen Vorkommen von Variablen in einem Ausdruck sind ***frei***. Da wir die Anforderungen an Definitionen nur überprüfen können, wenn wir die freien und die gebundenen Variablen ermittelt haben, formen wir weiter um. Wo dies sinnvoll und von den Quantorenbereichen her zulässig ist, ziehen wir dabei Quantoren zusammen, hier: die Existenzquantoren, die n_1 und n_2 binden. Unser Ziel ist ein Formulierung, die aus Quantoren einerseits und 'einfachen Sätzen' wie „n_1 ist ein Teiler von n" andererseits bestehen.[18] Bei diesen einfachen Sätzen interessiert uns nur, welche Variablen in ihnen frei vorkommen. Daher geben wir den Sätzen Namen (A_1, A_2, ...) und vermerken in Klammern die frei vorkommenden

[18] Man beachte, daß hier von Sätzen im sprachwissenschaftlichen Sinn (Ausdrücke einer bestimmten Form) die Rede ist, und nicht von Sätzen im logischen Sinn (beweisbare Aussage).

Variablen: „n_1 ist ein Teiler von n“ können wir z.B. durch „$A_1(n_1, n)$“ abkürzen.

Wenn sich zwei Sätze nur dadurch unterscheiden, daß in ihnen verschiedene Variablen frei vorkommen, so können sie der Einfachheit halber denselben Namen bekommen. Außerdem können wir zum Sparen von Indizes auch noch Negationen ausnutzen, z.B. daß Verschiedenheit dasselbe ist wie Nicht-Gleichheit. Versuchen Sie nun, die Zwischenformulierung so umzuformen, daß alle Quantoren und Prädikate sauber voneinander getrennt sind. Zur Verdeutlichung der Quantorenbereiche dürfen auch Klammern eingefügt werden. Als Zwischenschritt sollte sich dann etwa folgendes ergeben:

„es gibt ein n_1 und ein n_2, für die gilt: $\underbrace{n_1 \text{ ist ein Teiler von } n}_{A_1(n_1,\, n)}$,

und $\underbrace{n_2 \text{ ist ein Teiler von } n}_{A_1(n_2,\, n)}$,

und n_1 und n_2 sind voneinander verschieden,

....

und für jeden Teiler n_3 von n gilt:

$n_3 = n_1$ oder $n_3 = n_2$.“

Hier ist noch ein wenig zu tun, u.a. muß der Allquantor am Ende noch aufgelöst werden! (Weitere Hinweise zum Umgang mit Variablen u.ä. vor den Lösungshinweisen in V.C.)

Ü 42: Überprüfen Sie, ob die Beispieldefinition die überprüfbaren Bedingungen erfüllt. Benutzen Sie dabei das Ergebnis der vorangehenden Übung.

Ü 43: Welche (wort)semantische Relation besteht zwischen den Begriffen in Definiendum und Definiens, wenn beide Seiten einer Definition als Definiendum infrage kommen?

Ü 44: Erfüllt die Definition von „Teilmenge“ die Anforderungen an Definitionen in der Grundform (vgl. S. 4)? Erfüllt die Definition von „$\varnothing$“ und die von „Vereinigung“ diese Anforderungen (vgl. S. 3 und 5)?[19]

[19] Denken Sie daran, daß eine Forderung der Form „jedes XYZ hat die Eigenschaft ...“ trivialerweise erfüllt ist, wenn es überhaupt kein XYZ gibt.

Ü 45: Formen Sie die Definition von „Teilmenge“ so um, daß in jedem satzförmigen Ausdruck nur ein Prädikat vorkommt. Dabei entspricht ein Ausdruck der Form „Ein Murkel x ist ein Urmel von y ...“ einer Implikation: „Wenn x ein Murkel ist, dann gilt: x ist ein Urmel von y ...“ bzw. (bei Definitionen): „Sei x ein Murkel. Dann gilt: x ist ein Urmel von y ...“. In dem Subjektsausdruck ist also eine Vorbedingung für den gesamten Restausdruck versteckt. Solche versteckten Voraussetzungen gibt es auch in der Definition von „Vereinigung“. Formen Sie wieder um!

Die beiden letzten Übungen zeigen: Definitionen haben nicht immer die Grundform, sondern können auch eine abgewandelte Form haben. Welche Forderungen lassen sich abwandeln? Die Definition von „$\varnothing$“ zeigt, daß eine erste Abwandlung die Bedingung (a) betrifft: Dieses Symbol wird durch eine Gleichung und nicht durch eine Äquivalenz definiert. Und die Definitionen von „Teilmenge“ und „Vereinigung“ zeigen, daß dem eigentlich definierenden Teil noch Vorbedingungen vorausgehen können, so daß die Definition insgesamt die Form einer Implikation hat, deren Nachsatz entweder eine Äquivalenz oder eine Gleichung ist. Definitionen dieser Art heißen ***bedingte Definitionen***.

Ü 46: Zeigen Sie, daß die Nachsätze der Implikationen in den genannten Beispieldefinitionen alle übrigen Anforderungen erfüllen. Bei einer Gleichung sind dabei die Begriffe „Definiendum“ und „Definiens“ auf die beiden Seiten der Gleichung anzuwenden.
Hinweis zur Definition von „$\varnothing$“: Der Mengenbildungsoperator „$\{\ |\quad \}$“, der in „$\{r|\ r \neq r\}$“ vorkommt (lies: „die Menge der r, für die gilt: $r \neq r$}“) , bindet ebenfalls Variablen, und zwar die vor dem Strich aufgeführten.

Ü 47: Formulieren Sie eine Anforderung (a'), die alle Formen von Definitionen abdeckt.

Ü 48: Untersuchen Sie alle übrigen Definitionen in diesem Propädeutikum.

Durch Äquivalenzen werden Begriffe für Eigenschaften oder Relationen definiert, durch Gleichungen Begriffe für Einzelgegenstände (also Eigennamen) und Begriffe für Funktionen. Zu beachten ist, daß man bei der Definition von Eigennamen und Funktionsbegriffen vorher überprüfen muß, ob Existenz und Einzigkeit sichergestellt sind – ansonsten ist der Begriff nicht wohldefiniert.

Ü 49: Überprüfen Sie die Definitionen, die Sie in den vorangehenden Übungen genauer untersucht haben. Welche Begriffe werden in der Definition welcher anderen Begriffe vorausgesetzt? (Dies läßt sich gut mithilfe von Pfeildiagrammen darstellen.) Sind (f.ii) und (f.iii) innerhalb dieser Teiltheorie erfüllt?

Die Bedingungen (b)–(e) sowie (f.ii) und (f.iii) können nicht abgeschwächt werden. Überraschenderweise läßt sich jedoch Bedingung (f.i) abschwächen: In einer Definition mit einer Fallunterscheidung läßt sich ein Definitionszirkel bereits dann vermeiden, wenn man immer bei einem Fall landet, bei dem der zu definierende Begriff keine Rolle spielt – unabhängig davon, ob in den Beschreibungen der anderen Fälle der zu definierende Begriff vorkommt oder nicht. Solche Definitionen heißen ***rekursiv***. Zu den bekannten Beispielen gehört die Definition der Fakultätsfunktion:

(27) *Definition*: Sei n eine natürliche Zahl.

$$n! := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ n * (n-1)!, & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Ü 50: Wieso landet man immer in dem ersten Fall? Ist dies auch gewährleistet, wenn n eine beliebige Zahl ist?

Ü 51: Ein nicht-definierter Begriff einer Theorie heißt auch ***Grundbegriff*** der Theorie. Kann es eine Theorie ohne Grundbegriffe geben?

