

Übersicht

1	Stetige Funktionen	3
1.1	Lokal kompakte Hausdorffräume	3
1.2	Dichte Teilmengen	8
1.3	Norm-Intervalle	9
2	Auswertungsfunktionale	13
2.1	Norm-Intervall erhaltend	13
2.2	Extremalfunktionale	16
2.3	Extremalfunktionale erhalten Norm-Intervalle	22
2.4	Zerlegungssatz für Extremalfunktionale	25
2.5	Fortsetzbarkeit	29
2.6	Teilmenge des Dualraumes	30
2.7	Verhalten unter linearen Isometrien	31
3	Darstellung linearer Isometrien	34
3.1	Kompositionsoperatoren	34
3.2	Disjunktheit erhaltende Operatoren	39
3.3	Schwache Darstellung	48
3.4	Wertevorrat mit eindimensionalem Zentralisator	51
3.5	Strikt konvexer Wertevorrat	58
4	Bemerkungen	63
4.1	Zum Zerlegungssatz für Extremalfunktionale	63
4.2	Über Disjunktheit erhaltende Operatoren	67
4.3	Eindimensionaler Zentralisator	68
4.4	Linearität	68
	Literaturverzeichnis	73

Einleitung

Dieses Dokument enthält zusätzlich zur abgegebenen Diplomarbeit die Kommentare der Gutachter als Fußnoten. Weitergabe, Vervielfältigung und Zitierung dieser Arbeit nur nach Rücksprache mit dem Autor.

Berlin, Juni 2005

Die Prüfungsordnung für den Diplomstudiengang Mathematik an der Freien Universität Berlin beschreibt die Funktion der Diplomarbeit in § 23:

„Die Diplomarbeit soll zeigen, daß der Kandidat in der Lage ist, ein mathematisches Problem nach wissenschaftlich-kritischen Methoden und Grundsätzen selbständig zu bearbeiten.“

Das mathematische Problem, das der Verfasser dieser Arbeit selbstständig bearbeitet hat, ist die Frage: Wann hat eine lineare Isometrie zwischen zwei Räumen stetiger, vektorwertiger Funktionen eine kanonische Darstellung? Eine der ersten Erkenntnisse zu dieser Thematik präsentiert Stefan Banach im Jahr 1932. Wenn die Funktionen auf kompakten, metrischen Räumen definiert sind, ihre Werte im Skalkörper annehmen und die lineare Isometrie surjektiv ist, so zeigt Banach [3, § IX.4], dann hat die Isometrie eine kanonische Darstellung. In der weiteren Untersuchung dieser Frage — u.a. von Włodzimierz Holsztyński, Ehrhard Behrends sowie Edward Beckenstein, Lawrence Narici und Aaron R. Todd — stellte sich heraus, dass eine solche Darstellung für nicht-surjektive Isometrien oder für Räume vektorwertiger Funktionen ohne zusätzliche Annahmen nicht möglich ist.

Kondensationskern dieser Arbeit war der Artikel [21] von Jyh-Shyang Jeang und Ngai-Ching Wong aus dem Jahr 2003. Im Verlauf der Bearbeitung gab es einige Überraschungen. Schienen zunächst die Extremalfunktionale das geeignete Mittel zur Untersuchung der linearen Isometrien zu sein, so stellte sich später heraus, dass weder Holsztyński noch die Gruppe Beckenstein, Narici und Todd dieses Werkzeug benutzten. Es war daher notwendig, die größere Klasse der Auswertungsfunktionale zu betrachten. Überraschend war auch die Nähe des Problems zur Theorie der halbgeordneten linearen Räume. Begriffe wie „Disjunktheit erhaltend“ oder „Zentralisator“ scheinen dort ihre Quelle zu haben.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Die Kapitel 1 und 2 präsentieren die Werkzeuge zur Untersuchung der linearen Isometrien, das zentrale dritte Kapitel beantwortet die gestellte Frage und das letzte Kapitel ist der Platz für rückblickende Anmerkungen. Es wurde Wert darauf gelegt, die Begriffe nicht unkommentiert zu lassen, sondern anhand von Beispielen o.Ä. die in ihnen liegende Anschauung aufzuzeigen. In einführenden Lehrbüchern zu findende Aussagen wurden nicht bewiesen.

Betreut wurde die Arbeit von Prof. Ehrhard Behrends. Christa Sonnenberg schlug die chinesischen Schriftzeichen des Literaturverzeichnisses nach. Dorothea Schliski und Ralf Forster lasen Korrektur. Ihnen allen möchte ich auch an dieser Stelle danken.

Berlin, 21. Januar 2005

1 Stetige Funktionen

Das Thema dieses Kapitels sind stetige Funktionen, die auf einem lokal-kompakten Hausdorffraum definiert sind und Werte in einem Banachraum annehmen. Im ersten Abschnitt tragen wir einige topologische Eigenschaften der lokalkompakten Hausdorffräume zusammen. Es geht um den Zusammenhang von Konvergenz und Häufungspunkten, den Satz von Urysohn und die Zerlegung der Eins. Des Weiteren werden in diesem Abschnitt grundlegende Eigenschaften des Raumes der stetigen Funktionen gezeigt. Im zweiten Abschnitt betrachten wir einige dichte Teilmengen dieser Funktionenräume und im letzten Abschnitt dieses Kapitels charakterisieren wir die Norm-Intervalle solcher Räume.

1.1 Lokal kompakte Hausdorffräume

Ein *Filter* \mathcal{F} auf einer Menge X ist ein System von Mengen, welches abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist ($F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$), abgeschlossen zur Bildung von Obermengen ist ($F \in \mathcal{F}, F \subset G \Rightarrow G \in \mathcal{F}$) und nicht die leere Menge enthält. Ein wichtiges Beispiel eines Filters in einem topologischen Raum ist der *Umgebungsfilter* $\mathcal{U}(x)$ eines Punktes x . Er ist das System aller Umgebungen von x .

Wir sagen: Ein Filter \mathcal{F} *konvergiert* gegen einen Punkt x und schreiben $\mathcal{F} \rightarrow x$, falls $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}(x)$. Zudem bezeichnen wir die Menge $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ als die Menge der *Häufungspunkte* von \mathcal{F} .

Sind X und Y zwei Mengen, $\varphi: X \rightarrow Y$ eine Funktion und \mathcal{F} ein Filter auf X , so bezeichnen wir das System $\{G \mid \exists F \in \mathcal{F}: \varphi[F] \subset G \subset Y\}$ als *Bildfilter* von φ . Sind X und Y mit einer Topologie versehen, so ist φ *stetig* an einem Punkt $x \in X$, falls für jeden gegen x konvergenten Filter \mathcal{F} der Bildfilter $\varphi(\mathcal{F})$ gegen $f(x)$ konvergiert.

1.1. Sei X ein kompakter Hausdorffraum, $x \in X$ und \mathcal{F} ein Filter auf X . Genau dann konvergiert \mathcal{F} gegen x , wenn x der einzige Häufungspunkt von \mathcal{F} ist.

Beweis. [23, S. 46, S.60] Sei $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \{x\}$. Angenommen, \mathcal{F} konvergiert nicht gegen x . Dann gibt es eine offene Umgebung U von x , welche nicht in \mathcal{F} enthalten ist. Wir setzen

$$\mathcal{G} := \{F \cap L \mid U^C \subset L \subset X, F \in \mathcal{F}\}.$$

Wir zeigen, dass \mathcal{G} ein Filter auf X ist. Wegen $U \notin \mathcal{F}$ ist $F \not\subset U$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und zusammen mit $\emptyset \notin \mathcal{F}$ folgt $F \cap U^C \neq \emptyset$. Daher enthält \mathcal{G} nicht die leere Menge. Für zwei Mengen $F_1 \cap L_1$ und $F_2 \cap L_2$ ist auch der Schnitt $(F_1 \cap F_2) \cap (L_1 \cap L_2)$ in \mathcal{G} enthalten, da $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ und $U^C \subset L_1 \cap L_2$. Zuletzt ist für ein vorgelegtes $F \cap L \in \mathcal{G}$ auch jede Obermenge $G \supset F \cap L$ in \mathcal{G} enthalten, denn für $\tilde{F} := G \cup F$ und $\tilde{L} := G \cup L$ gilt $G = \tilde{F} \cap \tilde{L}$.

Wir zeigen, dass x kein Häufungspunkt von \mathcal{G} ist. Da U^C in \mathcal{G} liegt ($U^C = X \cap U^C$), kann U nicht in \mathcal{G} liegen, sonst wäre $U \cap U^C = \emptyset \in \mathcal{G}$. Daraus folgt, dass x für kein $G \in \mathcal{G}$ in \overline{G} liegt und daher auch kein Häufungspunkt von \mathcal{G} sein kann.

Andererseits muss \mathcal{G} einen Häufungspunkt y haben: Als Filter ist der Schnitt von endlich vielen Mengen G_1, \dots, G_n aus \mathcal{G} nicht leer und daher gilt auch für den Schnitt ihrer Abschlüsse $\bigcap_{i=1}^n \overline{G_i} \neq \emptyset$. Also hat die Familie $\{\overline{G} \mid G \in \mathcal{G}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Nach einer grundlegenden Charakterisierung von Kompaktheit [15, 9.2] muss \mathcal{G} einen Häufungspunkt besitzen, denn X ist kompakt.

Nun muss dieses y auch ein Häufungspunkt von \mathcal{F} sein, denn $y \in \overline{F \cap U^C} \subset \overline{F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Das widerspricht der Tatsache, dass das Element x , $x \neq y$, der einzige Häufungspunkt ist. Also war die Annahme falsch und \mathcal{F} konvergiert doch gegen x .

Sei nun \mathcal{F} konvergent gegen x . Wir zeigen, dass \mathcal{F} genau den Häufungspunkt x hat. Um zu zeigen, dass x ein Häufungspunkt ist, sei ein $F \in \mathcal{F}$ vorgelegt. Für jede Umgebung U von x ist der Schnitt $U \cap F$ nicht leer, da U zum Filter gehört. Daher ist $x \in \overline{F}$. Da wir so für jedes $F \in \mathcal{F}$ argumentieren können, folgt $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Angenommen, es gibt noch einen weiteren Häufungspunkt $y \neq x$. Dann liegt y im Abschluss jedes Elements aus \mathcal{F} . Insbesondere ist $y \in \overline{U}$ für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$, was der Hausdorffeigenschaft widerspricht. \square

1.2. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Seien K und G disjunkte Teilmengen von X , K kompakt, G abgeschlossen. Dann gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in G$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Beweis. [8, 3.1.7] Folgt aus der vollständigen Regularität von X , einem Kompaktheitsargument und einer geschickten Wahl von f . \square

1.3 Beispiel. Häufige Anwendung des Satzes von Urysohn: Sei x aus dem lokalkompakten Hausdorffraum X und sei U eine offene Umgebung U von x . Dann gibt es eine stetige Funktion $f \in C(X, [0, 1])$, die an x oder sogar in einer kompakten Umgebung $K \subset U$ von x den Wert 1 annimmt und außerhalb von U verschwindet.

1.4 Beispiel. Vektorwertige Version des Satzes von Urysohn: Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und seien K und G disjunkte Teilmengen von X , K kompakt, G abgeschlossen. Sei E ein Banachraum und $e \in E$. Wir wählen mit dem Satz von Urysohn eine Funktion $\tilde{f} \in C(X, [0, 1])$, die auf K den Wert 1 annimmt und außerhalb von U verschwindet. Wir setzen noch $f := \tilde{f}e$. Da die Skalarmultiplikation in Banachräumen stetig ist, ist $f: X \rightarrow E$ eine beschränkte stetige Funktion.¹

Der Träger $\text{supp } f$ einer Funktion f bezeichnet den Abschluss der Menge $\{x \mid x \in X, f(x) \neq 0\}$.

Lemma. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Sei V eine offene Teilmenge von X und sei $K \subset V$ eine kompakte Teilmenge von V . Dann gibt es eine offene Menge U mit $K \subset U \subset \bar{U} \subset V$.

Beweis. Aufgrund der Regularität von X gibt es zu jedem $k \in K$ zwei offene, zueinander disjunkte Mengen V_k, U_k mit $k \in U_k$ und $V^c \subset V_k$. Nun ist $K \subset \bigcup \{U_k \mid k \in K\}$ und K ist kompakt. Daher gibt es $k_1, \dots, k_n \in K$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{k_i} =: U$.