Rekursive Bestimmungen kommen in der Sprachwissenschaft bei der Identifizierung von Ausdrucksmengen vor, z.B. bei der Identifizierung der Menge aller Sätze eines Idiolektsystems. Solche Identifizierungen können aus logischen Gründen keine Definitionen sein: ein Ausdruck wie „die Menge aller Sätze von *S*“, kurz: „Satz(–,*S*)“ ist nicht atomar (vgl. die Erläuterungen zur Auswahlfunktion in Abschn. I.C). Ansonsten müssen die grundlegenden Identifizierungen aller Gegenstände einer Einzelsprachgrammatik dieselben Bedingungen erfüllen wie Definitionen, damit kein ***Identifikationszirkel*** entsteht. In Ansätzen, wo die entsprechenden Begriffe nicht auf Idiolektsysteme relativiert werden, werden diese Begriffe oft durch rekursive Definitionen eingeführt.

Definitionen kommen nun häufig nicht in einer voll expliziten Form vor, sondern in mehr oder weniger informellen Varianten. Diese bereiten vor allem dem Anfänger z.T. erhebliche Schwierigkeiten. Relativ harmlos ist es meist noch, wenn die Reihenfolge von Definiendum und Definiens vertauscht wird, z.B.: „Eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat, heißt ***Primzahl***.“ Schwieriger ist es, wenn in einer Definition „wenn“ statt „genau dann, wenn“ steht: Dies ist nur dann erlaubt, wenn aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, daß es sich bei der Aussage um eine (Nominal)Definition handeln soll. Dann wird von dem Leser erwartet, daß er weiß, wie dieses „wenn“ zu verstehen ist (so in (37) auf S. 82 des Readers zur *Einführung in die Germanistische Linguistik*).

Ü 52: Ist in einer Aussage der Form „A, wenn B“ die Teilaussage B eine notwendige oder eine hinreichende Bedingung (dafür, daß A gilt)? Welche Information fehlt einem Leser, der eine Definition mit „wenn“ statt „genau dann, wenn“ wörtlich versteht?

Wenn eine Reihe von Begriffen für verschiedene Unterfälle eingeführt werden, wird häufig abkürzend „andernfalls“ oder „sonst“ gebraucht: Hier muß der Leser aus dem Zusammenhang erschließen, die Negation von welcher Bedingung im einzelnen gemeint ist (Beispiel: (37.b) auf S. 82 des Readers zur *Einführung in die Germanistische Linguistik*). Auch werden Vorbedingungen gerne einer ganzen Liste von Definitionen vorangestellt oder – wie in den Übungen gesehen – ins Definiendum (!) integriert. Zu den Vorbedingungen gehört streng genommen auch die Angabe der Variablenbereiche („die Variable „*r*“ steht für ...“). Je informeller die Formulierungen werden, desto eher bleiben Vorbedingungen oder Relativierungen ungenannt und müssen vom Leser durch Interpretation erschlossen werden. Zum Beispiel bleibt in (37) auf S. 82 des Readers zur *Einführung in die Germanistische Linguistik* durchgehend der Bezug auf Idiolektsysteme *S* implizit: „Grundformenfolge“, „Konstituentenanalyse“, „Konstituentenkategorie“ und „einfache Konstituentenkategorie“ sind sämtlich Begriffe, die auf Idiolektsysteme bzw. auf ein Klassifikationssystem, das die Konstituentenkategorien liefert, zu relativieren sind, also „*f* ist eine Grundformenfolge von *S*“ usw.

Ü 53: Für Teilnehmer an der *Einführung in die Germanistische Linguistik*: Überprüfen Sie anhand der Anforderungen an Definitionen, ob dann auch die definierten Begriffe so zu relativieren sind.

Ü 54: Für Teilnehmer an der *Einführung in die Germanistische Linguistik*: Wie ist in (37.e) „(wenn es) eine Konstituente f_3 (gibt)“ zu verstehen (vgl. (37.a)!)?

Ü 55: Für Teilnehmer an der *Einführung in die Germanistische Linguistik*: Untersuchen Sie nach den Definitionen für „Konstituente“ usw. in (37), S. 82 des Readers die für „lexikalisches Wort“ (S. 61) und zum Schluß die wirklich verzwickte Definition für „(syntaktisches) Paradigma“ (S. 58).

Am schwierigsten zu entschlüsseln sind ineinander verschachtelte oder en passant in einen fortlaufenden Text eingebettete Definitionen. Und die Gefahr von Mißverständnissen ist besonders groß, wenn man bei informell formulierten Theorien aus dem Kontext erschließen muß, ob eine Aussage als Definition zu verstehen ist oder nicht: Es könnte auch eine Aussage sein, die von der Form her als Definition infrage kommt, tatsächlich aber ein beweisbarer Satz oder gar ein Axiom ist und dies auch sein soll bzw. aus logischen Gründen sogar sein muß. Daß man als Leser häufiger vor solchen Interpretationsproblemen steht, hängt damit zusammen, daß (Nominal)Definitionen immer wieder mit ***Realdefinitionen*** verwechselt werden: Mit Aussagen über die Dinge („Realien“), die diese abgrenzen (lat. „de-finio“, engl. „to define“) und möglichst vollständig charakterisieren. Dabei wird im allgemeinen versucht, mithilfe eines Systems von Realdefinitionen die sachliche Struktur des beschriebenen Weltausschnittes widerzuspiegeln, etwa indem man von Oberbegriffen ausgeht und die Unterbegriffe dann mithilfe des jeweiligen Oberbegriffs und eines spezifischen Unterschieds erklärt („definitio fit per genus proximum et differentiam specificam“). Begriffssysteme dieser Art entsprechen unseren Klassifikationssystemen – aber wir tun gut daran, Klassifikationssysteme und (Nominal)Definitionen theoretisch zu entkoppeln und uns auch im übrigen nicht auf Genus-proximum-differentia-specifica-Definitionen zu beschränken.

IV. Weitere Übungen (zu Beispielen aus der Sprachwissenschaft)

1. Mengenlehre

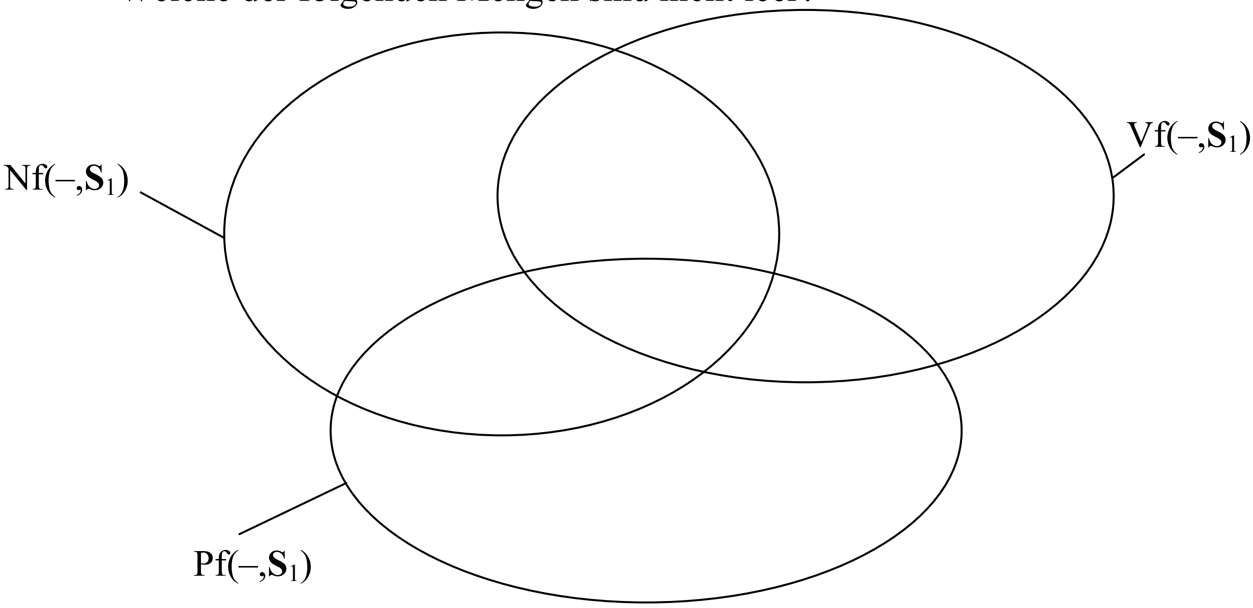
Ü 56: Welche Teilmengen der Folge

peter hat ein buch gesehen =

lassen sich auf eine Wortform zurückführen?