Wir weisen nach, dass $\bar{U} \subset V$. Zunächst ist $\bar{U}_{k_i} \subset V$ ($i = 1, \dots, n$): Sei $l \in \bar{U}_{k_i}$. Angenommen, l liegt nicht in V . Dann ist l in der offenen Menge V_{k_i} enthalten und es gibt eine Umgebung W von l , die ganz in V_{k_i} liegt. Aber da l ein Randpunkt von U_{k_i} ist, muss $W \cap U_{k_i} \neq \emptyset$ sein. Da wir aber V_{k_i} und U_{k_i} disjunkt gewählt haben, ist dies ein Widerspruch. Also war die Annahme falsch und es ist $\bar{U}_{k_i} \subset V$. Aus der (unter Verwendung der Isotonie der Abschlussoperation leicht zu beweisenden) Tatsache $\bar{U} = \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_{k_i}$ [15, Exc. 1.8] folgt die Behauptung. \square

1.5. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Sei $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge, die von endlich vielen offenen Mengen V_i überdeckt wird, d.h. $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Dann gibt es n Funktionen $f_1, \dots, f_n \in C(X, [0, 1])$ mit $\text{supp } f_i \subset V_i$ ($i = 1, \dots, n$) und $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage in drei Schritten.

¹Hierzu merkte der Gutachter an, dass diese Aussage trivial aus 1.2 folgt. (So hatte ich es auch gedacht: Als *Beispiel* für den o.g. Satz.)

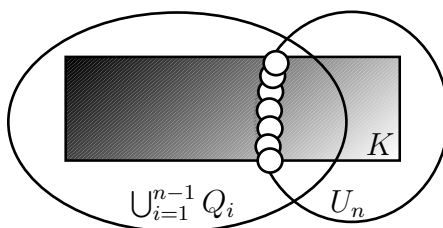


Abbildung 1.1: Zum Beweis des Satzes 1.5. Die kleinen Kreise sollen die Mengen W_k symbolisieren.

Es gibt offene Mengen U_1, \dots, U_n mit $U_i \subset V_i, \bar{U}_i$ kompakt ($i = 1, \dots, n$) und $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. In der Ein-Punkt-Kompaktifizierung αX wählen wir mittels der Hausdorffeigenschaft zu jedem $k \in K$ eine offene Umgebung W_k mit $\infty \notin \bar{W}_k$. Wegen der Kompaktheit von K und $K \subset \bigcup \{W_k \mid k \in K\}$ gibt es $k_1, \dots, k_m \in K$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^m W_{k_j}$. Wir setzen für $i = 1, \dots, n$:

$$U_i := \left(\bigcup_{j=1}^m W_{k_j} \right) \cap V_i.$$

Die Mengen U_i sind offen und wegen $\infty \notin \bigcup_{j=1}^m \bar{W}_{k_j}$ ist auch $\infty \notin \bar{U}_i$. Daher ist $\bar{U}_i^{\alpha X} = \bar{U}_i^X$ und somit ist \bar{U}_i^X kompakt. (Sie sind offensichtlich so gewählt, dass $U_i \subset V_i$ und $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ gilt.)

Es gibt offene Mengen Q_1, \dots, Q_n mit $\bar{Q}_i \subset U_i$ ($i = 1, \dots, n$) und $K \subset \bigcup_{i=1}^n Q_i$. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion nach n . Für $n = 1$ ist die Aussage äquivalent zu obigem Lemma. Wir nehmen als Induktionsvoraussetzung an, die Aussage gilt für alle Überdeckungen, die aus $n - 1$ Mengen bestehen. Sei nun eine Überdeckung von K aus n Mengen U_1, \dots, U_n vorgelegt. Dann ist U_1, \dots, U_{n-1} eine Überdeckung von $K \cap U_n^C$ und nach Induktionsvoraussetzung gibt es Q_1, \dots, Q_{n-1} mit $K \cap U_n^C \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i$, wobei Q_i offene Mengen sind, deren Abschluss in U_i liegt ($i = 1, \dots, n - 1$).

Zu jedem $k \in K \cap U_n^C \cap \bar{U}_n$ wählen wir eine offene Umgebung W_k von k , die ganz in der offenen Menge $\bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i$ liegt. Wir setzen

$$L := K \cap U_n \cap \left(\bigcup \{W_k \mid k \in K \cap U_n^C \cap \bar{U}_n\} \right)^C.$$

Abbildung 1.1 soll die Situation verdeutlichen. Wir zeigen die Abgeschlossenheit der Menge L . Sei dazu ein $l \in L^C$ vorgelegt. Wir konstruieren eine zu L disjunkte Umgebung V von l . Falls $l \in K^C$ liegt, dann gibt es auf

Grund der Abgeschlossenheit von K eine solche Umgebung. Falls l in einer der Mengen W_k liegt, dann ist W_k die gesuchte Umgebung. Falls l in $U_n^C = \overline{U_n^C} \cup (\overline{U_n} \cap U_n^C)$ liegt, unterscheiden wir wie folgt: Falls $l \in \overline{U_n^C}$ liegt, folgt die Existenz einer zu L disjunkten Umgebung aus der Abgeschlossenheit von $\overline{U_n^C}$. Falls l in $\overline{U_n} \cap U_n^C$ liegt, dann ist entweder l in K^C (den Fall haben wir oben schon behandelt) oder es ist $l \in K$, dann leistet die Menge W_l das Gewünschte.

Also ist $L \subset U_n$ abgeschlossen und wegen $L \subset K$ kompakt. Wir wenden wieder obiges Lemma an, um eine offene Menge Q_n zu gewinnen mit $L \subset Q_n \subset \overline{Q_n} \subset U_n$. Es ist $K \subset \bigcup_{i=1}^n Q_n$, denn es ist

$$K \subset (K \cap U_n^C) \cup \left(\bigcup \{W_k \mid k \in K \cap U_n^C \cap \overline{U_n}\} \right) \cup L,$$

wobei L von Q_n überdeckt wird und der Rest von $\bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i$. Nach dem Prinzip der mathematischen Induktion haben wir somit die Behauptung nachgewiesen.

Existenz der Zerlegung der Eins. Wir wählen für $i = 1, \dots, n$ mit 1.2 eine Funktion $g_i \in C(X, [0, 1])$ mit $g_i(q) = 1$ für alle $q \in \overline{Q_i}$ und $g_i(x) = 0$ für alle $x \in U_i^C$. (Wir benutzen dabei, dass $\overline{Q_i}$ als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums $\overline{U_i}$ kompakt ist.) Wir setzen $s(x) := \sum_{i=1}^n g_i(x)$. Wegen $K \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{Q_i}$ ist $s(k) > 0$ für alle $k \in K$. Wir definieren nun $f_i(x) := g_i(x)/s(x)$, die f_i leisten das Gewünschte [22, 16.25(c)]. \square

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und E ein Banachraum. Eine stetige Funktion $f: X \rightarrow E$ heißt *im Unendlichen verschwindend*, falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{x \mid x \in X, \|f(x)\| \geq \epsilon\}$ kompakt ist. Gegenstand dieser Arbeit ist der Funktionenraum

$$C_0(X, E) := \{f \mid f: X \rightarrow E, f \text{ stetig, im Unendlichen verschwindend}\},$$

versehen mit der Supremumsnorm $\|f\| := \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$.