Ü 57: $\mathbf{S}_1$ sei ein Idiolektsystem des gesprochenen Standardgegenwartsdeutschen (d.h. insbesondere: es kommt nur auf die Aussprache an, nicht auf die Schreibung eines Wortes):

Welche der folgenden Mengen sind nicht leer?



Beispiele zu dieser Übung:

die <u>gans</u> im hof ist nun <u>mal</u> <u>eben</u> <u>recht</u> <u>laut</u>
die torte ist noch <u>ganz</u>
die platte ist <u>ganz</u> <u>eben</u>
dieses <u>recht</u> gilt <u>laut</u> gesetz nur drei jahre lang
ein <u>halber</u> liter wein
der übersicht <u>halber</u>
wir <u>sondern</u> die erbsen von den bohnen
wir kochen nicht erbsen, <u>sondern</u> bohnen
<u>schon</u> dich nicht!
<u>bis</u> jetzt haben wir <u>schon</u> ein paar schöne beispiele gefunden
dieser <u>biß</u> war der erste
<u>biß</u> der hund etwa <u>schon</u> einmal
wir <u>schneidern</u> uns heute ein kleid
diesen <u>schneidern</u> schulden wir noch den lohn

2. Aussagen- und Prädikatenlogik

Ü 58: Wie kann man „entweder p oder q“ ausdrücken mittels $\wedge$, $\vee$ und $\neg$?
Hinweis:
a) Vergleichen Sie (7.a) in Abschn. II mit

(7.e) *Entweder es regnet oder es schneit*.

und stellen Sie eine Wahrheitswerte-Tabelle für „entweder–oder“ auf.
b) Welcher Fall wird bei „entweder–oder“ ausgeschlossen, der bei $\vee$ („oder“) erlaubt ist? Drücken Sie diesen Ausschluß mithilfe von $\wedge$ („und“) und $\neg$ („nicht“) aus.
c) „Entweder–oder“ läßt sich dann insgesamt mittels $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ darstellen.
d) Kontrolle: Berechnen Sie die Wahrheitswerte-Tabelle für Ihre Darstellung: Wenn die beiden Ausdrücke äquivalent sind (sein sollen), dann muß sich dieselbe Verteilung der Wahrheitswerte ergeben.

Ü 59: Zerlegen Sie prädikatenlogisch: Bsp. (11), (12) + (13) (2 Lesarten), (16), (17).

Ü 60: Prüfen Sie, wie sich (16.b) zu

(16.d) *Niemand mag Anna nicht.*

verhält. Wie könnte die allgemeine Regel zum Verhältnis von Allquantor („für alle ...“) und Existenzquantor („es gibt ein ...“) lauten?

Ü 61: Aus (16.b) folgt nicht, daß (16.c) gilt: Können Sie das mit dem Ergebnis von Ü 4 begründen?
Hinweis: Bei der Verwendung von *alle X* unterstellen wir in der Regel, daß es mindestens ein X gibt. Daß wir dies nicht aufgrund der satzsemantischen Regeln, sondern aufgrund pragmatischer Schlüsse tun, zeigt das folgende Beispiel:

(16.e) *Alle Einhörner haben ein langes Horn auf der Stirn.*

(16.f) *Es gibt ein Einhorn, das ein langes Horn auf der Stirn hat.*

Offensichtlich folgt (16.f) nicht aus (16.e) – und sollte das auch nicht.

3. Zusammenhang Mengenlehre – Logik

Ü 62: Für alle *f* und für alle *S* gilt: Wenn *f* eine Verbform von *S* ist, dann ist *f* eine Wortform von *S*.
Frage: Wie verhalten sich die Mengen Vf(–,*S*) und Wf(–,*S*) zu einander?

Ü 63: Wenn Sie wissen, daß Nf(–,*S*) $\subseteq$ Wf(–,*S*) für alle *S* gilt (Graphik!), wie können Sie denselben Sachverhalt mithilfe einer Implikation ausdrücken?

V. Lösungshinweise

A. Lösungshinweise zur Mengenlehre

Ü 1: z.B. {2, 4, 8, ...}:

- {2, 4, 8, 16, 32, ...}: ‘nächste Zahl = vorherige Zahl * 2’ [$f(1) = 2$, $f(n) = 2 * f(n-1)$, $n > 1$, also $f(n) = 2^n$, $n \geq 1$]:
- {2, 4, 8, 14, 22, ...}: ‘nächste Zahl = vorherige Zahl + nächste, noch nicht verbrauchte gerade Zahl: + 2, + 4, +6, +8, ...’ [$f(1) = 2$, $f(n) = f(n-1) + 2(n-1)$, $n > 1$]

Ü 2: $M_1 = M_2 = M_5 = M_6$. Kein Unterschied: Angabe einer Eigenschaft oder Aufzählung der Elemente; bei der Aufzählung der Elemente ist die Reihenfolge irrelevant, bei den Eigenschaften sind nur die festgelegten Elemente relevant (die Eigenschaften selbst können ganz verschieden sein).

$M_3 \subseteq M_1$, sogar: $M_3 \subset M_1$, denn –2 (das einzige Element von M_3) ist zugleich Element von M_1; und z.B. –1 ist Element von M_1, aber nicht von M_3.

M_7 ist Teilmenge von jeder Menge (!): Eine Bedingung der Form „jedes *r* mit der Eigenschaft E_1 hat die Eigenschaft E_2“ ist trivialerweise erfüllt (d.h.: ohne daß es weiterer Begründungen bedarf), wenn es überhaupt kein *r* mit der Eigenschaft E_1 gibt).

M_1 und M_4 sowie M_3 und M_4 sind disjunkt. M_7 und jede nicht-leere Menge sind disjunkt.

Ü 3: a. (i) und (ii) gelten, (iii) und (iv) gelten nicht:

(ii): man setze $M = M_1 = M_2$ in der Definition von „Teilmenge“.
(i): folgt mit der Definition von „gleich“ sofort aus (ii).
(iv) ist die Negation von (i). Da (i) bereits gezeigt ist, muß (iv) falsch sein.
(iii): Aus (iii) folgt mit der Definition, daß es wenigstens ein Element von *M* gibt, das nicht zu *M* gehört. Das ist ein logischer Widerspruch! Also muß bereits (iii) falsch gewesen sein.

b. (i) und (iii) gelten, (ii) gilt nicht:

(i): Vertauschen der Konjunkte in der definierenden Bedingung (die ***Konjunkte*** sind die mit „und“ verbundenen Aussagen bzw. Aussagenteile).
(ii): Gegenbeispiel: $M_1 \subset M_2$, z.B. $M_1 = \{1\}$ und $M_2 = \{1, 2\}$.
(iii): Mit der Definition ist der Beweis sehr aufwendig (viele Fallunterscheidungen), sehr einfach dahingegen mit ***Kontraposition***, das ist die folgende Tautologie („¬“ bedeutet „nicht“, vgl. Abschn. II; s. auch *Einführung in die Germanistische Linguistik*, IV.A bzw. beliebige Einführungen in die formale Satzsemantik oder in die Logik):

aus A folgt B genau dann, wenn gilt: aus ¬B folgt ¬A

oder kürzer:

$$A \rightarrow B \text{ gdw } \neg B \rightarrow \neg A$$

D.h. es ist logisch gesehen völlig egal, ob wir die linke Seite (also $A \rightarrow B$) oder die rechte Seite zeigen (also $\neg B \rightarrow \neg A$). Eine ***Tautologie*** ist eine Aussage, die allein aufgrund ihrer logischen Struktur immer wahr ist, also unabhängig davon, mit welchem konkreten Inhalt man eventuell

vorkommende Variablen füllt. Oft ist es nun sehr viel einfacher, die eine der beiden Seiten zu zeigen, als die andere. So auch hier:
A sei „$M_1 \neq M_2$", B sei „$M_2 \neq M_1$". (iii) behauptet dann: A $\to$ B. Es entspricht nun $\neg$A offensichtlich $\neg(M_1 \neq M_2)$, also gerade $\neg(\neg(M_1 = M_2))$. Da sich doppelte Negation aufhebt, ist $\neg$A gerade „$M_1 = M_2$". Analog entspricht $\neg$B der Aussage „$M_2 = M_1$". Es genügt also, wenn wir zeigen: aus $M_2 = M_1$ folgt $M_1 = M_2$. Dies ist aber gerade die Aussage von (i) (bis auf Variablenumbenennung), und (i) haben wir schon gezeigt.

c. (i)–(iii) gelten, (iv) gilt nicht.

(ii): Sei r ein Element von M_1. Nach Voraussetzung ist $M_1 \subseteq M_2$, also ist r dann auch ein Element von M_2. Wegen $M_2 \subseteq M_3$ – das ist die zweite Voraussetzung – ist r dann aber auch ein Element von M_3. D.h. jedes Element von M_1 ist auch Element von M_3, und hieraus folgt mit der Definition von „Teilmenge": $M_1 \subseteq M_3$.

(i): kann man mithilfe von (ii) und dem folgenden Schlußverfahren zeigen:

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ C \to D \end{array}}{(A \text{ und } C) \to (B \text{ und } D)}$$

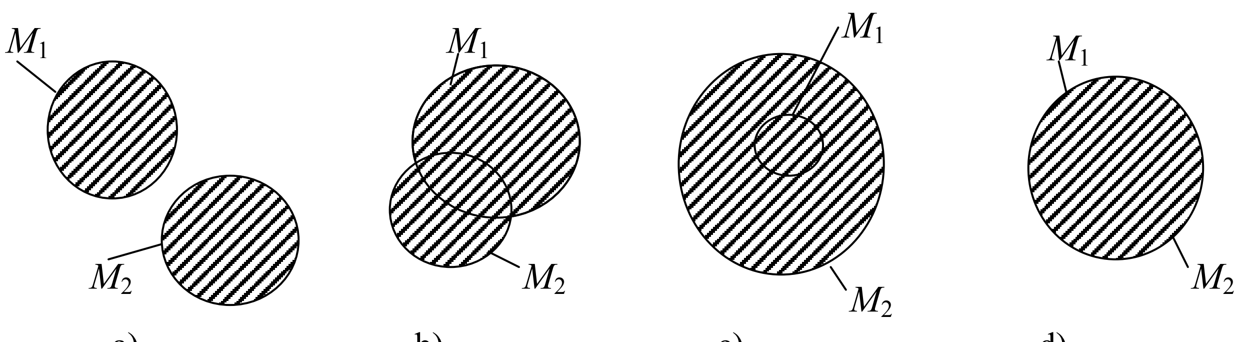
(iii): zusätzlich zu (ii) ist zu zeigen, daß aus den (strengeren) Voraussetzungen die Verschiedenheit von M_1 und M_3 folgt: Nach der zweiten Voraussetzung gibt es ein $r \in M_3$ mit $r \notin M_2$. Also kann r nach der ersten Voraussetzung erst recht nicht Element von M_1 sein.

(iv) Gegenbeispiel: man wähle $M_1 = M_3$.

Übung im 1. Abs. von Abschn. I.A.3: die Ausgangsmengen sind beliebig und dürfen bei allen Operationen insbesondere auch gleich sein; die resultierende Menge darf identisch zu einer oder auch zu beiden Ausgangsmengen sein.

Ü 4: gilt.

Ü 5: Vereinigungen:



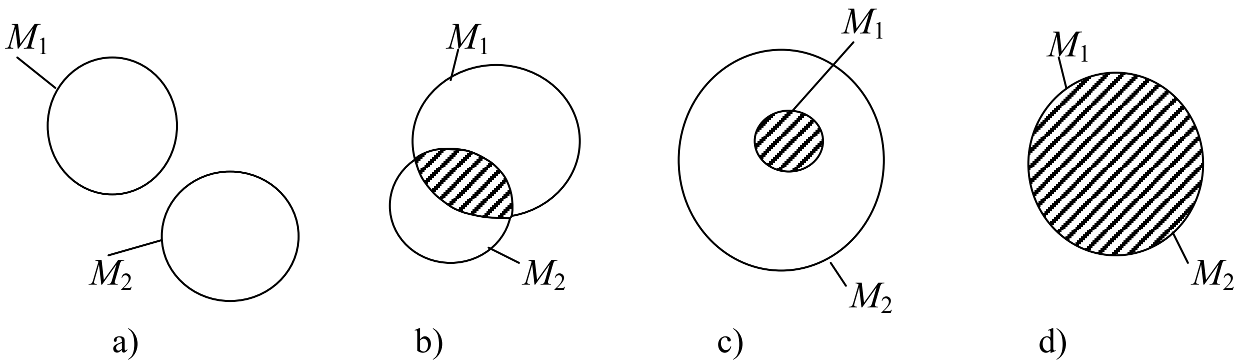
a) b) c) d)

c): $M_1 \subseteq M_2$; d) $M_1 = M_2$, also $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$

Ü 6: beide Gesetze gelten.

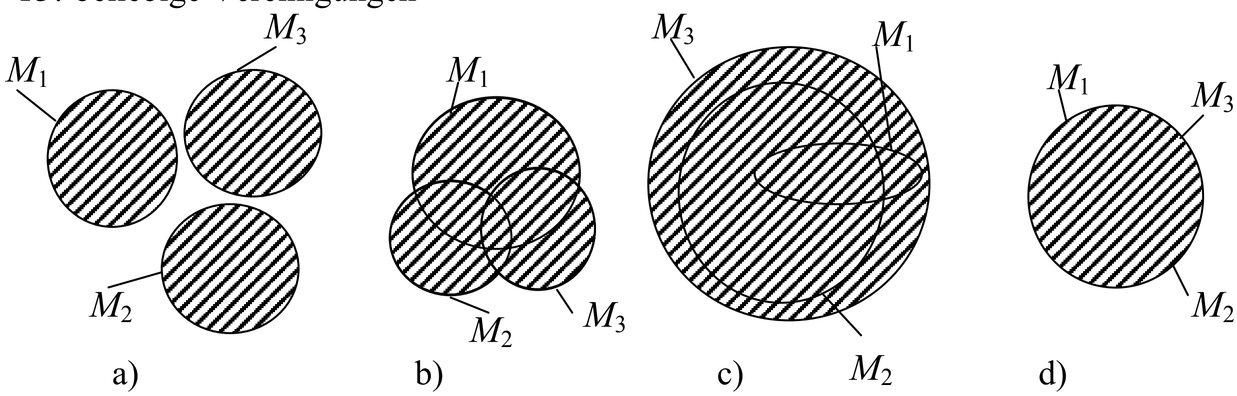
Ü 7: gilt.