1.6. *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und E ein Banachraum. Dann ist der Raum $C_0(X, E)$ ein Banachraum.*

Beweis. Wir weisen hier nur die Vollständigkeit nach.

Die Vollständigkeit des Raumes aller beschränkten Funktionen auf X lässt sich herleiten aus der Vollständigkeit von E , analog zum skalaren Fall [15, 8.6] oder [29, S.3–4].

Wir zeigen die Abgeschlossenheit des Unterraumes $C_0(X, E)$ in diesem Raum. Sei f aus dem Abschluss von $C_0(X, E)$ bezüglich der Supremumsnorm. Dann ist f beschränkt nach Definition und stetig, wie man analog zum skalaren Fall [15, 3.3] begründen kann. Wir zeigen, dass f im Unendlichen verschwindet. Angenommen, es gibt ein $\epsilon > 0$ derart, dass $\{x \mid \|f(x)\| \geq \epsilon\}$ nicht kompakt ist. Wir wählen ein $g \in C_0(X, E)$ mit $\|f - g\| \leq \epsilon/3$ und betrachten das Kompaktum $K := \{x \mid \|g(x)\| \geq \epsilon/3\}$. Dann muss es ein $x_0 \in K^c$ mit $\|f(x_0)\| \geq \epsilon$ geben, denn sonst wäre $\{x \mid \|f(x)\| \geq \epsilon\}$ als abgeschlossene Teilmenge von K kompakt. Aber daraus folgt der Widerspruch

$$\epsilon \leq \|f(x_0)\| \leq \|f(x_0) - g(x_0)\| + \|g(x_0)\| \leq \frac{2\epsilon}{3}.$$

Also war die Annahme falsch und f liegt in $C_0(X, E)$.

Aus der Abgeschlossenheit des Unterraums folgt dessen Vollständigkeit, siehe [15, 8.1] oder [29, Lemma I.1.3 (a)]. \square

1.7. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, E ein Banachraum und f eine Funktion aus $C_0(X, E)$. Dann gibt es ein x_0 aus X , an dem f seine Norm annimmt, d.h. mit $\|f(x_0)\| = \|f\|$.

Beweis. Sei $f \in C_0(X, E)$. Die Menge

$$K := \{x \mid x \in X, \|f(x)\| \geq \frac{\|f\|}{2}\}$$

ist kompakt, und da die Funktion $x \mapsto \|f(x)\|$ stetig ist, gibt es ein $x_0 \in X$ mit $\|f(x_0)\| = \max\{\|f(x)\| \mid x \in K\} = \|f\|$, siehe z.B. [15, 9.19]. \square

1.2 Dichte Teilmengen

Die Menge aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger und Werten im Banachraum E wird als $C_c(X, E)$ geschrieben.

1.8. Die Menge $C_c(X, E)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger liegt dicht in $C_0(X, E)$.

Beweis. Seien ein $f \in C_0(X, E)$ und ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir suchen ein $g \in C_c(X, E)$ mit $\|f - g\| \leq \epsilon$. Falls $\|f(x)\| < \epsilon$ für alle $x \in X$, wählen wir g als die Nullfunktion und sind fertig. Andernfalls betrachten wir die kompakte Menge $K := \{x \mid x \in X, \|f(x)\| \geq \epsilon\}$ und die offene Menge $U :=$

$\{x \mid x \in X, \|f(x)\| > \epsilon/2\}$. Nach 1.2 gibt es eine Funktion $h \in C(X, [0, 1])$, die auf U^C verschwindet und die auf K den Wert 1 annimmt. Mit $g := hf$ gilt dann wie verlangt

$$\sup\{\|f(x) - g(x)\| \mid x \in X\} = \sup\{\|f(x) - g(x)\| \mid x \in K^C\} \leq \epsilon.$$

Der Träger von g ist in dem Kompaktum $\{x \mid \|f(x)\| \geq \epsilon/2\}$ enthalten. \square

1.9. Seien X ein lokalkompakter Hausdorffraum, $x_0 \in X$ und E ein Banachraum. Dann ist die Menge

$$D := \{h \mid h \in C_0(X, E), \exists \text{ Umgebung } U_h(x_0) : h(y) = 0 \forall y \in U_h(x_0)\}$$

dicht in dem linearen Raum $M := \{f \mid f \in C_0(X, E), f(x_0) = 0\}$. Darüber hinaus liegt sogar $D \cap C_c(X, E)$ dicht in M .

Beweis. Seien ein $f \in M$ und ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir suchen ein $h \in D$ mit $\|h - f\| \leq \epsilon$. Wir betrachten dazu die offene Umgebung $U := \{x \mid x \in X, \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon\}$ von x_0 und wählen unter Verwendung der Lokalkompaktheit und der Hausdorffeigenschaft eine kompakte Umgebung $K \subset U$ von x_0 . Nach 1.2 gibt es eine stetige Funktion $g: X \rightarrow [0, 1]$ mit $g(x) = 1$ für $x \in K$ und $g(x) = 0$ für $x \notin U$. Nun ist $h(x) := f(x) - g(x)f(x)$ in D und es gilt $\|h - f\| = \sup\{\|g(x)f(x)\| \mid x \in U\} \leq \sup\{\|f(x)\| \mid x \in U\} \leq \epsilon$.