Ü 8: Durchschnitte:

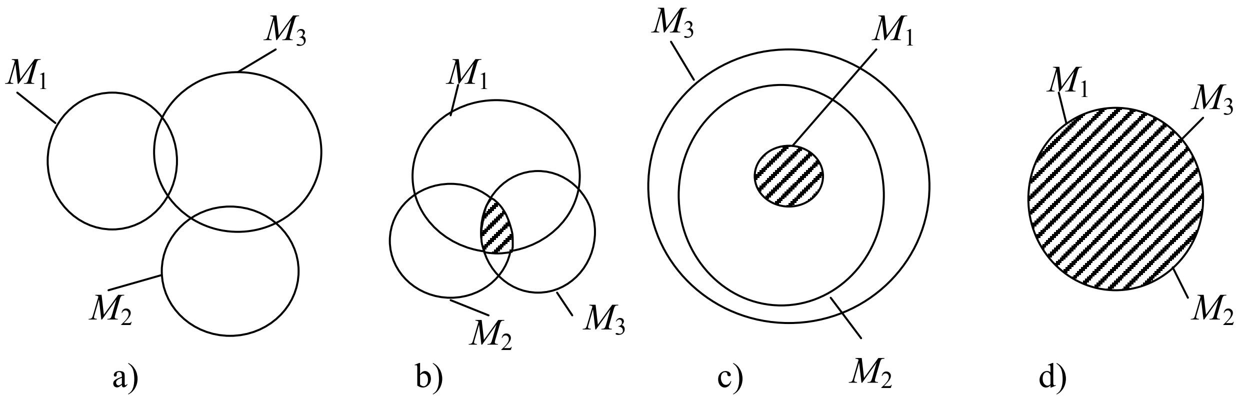


Ü 9: Alle Gesetze gelten.
Ü 10: Bei Addition und Multiplikation gilt nur *eines* der beiden Distributivgesetze.
Ü 11: ... genau dann, wenn ihr Durchschnitt leer ist, d.h. $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

Ü 12: gilt.
Ü 13: beliebige Vereinigungen



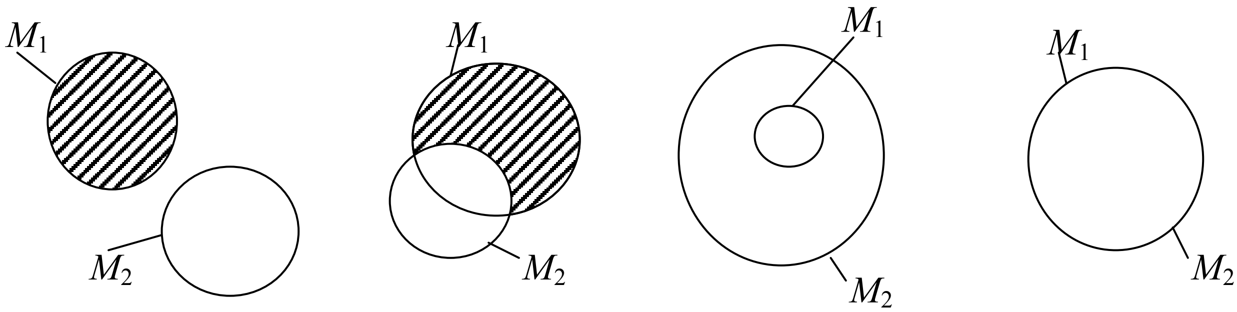
Ü 14: beliebige Durchschnitte



Ü 15: beide Aussagen gelten.

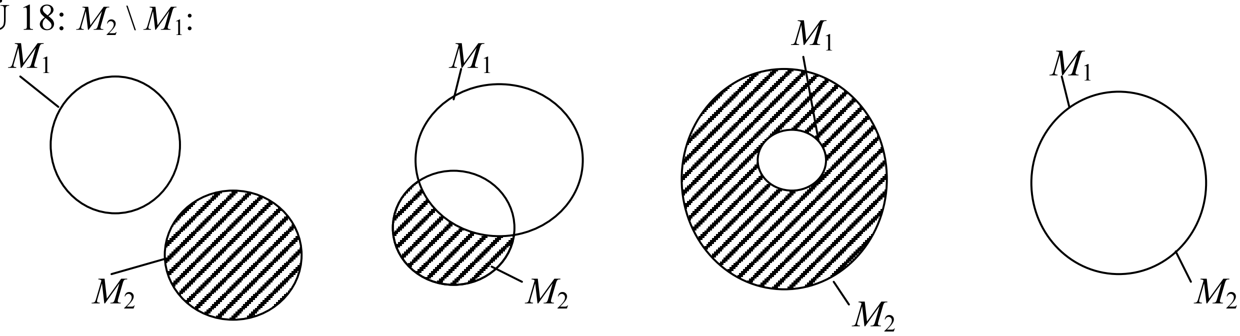
Ü 16: gilt.

Ü 17: $M_1 \setminus M_2$:



a) b) c) d)

Ü 18: $M_2 \setminus M_1$:



a) b) c) d)

Ü 19: Die Differenz ist weder kommutativ (vgl. Ü2 und 3) noch assoziativ:
betrachte $M_1 = \{1, 3\}$, $M_2 = \{1, 2\}$, $M_3 = \{1\}$. Dann gilt (nachrechnen!):
$(M_1 \setminus M_2) \setminus M_3 = \{3\} \neq \{1, 3\} = M_1 \setminus (M_2 \setminus M_3)$

Ü 20: –

Ü 21: a) w, b) f

Ü 22: Kind-von: {<Anton, Karl>, <Petra, Karl>, <Karla, Karl>, <Anton, Emilie>, <Petra, Emilie>, <Karla, Emilie>}
Vater-von: {<Karl, Anton>, <Karl, Petra>, <Karl, Karla>}

Ü 23:

(a) (i) es gibt kein $n \geq 1$, so daß die Def. erfüllt ist
(ii) wie (i), insbes.: {<3, a>} fängt nicht bei 1 an
(iii) wie (i), insbes.: {<1, a>, <5, u>, <6,s>} hat eine Lücke
(iv) wie (i), insbes. ist diese Menge weder endlich noch fängt sie mit 1 an

(b) $karla = k_1\ a_2\ r_3\ l_4\ a_5$ = {<1, k>, <2, a>, <3, r>, <4, l>, <5, a>}
der mann steht auf = $der_1\ mann_2\ steht_3\ auf_4$
= {<1, *der*>, <2, *mann*>, <3, *steht*>, <4, *auf*>}
steuer ung = $steuer_1\ ung_2$ = {<1, *steuer*>, <2, *ung*>}

(c) [bleibt Ihnen überlassen]

(d) ja

Ü 24: $\mathit{karla} = k_1\, a_2\, r_3\, l_4\, a_5 = \{<1,k>, <2,a>, <3,r>, <4,l>, <5,a>\}$ (Buchstabenfolge!)
$\mathit{der\ mann\ steht\ auf} = \mathit{der}_1\ \mathit{mann}_2\ \mathit{steht}_3\ \mathit{auf}_4 =$
$\{<1,\mathit{der}>, <2,\mathit{mann}>, <3,\mathit{steht}>, <4,\mathit{auf}>\}$
$\mathit{steuer\ ung} = \mathit{steuer}_1\ \mathit{ung}_2 = \{<1,\mathit{steuer}>, <2,\mathit{ung}>\}$

Ü 25: –

Ü 26: ja!

Ü 27: $\mathit{gesehen}_{14}\ \mathit{hat}_{15}$ $\mathit{wundert}_4$ $\mathit{der}_1\ \mathit{junge}_2\ \mathit{mann}_3$

Ü 28: [hier ist für jede der definierenden Bedingungen zu zeigen, daß sie erfüllt ist]

Ü 29: nein

Ü 30: die Klassifikation auf sWf(–,*S*), die Klassifikation $\{9^{-}, \{0\}, \angle\}$ auf 9.

Ü 31: die Klassifikation $\{9^{-}, \{0\}, \angle\}$auf 9

Ü 32: betrachte Einheitenkategorien (i.e. Kategorien, die syntaktische Einheiten enthalten). – Hinweis: Wortklassen, insbesondere die primären Wortarten, überlappen sich im allgemeinen höchstens bei den $\mathbf{b}^0$-Wörtern: in der Regel lassen sich zumindest faktisch Unterschiede bei den Paradigmen oder Unterschiede bei den Wortbedeutungen feststellen.

Ü 33: jeder Endpunkt mit sich selbst; außerdem:

		M_5	M_6
	M_2	x	x
	M_3	x	x
(M_4)	M_7	x	x
	M_8	x	x
	M_9	x	x

Ü 34: $\{M_2, M_5\}$, $\{M_2, M_6\}$, $\{M_3, M_5\}$, $\{M_3, M_6\}$, $\{M_7, M_5\}$, $\{M_7, M_6\}$, $\{M_8, M_5\}$, $\{M_8, M_6\}$, $\{M_9, M_5\}$, $\{M_9, M_6\}$

Ü 35: dies ist der Fall

Ü 36: mit den Kategorisierungen {3Ps(–,*S*), $\mathrm{Sing}_{\mathrm{Vf}}$(–,*S*), Ind(–,*S*), Präs(–,*S*), ...} und {2Ps(–,*S*), $\mathrm{Plur}_{\mathrm{Vf}}$(–,*S*), Ind(–,*S*), Präs(–,*S*), ...}

Ü 37: da geht^1 wegen (a) sowohl zu 3Ps(–,*S*) und zu $\mathrm{Sing}_{\mathrm{Vf}}$(–,*S*) als auch zu 2Ps(–,*S*) und zu $\mathrm{Plur}_{\mathrm{Vf}}$(–,*S*) gehören muß, ergeben sich zusätzlich zu den Kategorisierungen in (a): {2Ps(–,*S*), $\mathrm{Sing}_{\mathrm{Vf}}$(–,*S*), Ind(–,*S*), Präs(–,*S*), ...} und {3Ps(–,*S*), $\mathrm{Plur}_{\mathrm{Vf}}$(–,*S*), Ind(–,*S*), Präs(–,*S*), ...}.

B. Lösungshinweise zur Logik

Ü 38: aussagenlogische Analyse

(7) p := *es regnet*, q := *es schneit*.

a. $p \vee q$
b. p
c. $\neg p$
d. $p \vee (\neg p)$; mit Klammerersparnis-Regeln schreibt man kurz: $p \vee \neg p$

(8) p:= *es brennt*, q := *der Fahrstuhl darf benutzt werden*

a. $p \to (\neg q)$; kurz: $p \to \neg q$
b. $(\neg p) \to q$; kurz: $\neg p \to q$
c. $(\neg q) \to p$; kurz: $\neg q \to p$
d. $q \to (\neg p)$; kurz: $q \to \neg p$

(a) und (d) sind logisch äquivalent (die entsprechende allgemeine Regel wird bei Beweisen durch Kontraposition ausgenutzt, vgl. Lösungshinweis zur Übung (2.b.iii) von S. 82). Dazu füllt man schrittweise mithilfe der Festlegungen in (4) (S. 97) Tafeln der folgenden Art aus und prüft, ob sich bei jeder Belegung der Variablen mit einem Wahrheitswert dieselben Wahrheitswerte für die Gesamtaussage ergeben:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	(a) $p \to \neg q$	(d) $q \to \neg p$	(b) $\neg p \to q$	(c) $\neg q \to p$
w	w						
w	f						
f	w						
f	f						

Insbesondere ist zu beachten, daß weder (b) noch (c) logisch äquivalent zu (a) ist. Bei diesem Beispiel kann man sich auch intuitiv klar machen, warum dies nicht der Fall sein sollte: Warum sollten (b) und (c) keine ‘Gesetze’ sein, auch wenn wir (a) als ‘Gesetz’ akzeptieren? (Beim Ausfüllen der Tafel sollten Sie herausbekommen haben, daß auch (b) und (c) zueinander äquivalent sind. Die Ergebnisse in Spalte (a) und (d): f w w w, in Spalte (b) und (c): w w w f)

(9) p := *es regnet*

a. $\neg(\neg p)$
b. p (äquivalent zu (a))

(10) p := *es donnert*, q := *es blitzt*

a. $\neg(p \wedge q)$
b. $\neg p \vee \neg q$

(a) und (b) sind äquivalent (de Morgansche Regel). Eine analoge Regel gilt für die Negation einer Oder-Aussage.

Ü 39: Grenzen der aussagenlogischen Analyse

(11) vgl. *Karla liest Zeitung und Anton liest Zeitung und Emil liest ein Buch.*

(12) Spielen sie miteinander oder beide mit ungenannten Partnern?

(13) Heiraten sie einander oder ungenannte Partner?

(14) vgl. *Robert trinkt Milch oder Robert trinkt Kaffee.*

(15) vgl. *Es ist nicht der Fall, daß Anna Bier trinkt.*

(16) a. vgl. *Es ist nicht der Fall, daß jemand Anna mag.* (a) sollte also die Negation von (c) sein. (b) und (c) sind aussagenlogisch nicht weiter analysierbar.

(17) Die Gültigkeit dieses Schlusses kann aussagenlogisch nicht erklärt werden.

Ü 40: –

C. Lösungshinweise zur Definitionslehre

Um Ihnen die Überprüfung Ihrer eigenen Lösungen zu erleichtern, habe ich die jeweils abgekürzten Aussagen – soweit nicht offensichtlich – schematisch mit angegeben (passende Variablen an den Leerstellen der zugehörigen Prädikate bzw. Aussageformeln in Klammern).

Zur Verwendung von Variablen noch einige Hinweise für diejenigen, die damit nicht (mehr) so vertraut sind:

(1) Verschiedene Variablen können verschiedene Gegenstände bezeichnen, müssen dies aber nicht (vgl. die Definition von „gleich“). Und umgekehrt:

(2) Wenn in einer Aussage (Definition, ...) nicht von vornherein feststeht, ob an einer Stelle von einem weiteren Gegenstand die Rede ist oder nicht, dann müssen verschiedene Variablen verwendet werden.

(3) Gebundene Variablen gelten nur im Bereich des sie bindenden Quantors, z.B. sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) (es gibt ein x, für das gilt: $A_1(x)$) und (es gibt ein x, für das gilt: $A_2(x)$)
(b) (es gibt ein x_1, für das gilt: $A_1(x_1)$) und (es gibt ein x_2, für das gilt: $A_2(x_2)$)

In (a) sind also die Vorkommen von „x“ im ersten Konjunkt ganz unabhängig von den Vorkommen von „x“ im zweiten Konjunkt. Die Klammern um die Konjunkte dürfen auch weggelassen werden. Dann muß man aber vereinbaren, auf welche Weise der Bereich eines Quantors angezeigt werden soll. In informellen und halbformalen Zusammenhängen verwendet man Absatzgliederungen, z.B. durchgezählte Bedingungen, und die Vereinbarung, daß man innerhalb eines solchen Absatzes den Bereich eines Quantors maximieren darf, also ist „es gibt ein x: $A_1(x)$ und $A_2(x)$“ als „es gibt ein x: ($A_1(x)$ und $A_2(x)$)“ zu verstehen. Auf der sicheren Seite ist man als Autor, wenn man bei jedem Quantor eine neue Variable verwendet. Dies führt aber ggfs zu einem Index-Wirrwarr, was der Lesbarkeit ebenfalls nicht förderlich ist. Bei komplexeren Sachverhalten müssen Sie als Leser also mit entsprechenden

Kompromissen rechnen (Beispiel für Teilnehmer an der *Einführung in die Germanistische Linguistik*: Def. von „syntaktisches Paradigma“, Bedingung (1) und (3.a) auf S. 58 des Readers).