Um nun sogar ein $h_c \in D \cap C_c(X, E)$ mit $\|f - h_c\| < \epsilon$ zu finden, wählen wir mit 1.8 eine Funktion $\hat{h} \in C_c(X, E)$ mit $\|f - \hat{h}\| < \epsilon/2$. Der Beweis von 1.8 zeigt, dass wir \hat{h} so wählen können, dass $\hat{h}(x_0) = 0$. Zu \hat{h} wählen wir mit der gerade gezeigten Methode ein $h_c \in D$ mit $\|h_c - \hat{h}\| < \epsilon/2$. Als Differenz zweier Funktionen mit kompaktem Träger hat auch h_c kompakten Träger und es ist wie gewünscht $\|f - h_c\| \leq \|f - \hat{h}\| + \|\hat{h} - h_c\| < \epsilon$. \square

1.3 Norm-Intervalle

Seien d und e zwei Elemente eines Banachraumes E . Unter dem *Norm-Intervall* $[d; e]$ verstehen wir den Schnitt über alle abgeschlossenen Kugeln $U_\alpha(e_0)$, die d und e enthalten:

$$U_\alpha(e_0) := \{c \mid c \in E, \|c - e_0\| \leq \alpha\} \quad (e_0 \in E, \alpha > 0)$$

$$[d; e] := \bigcap \{U_\alpha(e_0) \mid e_0 \in E, \alpha > 0, \{d, e\} \subset U_\alpha(e_0)\}$$

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Norm-Intervalle von Räumen stetiger Funktionen. Wir benötigen folgendes Lemma.

Lemma. Sei E ein Banachraum und seien $z, d, e \in E, r > 0$ derart, dass $\|z\| \leq r, \|z - d\| \leq r$ und $\|z - e\| > r$. Dann gibt es für jedes $R > r$ ein z_R mit $\|z_R\| < R, \|z_R - d\| < R$ und $\|z_R - e\| > R$.

Beweis. [6, Prop. 1.3(i)] Wir setzen $\alpha := \|z - e\| - r$. Dann ist $\alpha > 0$, und für $\tilde{r} := r + \alpha/2$ gilt $\|z\| < \tilde{r}, \|z - d\| < \tilde{r}$ und weiterhin $\|z - e\| > \tilde{r}$.

Wir zeigen, dass es ein $p \in \text{conv}\{0, e\}$ gibt mit $\|z - p\| = \tilde{r}$. Die Funktion $\theta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \theta(\lambda) := \|\lambda e - z\|$ ist stetig und konvex:

$$\theta\left(\frac{\lambda + \lambda'}{2}\right) = \frac{1}{2}\|\lambda e - z + \lambda' e - z\| \leq \frac{1}{2}(\|\lambda e - z\| + \|\lambda' e - z\|).$$

Die Funktion θ erfüllt $\theta(0) < r$ und $\theta(1) > r$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\lambda_0 \in (0, 1)$ mit $\theta(\lambda_0) = r$. Dieses λ_0 ist eindeutig bestimmt, denn $\theta(\lambda_0) = \theta(\lambda_1) = r$ für $\lambda_0 < \lambda_1$ führt zu dem Widerspruch

$$r = \theta(\lambda_0) = \theta\left(\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)0 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\lambda_1\right) \leq \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\underbrace{\theta(0)}_{<r} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\underbrace{\theta(\lambda_1)}_{=r} < r.$$

Wir behaupten, dass $z_R := p + \frac{R}{\tilde{r}}(z - p) = z + \frac{R - \tilde{r}}{\tilde{r}}(z - p)$ das Gewünschte leistet. Es ist

$$\|z_R\| \leq \underbrace{\|z\|}_{<\tilde{r}} + \frac{R - \tilde{r}}{\tilde{r}} \underbrace{\|z - p\|}_{=\tilde{r}} < \tilde{r} + R - \tilde{r} = R$$

und

$$\|z_R - d\| \leq \|z - d\| + \frac{R - \tilde{r}}{\tilde{r}}\|z - p\| < R.$$

Für die Abschätzung von $\|z_R - e\|$ setzen wir $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \psi(\lambda) := \|\lambda e - z_R\|$. Wie oben die Funktion θ ist ψ eine stetige, konvexe Funktion. Es ist $\psi(0) < R$ und $\psi(\lambda_0) = R$. Deshalb muss $\|z_R - e\| = \psi(1) > R$ sein, denn sonst erhielten wir einen Widerspruch:

$$R = \psi(\lambda_0) = \psi\left(\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)0 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\lambda_1\right) \leq \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\underbrace{\psi(0)}_{<R} + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\underbrace{\psi(\lambda_1)}_{\leq R} < R. \quad \square$$

1.10. Seien X ein lokalkompakter Hausdorffraum, E ein Banachraum und $f \in C_0(X, E)$. Dann ist $[0; f] = \{g \mid g \in C_0(X, E), g(x) \in [0; f(x)] \forall x \in X\}$. Insbesondere liegt für jedes $h \in C(X, [0, 1])$ die Funktion hf in $[0; f]$.

Beweis. [6, Prop. 1.6] „ \supset “ Sei $g \in C_0(X, E)$ mit $g(x) \in [0, f(x)]$ für alle $x \in X$. Seien $f_0 \in C_0(X, E)$ und $r > 0$ derart, dass $\|f_0\| \leq r, \|f_0 - f\| \leq r$.

Da $\|f_0(x) - f(x)\| \leq \|f_0 - f\| \leq r$ für jedes $x \in X$, ist $\|f_0(x) - g(x)\| \leq r$.
 Übergang zum Supremum ergibt die Behauptung.

„ \subset “ Sei $g \in [0; f]$. Angenommen, es gibt ein $x_0 \in X$ mit $g(x_0) \notin [0, f(x_0)]$.
 Dann gibt es nach obigem Lemma ein $e_0 \in E$ und ein $R > \|f\|$ mit $\|e_0\| < R$, $\|e_0 - f(x_0)\| < R$ und $\|e_0 - g(x_0)\| > R$. Wir setzen $\epsilon := \|e_0\| - R$ und
 wählen mit 1.2 eine Funktion $h \in C(X, [0, 1])$ mit $\text{supp } h \subset \{x \mid \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon\}$ und $h(x_0) = 1$. Weiter definieren wir

$$f_0(x) := e_0 - f(x_0) + f(x).$$

Dann ist $\|hf_0 - g\| \geq \|h(x_0)f_0(x_0) - g(x_0)\| > R$, und für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \|h(x)f_0(x) - f(x)\| &= \|h(x)(e_0 - f(x_0) + f(x)) - f(x)\| \\ &\leq \|h(x)(e_0 - f(x_0))\| + \|h(x)f(x) - f(x)\| \\ &< h(x)R + (1 - h(x))\|f\| \leq R, \end{aligned}$$

wobei wir $R > \|f\|$ verwendet haben. Übergang zum Supremum liefert $\|hf_0 - f\| \leq R$. Zuletzt gilt noch — u.a. wegen der Wahl des Trägers von h — für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} \|h(x)f_0(x)\| &= \|h(x)(e_0 - f(x_0) + f(x))\| \leq \|e_0\| + h(x)\|f(x) - f(x_0)\| \\ &\leq R - \epsilon + h(x)\epsilon < R, \end{aligned}$$

Daraus folgt $\|hf_0\| \leq R$. Somit haben wir eine Kugel mit Mittelpunkt f_0 und Radius R bestimmt, die zwar 0 und f enthält, aber nicht g . Das steht im Widerspruch zu $g \in [0; f]$. Also war die Annahme falsch und $g(x_0)$ liegt doch in $[0; f(x_0)]$.

Zum Nachweis des Zusatzes seien ein $f \neq 0$ und ein $h \in C(X, [0, 1])$ vorgelegt. Es ist $h(x)f(x) \in [0, f(x)]$: Da Kugeln in normierten Räumen konvex sind, muss jede Kugel, die die Null und $f(x)$ enthält, auch die Konvexkombination $h(x)f(x) = (1 - h(x))0 + h(x)f(x)$ enthalten. Nach dem gerade Gezeigten folgt daraus $hf \in [0; f]$. \square

1.11 Beispiel. Zur Motivation des Grundwortes „Intervall“ im Begriff des Norm-Intervalls: (Spezialfall von [1, Lemma 4.1].) Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Wir definieren eine Halbordnung auf $C_0(X, \mathbb{R})$ wie folgt: Es soll $f \prec_M g$ sein, falls f und g an jeder Stelle x das gleiche Vorzeichen haben und zudem $f(x)$ dem Betrag nach kleiner oder gleich $g(x)$ ist,

$$f \prec_M g \Leftrightarrow \forall x \in X: 0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ oder } g(x) \leq f(x) \leq 0.$$

Wir können direkt an der Definition ablesen, dass diese Relation eine *lineare Halbordnung* definiert. (Gemeint ist eine reflexive, antisymmetrische, transitive Relation, die verträglich ist mit der Vektoraddition, d.h. $f \prec_M g \Rightarrow f + h \prec_M g + h$ für alle $h \in C_0(X, \mathbb{R})$, und mit der Skalarmultiplikation, d.h. $0 \prec_M f \Rightarrow 0 \prec_M \alpha f$ für alle $\alpha > 0$.) Wir zeigen nun:

$$f \prec_M g \Leftrightarrow f \in [0; g].$$

Sei $f \prec_M g$ und seien $z \in C_0(X, \mathbb{R})$, $r > 0$ derart, dass $\|z\| \leq r$ und $\|z - g\| \leq r$. Nach 1.7 gibt es ein $x_0 \in X$ mit $|z - f(x_0)| = \|z - f\|$. Falls $z - f(x_0) \geq 0$, so folgt

$$r \geq \|z - g\| \geq z - g(x_0) \geq z - f(x_0) = \|z - f\|,$$

also $f \in [0; g]$. Falls $z - f(x_0) < 0$, so folgt die Behauptung, indem wir $f - z(x_0)$ betrachten.

Sei andersherum $f \in [0; g]$. Wir bemerken zunächst, dass für $\alpha > 0$ das Norm-Intervall $[0; \alpha]$ in \mathbb{R} gerade das übliche Intervall $\{\beta \mid 0 \leq \beta \leq \alpha\}$ ist. Sei $x \in X$ beliebig vorgegeben. Angenommen, $g(x) \geq 0$. Nach der Charakterisierung von Norm-Intervallen 1.10 ist $f(x) \in [0; g(x)]$, also $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Der Fall $g(x) < 0$ folgt mit einer ganz ähnlichen Schlussweise. Da wir so für jedes $x \in X$ argumentieren können, folgt $f \prec_M g$.

2 Auswertungsfunktionale

Wir nennen ein lineares Funktional $\mu \in C_0(X, E)'$ ein *Auswertungsfunktional*, falls es die Form $\mu = e' \circ ev_x$ hat. Hierbei sind $e' \in E'$, $x \in X$ und $ev_x: C_0(X, E) \rightarrow E$ bezeichnet die Funktionsauswertung $ev_x(f) := f(x)$.

Diese Auswertungsfunktionale spielen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung linearer Isometrien und sind deshalb Thema des ganzen vorliegenden Kapitels. Im ersten Abschnitt zeigen wir, dass Norm-Intervall erhaltende Funktionale Auswertungsfunktionale sind. Im zweiten Abschnitt tragen wir einige grundlegende Eigenschaften von Extremalfunktionalen zusammen. Im dritten Abschnitt stellen wir einen Zusammenhang zwischen Extremalfunktionalen und Norm-Intervall erhaltenden Funktionalen her, der zeigt, dass Extremalfunktionale ebenfalls Auswertungsfunktionale sind. Diese Darstellung der Extremalfunktionale präzisieren wir weiter im vierten Abschnitt. Im fünften Abschnitt untersuchen wir dann Fortsetzbarkeit von Extremalfunktionalen auf Unterräumen und im sechsten Abschnitt Separationseigenschaften von Extremalfunktionalen. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels leitet dann über zu den linearen Isometrien, indem das Verhalten ihrer Adjungierten auf Auswertungsfunktionalen beleuchtet wird.

2.1 Norm-Intervall erhaltend

Ein lineares Funktional e' heißt *Norm-Intervall erhaltend*, falls aus $e \in \ker(e')$ immer $[0; e] \subset \ker(e')$ folgt. In diesem Abschnitt charakterisieren wir die Norm-Intervall erhaltenden Funktionale auf Räumen stetiger Funktionen als Auswertungsfunktionale.

Als Hilfsmittel verwenden wir einige neue Begriffe. Das Komplement der Nullstellen einer Funktion f bezeichnen wir als $\text{coz } f$. Eine Teilmenge $V \subset X$ heißt *verschwindend* für ein Funktional $\mu \in C_0(X, D)'$, falls V offen ist und falls aus $\text{coz } f \subset V$ stets $\mu(f) = 0$ folgt [4, Def. 2.1]. Als *Unterstützung* eines Funktionals $\mu \in C_0(X, D)'$ bezeichnen wir die Menge

$$\text{stütz}(\mu) := \left(\bigcup \{V \mid V \text{ verschwindend für } \mu\} \right)^c.$$

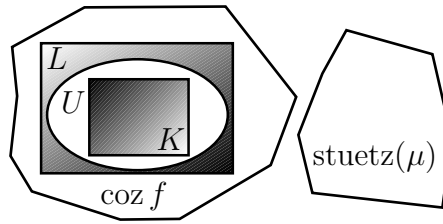


Abbildung 2.1: Zum Beweis des Satzes 2.1. Die Hilfsfunktion g ist so definiert, dass sie auf K den Wert 1 annimmt und außerhalb von U verschwindet.