Ü 41: a. $A_1(n)$ gdw $A_2(n)$.

b. $A_1(n)$ gdwg: es gibt ein n_1 und ein n_2 mit:

(i) $A_2(n_1, n)$
und (ii) $A_2(n_2, n)$
und (iii) nicht $A_3(n_1, n_2)$
und (iv) für alle n_3 gilt: $A_2(n_3, n)$ impliziert ($A_3(n_3, n_1)$ oder $A_3(n_3, n_2)$).

(A_2: „ist Teiler von“; A_3: „ist gleich“)

Ü 42: alle Bedingungen sind erfüllt

Ü 43: Synonymie oder Konversion: Definiens und Definiendum sind beide atomar, bestehen also nur aus jeweils einem Begriff und ggfs Variablen. Der einzige Unterschied kann also in der Reihenfolge der Variablen bestehen, vgl. *Peter kauft das Buch von Emil* und *Emil verkauft das Buch an Peter*. Wir können „kaufen von“ durch „verkaufen an“ oder „verkaufen an“ durch „kaufen von“ definieren: *x* kauft *y* von *z* gdw *z y* an *x* verkauft.

Ü 44: Keine der drei Definitionen erfüllt die Bedingung (a).

Ü 45: –

Ü 46: –

Ü 47: (a') Die Definition ist (i) eine Äquivalenz oder (ii) eine Gleichung oder (iii) eine Implikation, deren Nachsatz eine Äquivalenz oder Gleichung ist.

Ü 48: Alle Definitionen sind formal korrekt, einige sind allerdings nur halbformal formuliert und müssen daher zunächst in eine überprüfbare Form gebracht werden. Beispiele:

„gleich“ (Mengen):

$A_1(M_1, M_2) \rightarrow (A_2(M_1, M_2)$ gdw ($A_3(M_1, M_2)$ und $A_3(M_2, M_1)$))

oder präziser: ($A_1(M_1)$ und $A_1(M_2)$) $\rightarrow$ ($A_2(M_1, M_2)$ gdw ($A_3(M_1, M_2)$ und $A_3(M_2, M_1)$))

„echte Teilmenge“:

$A_1(M_1)$ und $A_1(M_2)$) $\rightarrow$ **(** $A_2(M_1, M_2)$ gdw ($A_3(M_1, M_2)$
und es gibt ein r mit: ($A_4(r, M_2)$ und nicht $A_4(r, M_1)$)) **)**

A_3: (M_1) ist Teilmenge von (M_2)

A_4: (r) ist Element von (M_1)

„Folge“:
$A_1(R) \rightarrow (A_2(R)$ gdw ($A_3(R)$ und es gibt ein n mit: $A_4(R,n)$)

A_3: (R) ist eine Funktion
A_4: die Argumente von (R) sind die natürlichen Zahlen 1 bis (n)

„Klassifikation“:
$A_1(M,M_1) \rightarrow$ ($A_2(M,M_1)$ gdwg: ($A_3(M,M_1)$
und für alle M_2 gilt: ($A_4(M_2,M) \rightarrow A_5(M,M_2)$)
und für alle M_2 und alle M_3 gilt:
(($A_4(M_2,M)$ und $A_4(M_3,M)$ und $A_6(M_2,M_3)$) $\rightarrow$
es gilt nicht:
$A_7(M_2, M_3)$)))

A_3: die Vereinigung von (M) ist (M_1)
A_4: (M_2) ist Element von (M)
A_5: die Vereinigung von (M) ist nicht die Vereinigung der Differenz von (M) und der Einermenge von (M_2)
A_6: (M_2) ist nicht gleich (M_3)
A_7: (M_2) ist eine Teilmenge von (M_3)

Ü 49: –

Ü 50: Betrachte z.B. $n = 2$. Analog kann man für jede natürliche Zahl $n > 2$ argumentieren, wenn man jeweils davon ausgeht, daß man die Behauptung bereits für alle kleineren Zahlen gezeigt hat (Prinzip der vollständigen Induktion anwenden). Anders bei nicht-positiven Zahlen und bei positiven nicht-natürlichen Zahlen, betrachte z.B. 0 oder –1 oder 1,3.

Ü 51: nein.

Ü 52: B ist eine hinreichende Bedingung (s.o.). Der Leser weiß nicht, ob B auch eine notwendige Bedingung ist, d.h. möglicherweise sollen weitere Fälle unter den Begriff fallen, die von B nicht erfaßt werden.

Ü 53: Dies ist wegen Bedingung (e) der Fall, wenn man nicht durch geeignete Annahmen sicherstellen kann, daß man im Definiens jeweils ‘das richtige’ Idiolektsystem, d.h. dasjenige, von dem bereits in der Vorbedingung die Rede ist, über eine gebundene Variable ins Spiel bringen kann. Solche Annahmen sind aber für Idiolektsysteme ein und derselben Sprache nicht vertretbar.

Ü 54: „(es gibt ein f_3 mit:) f_3 ist eine Konstituente von f bei k (und ...)“

Ü 55: **Definitionen in (37), S. 82**

a. ($A_1(f)$ und $A_2(k,f)$) → ($A_3(f_1,f,k)$ gdwg:
($A_4(f_1,f)$ und es gibt ein K mit: ($A_5(K)$ und
$A_6(K,f_1,k)$)))

b. ($A_1(f)$ und $A_2(k,f)$ und $A_3(f_1,f,k)$) → ($A_7(f_1,f,k)$ gdw es ein K gibt mit:
($A_8(K)$ und $A_6(K,f_1,k)$))

($A_1(f)$ und $A_2(k,f)$ und $A_3(f_1,f,k)$) → ($A_9(f_1,f,k)$ gdw es kein K gibt mit:
($A_8(K)$ und $A_6(K,f_1,k)$))

c. ($A_1(f)$ und $A_2(k,f)$ und $A_3(f_1,f,k)$) → ($A_{10}(f_1,f_2,f,k)$ gdw $A_{11}(f_1,f)$)

d. ($A_1(f)$ und $A_2(k,f)$ und $A_3(f_1,f,k)$) → ($A_{12}(f_1,f_2,f,k)$ gdwg:
($A_{10}(f_1,f_2,f,k)$
und es gibt kein f_3 mit: ($A_3(f_3,f,k)$
und $A_{10}(f_1,f_3,f,k)$
und $A_{10}(f_3,f_2,f,k)$
)))

e. ($A_1(f)$ und $A_2(k,f)$ und $A_3(f_1,f,k)$) → ($A_{12}(f_1,f_2,f,k)$ gdw es ein f_3 gibt mit:
($A_3(f_3,f,k)$
und $A_{12}(f_1, f_3,f,k)$
und $A_{10}(f_2, f_3,f,k)$))

A_1: (f) ist eine Grundformenfolge
A_2: (k) ist eine Konstituentenanalyse von (f)
A_3: (f_1) ist eine Konstituente von (f bei k)
A_4: (f_1) ist Teilmenge von (f)
A_5: (K) ist eine Konstituentenkategorie
A_6: (K) ist (f_1) durch (k) zugeordnet
A_7: (f_1) ist eine einfache Konstituente von (f bei k)
A_8: (K) ist eine einfache Konstituentenkategorie
A_9: (f_1) ist eine nicht-einfache Konstituente von (f bei k)
A_{10}: (f_1) ist (f_2 in f bei k) untergeordnet
A_{11}: (f_1) ist eine echte Teilmenge von (f)
A_{12}: (f_1) ist (f_2 in f bei k) unmittelbar untergeordnet
A_{13}: (f_1) ist (f_2 in f bei k) nebengeordnet

Hinweise:
Die vorangestellten Vorbedingungen sind Teil einer jeden Definition. In (b)–(e) steht kurz „wenn“ anstelle von „genau dann, wenn“. In (b) bezieht sich

„andernfalls“ auf den vorangehenden *wenn*-Satz und „es gibt kein K mit: ...“ läßt sich auch durch „es ist nicht der Fall, daß es ein K gibt mit: ...“ darstellen. Bei (d) wurde die Präzisierung zugrundegelegt.