[4, Def. 2.2]. Dieser Begriff ist motiviert durch die Vorstellung des Funktionals μ als Integral, $\mu(f) = \int_S f(x) d\mu(x)$, wobei $S \subset X$ die Rolle der gerade definierten Unterstüztung einnimmt. Diese Eigenschaft der Unterstüztung offenbart der folgende Satz.

2.1. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, E ein Banachraum und μ ein Funktional auf $C_0(X, E)$. Sei $f \in C_0(X, E)$ derart, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \text{stüzt}(\mu)$. Dann ist $\mu(f) = 0$.

Beweis. (Vgl. [4, Lemma 2.2]) Wir nehmen in einem ersten Schritt an, dass f einen kompakten Träger hat und dass $\text{stüzt}(\mu) \cap \text{supp } f = \emptyset$ gilt. Dann gilt

$$\text{supp } f \subset \bigcup \{V \mid V \text{ verschwindend für } \mu\},$$

denn aus $x \in \text{supp } f$ folgt $x \notin (\bigcup \{V \mid V \text{ verschwindend für } \mu\})^C$. Da f einen kompakten Träger hat, genügen endlich viele für μ verschwindende Mengen V_1, \dots, V_n , um den Träger von f zu überdecken. Zu diesen V_i wählen wir eine Zerlegung der Eins, also n Funktionen f_1, \dots, f_n mit

$$f_i \in C(X, [0, 1]), \text{supp } f_i \subset V_i, \sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$$

für alle $x \in \text{supp } f$ ($i = 1, \dots, n$). Da $\text{supp } f f_i \subset V_i$ und V_i verschwindende Mengen sind, folgt $\mu(f f_i) = 0$ und insgesamt

$$\mu(f) = \mu\left(\sum_{i=1}^n f f_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(f f_i) = 0.$$

Sei nun im zweiten Schritt $f \in C_0(X, D)$ beliebig und $\text{stüzt}(\mu) \cap \text{coz } f = \emptyset$. Wir zeigen $|\mu(f)| \leq \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ und damit die Behauptung. Sei ein

$\epsilon > 0$ vorgelegt. Wir setzen

$$\begin{aligned} K &:= \left\{ x \mid \|f(x)\| \geq \frac{\epsilon}{\|\mu\|} \right\} \\ U &:= \left\{ x \mid \|f(x)\| > \frac{\epsilon}{2\|\mu\|} \right\} \\ L &:= \left\{ x \mid \|f(x)\| \geq \frac{\epsilon}{3\|\mu\|} \right\}. \end{aligned}$$

Abbildung 2.1 soll diese Konstruktion verdeutlichen. Die Menge U ist offen, die Mengen K und L sind kompakt. Wir wählen mit Hilfe des Satzes von Urysohn 1.2 eine Funktion $g \in C(X, [0, 1])$ mit $g(x) = 1$ für alle $x \in K$ und $g(x) = 0$ für alle $x \in U^c$ und betrachten die Funktion gf . Wegen $\text{supp } gf \subset L \subset \text{coz } f$ ist $\text{stütz}(\mu) \cap \text{supp } gf = \emptyset$; weil $\text{supp } gf$ eine abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums L ist, hat gf kompakten Träger. Wir können daher die obige Argumentation auf gf anwenden und folgern, dass

$$\mu(gf) = 0.$$

Zudem ist $\|f - gf\| \leq \frac{\epsilon}{\|\mu\|}$ wegen $f = gf$ auf K . Insgesamt folgt

$$\|\mu(f)\| \leq \|\mu(f - gf)\| + \underbrace{\|\mu(gf)\|}_{=0} \leq \|\mu\| \|f - gf\| \leq \epsilon. \quad \square$$

2.2. Sei X lokalkompakter Hausdorffraum, E ein Banachraum und $\mu \in C_0(X, E)'$ ein Norm-Intervall erhaltendes Funktional, $\mu \neq 0$. Dann hat μ die Form $\mu = e' \circ \text{ev}_{x_0}$, wobei $e' \in E'$ und $x_0 \in X$. Dabei ist e' Norm-Intervall erhaltend mit $\|e'\| = \|\mu\|$.

Beweis. Sei ein Norm-Intervall erhaltendes Funktional $\mu \neq 0$ vorgelegt. Wir zeigen zunächst, dass die Unterstützung von μ aus einem einzigen Punkt besteht. Wäre die Unterstützung die leere Menge, so wäre μ das Nullfunktional. Angenommen, es gibt zwei Elemente $x_1, x_2 \in \text{stütz}(\mu)$. Dann können wir zwei disjunkte offene Umgebungen U_1, U_2 von x_1, x_2 wählen. Zu jeder dieser Umgebungen wählen wir eine kompakte Umgebung K_i und eine offene Umgebung V_i , so dass $V_i \subset K_i \subset U_i$ ($i = 1, 2$). Nun sind V_1 und V_2 keine verschwindenden Mengen, denn x_1, x_2 sind im Komplement aller verschwindenden Mengen. Also gibt es Funktionen f_1, f_2 mit $\text{coz } f_i \subset V_i$ und $\mu(f_i) =: \alpha_i \neq 0$. Wir setzen

$$f := \frac{1}{\alpha_1} f_1 - \frac{1}{\alpha_2} f_2.$$

Offenbar ist $\mu(f) = 0$. Wir wählen mit 1.2 eine Funktion $h \in C(X, [0, 1])$ mit $h(x) = 1$ für alle $x \in K_1$ und $h(x) = 0$ für alle $x \in U_1^C$. Dann ist

$$\mu(hf) = \mu(f_1) \neq 0,$$

im Widerspruch zur Norm-Intervall erhaltenden Eigenschaft von μ . Also kann $\text{stütz}(\mu)$ nur aus einem Punkt bestehen, den wir mit x_0 bezeichnen.