Def. von „lexikalisches Wort“ (S. 61)

$A_1(S) \rightarrow \big($ $A_2(P,b,S)$ gdw
$\big($ 1. $A_3(P,S)$
und 2. für alle f, J gilt: ($A_4(f,J,P) \rightarrow A_5(b,f,J,S)$)
und 3. es gibt kein P_1 mit: ($A_6(P,P_1)$ und $A_7(P_1,b,S)$) $\big)$ $\big)$

A_3: (P) ist ein syntaktisches Paradigma von (S)
A_4: ($\langle f,J\rangle$) ist Element von (P)
A_5: (b) ist eine Bedeutung von (f bei J in S)
A_6: (P) ist echte Teilmenge von (P_1)
A_7: (P_1) erfüllt (mit b und S) [sowie „P_1“ anstelle von „P“] die Bedingungen (1) und (2)

Hinweise:
– Tupel-Bildung müßte streng genommen auch noch einmal herausgezogen werden. Da dies aber nichts zum Verständnis der aussagenlogischen Struktur beiträgt und nur zu größerer Unübersichtlichkeit führt, ist es besser, hierauf zu verzichten.
– (3) enthält eine Metabedingung („erfüllt ... die Bedingungen (1) und (2)“), die streng genommen auszubuchstabieren wäre.

Def. von „syntaktisches Paradigma“ (S. 58)

$A_1(S) \rightarrow \big($ $A_2(P, S)$ gdw
$\big($ 1. für alle f, J gilt: **(**$A_3(f,J,P) \rightarrow$ ($A_4(f,S)$ und $A_5(J,f,S)$) **)**
und 2. für alle f_1, J_1, f_2, J_2 gilt: **(** ($A_3(f_1,J_1,P)$ und $A_3(f_2,J_2,P)$)
$\rightarrow A_6(f_1, J_1, f_2, J_2)$ **)**
und 3. es gibt ein b mit:
(a. für alle f, J gilt: **(** $A_3(f,J,P) \rightarrow A_7(b,f,J,S)$ **)**
und b. für alle P_1 gilt: **(** ($A_8(P,P_1)$ und $A_9(P_1, b, S)$)
$\rightarrow A_{10}(P,P_1)$ **)**) **)** $\big)$

A_3: ($\langle f,J\rangle$) ist Element von (P)
A_4: (f) ist eine syntaktische Wortform von (S)
A_5: (J) ist eine Kategorisierung von (f in S)
A_6: ($\langle f_1, J_1\rangle$ und $\langle f_2, J_2\rangle$) passen formal zueinander
A_7: (b) ist eine Bedeutung von (f bei J in S)
A_8: (P) ist Teilmenge von (P_1)
A_9: (P_1) erfüllt (mit b und S) [sowie „P_1“ anstelle von „P“] die Bedingungen (1)–(3.a)
A_{10}: (P) ist gleich (P_1)

Hinweis:
In (2), (3.a) und (3.b) sind implizite Allquantoren zu ergänzen: dies ist typisch für indefinite Ausdrücke im Vordersatz von informell formulierten Implikationen („wenn (ein) x die Eigenschaft ... hat, dann ...“

VI. Literaturhinweise

Die englischen Einführungen haben nicht nur kein deutschsprachiges Pendant, sondern sind vor allem auch geeignet, sich die englische Terminologie anzueignen, um die entsprechende Originalliteratur lesen zu können. Ein sinnvolles Lektüreprogramm ist z.B., wenn man nach Savignys *Grundkurs im logischen Schließen* und dem *Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren* zu dem Band von Partee und anderen übergeht und ggfs das Kapitel zur Definitionslehre in Suppes *Introduction to Logic* konsultiert. Einen ersten Einstieg in die Definitionslehre gibt auch der Abschn. 3.11 in Wunderlichs *Arbeitsbuch Semantik.*

zum gesamten Stoff:

Suppes, Patrick: *Introduction to Logic.* Van Nostrand Reinhold: New York 1957 (unverändert wiederveröffentlicht durch Mineola, NY: Dover 1999). –

Umfaßt im Teil 1 die Prinzipien des logischen Schließens und des Definierens (das Kapitel zur Definitionslehre ist nach wie vor einschlägig) und im Teil 2 werden die Grundzüge der Mengenlehre behandelt.

Partee, Barbara H. / Alice ter Meulen / Robert E. Wall: *Mathematical Methods in Linguistics.* Corrected 1. ed. Dordrecht usw.: Kluwer 1993. –

Nahezu erschöpfende Darstellung (1) der mengentheoretischen, der logischen und der algebraischen Grundlagen der modernen linguistischen Beschreibung von Sprache und Sprachen (Algebren dienen zur Modellierung der Welt und sind damit Grundlage für die Beschreibung der Beziehung zwischen Sprache(n) und Welt); (2) der Theorie der formalen Sprachen und ihrer Anwendung auf natürliche Sprachen (vernachlässigt: Definitionslehre).

zu Teilfragen:

Savigny, Eike von: *Grundkurs im logischen Schließen.* Übungen zum Selbststudium. 3., durchges. Aufl. ([1]1976 bei dtv). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1993. –

Eignet sich sehr gut, praktische Fertigkeiten im logischen Schließen zu erwerben und damit eine der wichtigsten Anwendungen der Aussagen- und der Prädikatenlogik von der Praxis her kennenzulernen.

Savigny, Eike von: *Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren.* Übungen zum Selbststudium. München: dtv 1970. –

Basiert im wesentlichen auf dem entsprechenden Kapitel zur Definitionslehre in Suppes *Introduction to Logic.*

Klabunde, Ralf: *Formale Grundlagen der Linguistik.* Ein Arbeitsbuch. Tübingen: Narr 1998. –

Der Titel ist eher irreführend: es handelt sich um eine Einführung in die Theorie der formalen Sprachen (genauer: deren Syntax); inwieweit natürliche Sprachen sich durch formale Sprachen beschreiben lassen, oder ob für natürliche Sprachen nicht vielmehr eine geeignete Weiterentwicklung der traditionellen Grammatik weitaus fruchtbarer ist, die dann erst noch zur Theorie der formalen Sprachen ins Verhältnis zu setzen wäre, bleibt undiskutiert. Dieses Buch eignet sich vor allem für Studierende der Linguistik mit Interesse an der Computerlinguistik, der KI-Forschung und der theoretischen Informatik.

Heim, Irene / Angelika Kratzer: *Semantics in Generative Grammar.* Oxford usw.: Blackwell 1998. –

Beispiel für die zentrale Rolle der mengentheoretischen Grundlagen in der modernen Semantik (enthält eine gute Einführung in diese Grundlagen);

Schwarz, Monika / Jeannette Chur: *Semantik.* Ein Arbeitsbuch. Tübingen: Narr 1993 (u.ö.). –

Das Kapitel zur Satzsemantik besteht im wesentlichen aus einer Einführung in die formale Semantik, deren Kern wiederum eine Einführung in die Aussagen- und Prädikatenlogik ist.

Wunderlich, Dieter: Arbeitsbuch Semantik. 2., erg. Aufl. Frankfurt a.M.: Hain 1991.