Wir betrachten die Relation

$$(e, \alpha) \in \text{graph}(e') \Leftrightarrow \forall f \in C_0(X, E), f(x_0) = e: \mu(f) = \alpha.$$

Sie ist so gewählt, dass $\mu = e' \circ ev_{x_0}$, falls e' ein stetiges lineares Funktional auf E ist. Wir weisen nach, dass die Relation eine Abbildungsrelation darstellt. Seien dazu $f, g \in C_0(X, E)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = e$. Dann ist $(f - g)(x_0) = 0$ und nach 2.1 ist $\mu(f - g) = 0$, also $\mu(f) = \mu(g)$. Also ist die Relation eindeutig. Da es für jedes $e \in E$ ein $f \in C_0(X, E)$ mit $f(x_0) = e$ gibt (nach 1.2), ist e' eine Funktion mit Definitionsbereich E . Die Linearität von e' folgt direkt aus der Linearität von μ . Das Funktional e' ist stetig: zu einem $e \in E$ mit $\|e\| = 1$ wähle ein f mit $f(x_0) = e$ und $\|f\| = 1$. Dann folgt

$$|e'(e)| = |\mu(f)| \leq \|\mu\| \|f\| = \|\mu\|.$$

Des Weiteren ist für jedes f mit $\|f\| = 1$ die Norm von $\|f(x_0)\|$ kleiner oder gleich 1, so dass für jedes derartige f gilt

$$|\mu(f)| = |e'(f(x_0))| \leq \sup\{|e'(e)| \mid \|e\| \leq 1\} = \|e'\|,$$

so dass insgesamt wie behauptet $\|e'\| = \|\mu\|$ ist.

Wir zeigen nun, dass e' Norm-Intervalle erhält. Seien ein $e_0 \in E$ mit $e'(e_0) = 0$ und ein $e \in [0; e_0]$ vorgelegt. Wir wählen mit 1.2 eine Funktion $h \in C(X, [0, 1])$ mit kompaktem Träger und $h(x_0) = 1$, setzen $f_0(x) := h(x)e_0$ und $f(x) := h(x)e$ und weisen $f \in [0; f_0]$ nach. Es ist bekannt [6, Prop. 1.1(iii)], dass $\alpha[0; e_0] = [0; \alpha e_0]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Daher folgt $h(x)e \in [0; h(x)e_0]$ für alle $x \in X$ und nach der Charakterisierung der Norm-Intervalle 1.10 bedeutet das $f \in [0; f_0]$. Da $\mu(f_0) = 0$ ist, ist auch $\mu(f) = 0$ und somit $e'(e) = 0$, d.h. e' ist Norm-Intervall erhaltend. \square

2.2 Extremalfunktionale

2.3. Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, sei U eine konvexe Teilmenge von E und sei e ein Element aus U .¹ Folgende Aussagen sind äquivalent:

¹Hier bemerkte ein Gutachter eine Ungenauigkeit: Wir müssen noch $d \in E$ festlegen.

1. Das e kann nicht als Konvexkombination zweier Elemente aus U dargestellt werden, d.h. $e = \lambda e_1 + (1 - \lambda)e_2, \lambda \in (0, 1), e_1, e_2 \in U$ zieht $e_1 = e_2 = e$ nach sich.
2. Das e kann nicht als Mittelpunkt zweier Elemente dargestellt werden, d.h. $e = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ zieht $e_1 = e_2 = e$ nach sich.
3. $e - d \in U, e + d \in U$ zieht $d = 0$ nach sich.

Beweis. 1. \Rightarrow 2. Wir setzen $\lambda := \frac{1}{2}$.

2. \Rightarrow 1. Sei $e = \lambda e_1 + (1 - \lambda)e_2, \lambda \in (0, \frac{1}{2}), e_1, e_2 \in U$. Wir setzen $e_3 := 2\lambda e_1 + (1 - 2\lambda)e_2$. Da U konvex ist und e_3 eine Konvexkombination von e_1 und e_2 ist, liegt e_3 in U . Nun ist

$$\frac{e_2 + e_3}{2} = \frac{e_2}{2} + \lambda e_1 + \frac{e_2}{2} - \lambda e_2 = e$$

und nach Voraussetzung ist $e = e_2 = e_3$. Eingesetzt in $e_1 = \frac{1}{\lambda}(e - (1 - \lambda)e_2)$ folgt daraus auch $e = e_1$. Die Behauptung für $\lambda > \frac{1}{2}$ können wir mit der gleichen Schlussweise zeigen, wenn wir in die Definition von e_3 nicht λ , sondern $(1 - \lambda)$ einsetzen.

2. \Rightarrow 3. Sei $e \pm d \in U$. Wir setzen $e_1 := e + d, e_2 := e - d$. Dann liegen e_1, e_2 in U und nach Voraussetzung ist $e_1 = e_2 = e$. Daher muss $d = 0$ sein.

3. \Rightarrow 2. Sei $e = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, wobei $e_1, e_2 \in U$. Wir setzen $d := e - e_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} e + d &= 2e - e_1 = e_2 \in U \\ e - d &= e_1 \in U \end{aligned}$$

und nach Voraussetzung ist $d = 0$, d.h. $e = e_1$. Die Behauptung für e_2 können wir mit der gleichen Schlussweise zeigen, wenn wir $d := e - e_2$ setzen. \square

Ein Punkt e einer konvexen Teilmenge U eines normierten Raumes heißt *Extrempunkt*, falls e eine der äquivalenten Bedingungen in 2.3 erfüllt. Ein *Extremalfunktional* ist ein Extrempunkt der Einheitskugel des Dualraumes eines normierten Raumes. Die Menge aller Extremalfunktionale auf einem normierten Raum E wird mit \mathcal{E}_E bezeichnet.

2.4. Ein Extremalfunktional muss Norm 1 haben.

Beweis. Jedes Funktional e' mit Norm kleiner 1 ist eine echte Konvexkombination: $e' = \|e'\| \frac{e'}{\|e'\|} + (1 - \|e'\|)0$. \square

Wenn ein Norm-1-Funktional kein Extremalfunktional ist, dann ist es Mittelpunkt zweier Funktionale mit Norm kleiner oder gleich 1. Was können wir dann über die beiden äußeren Funktionale sagen? Wir bezeichnen mit $na(e')$ diejenigen Elemente, an denen $\operatorname{Re} e'$ seine Norm annimmt:

$$na(e') := \{e \mid e \in E, e'(e) = \|e'\| \|e\|\}.$$

Die Menge $na(e)$ kann leer sein, wie weiter unten das Beispiel 4.1 zeigt.

2.5. *Sei e' ein Norm-1-Funktional auf einem normierten Raum und Mittelpunkt zweier Funktionale mit Norm kleiner oder gleich 1, d.h. $e' = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2)$, $\|e'_1\|, \|e'_2\| \leq 1$. Dann ist $\|e'_1\| = \|e'_2\| = 1$ und es ist $na(e') = na(e'_1) \cap na(e'_2)$.*

Beweis. Für die erste Behauptung nehmen wir o.B.d.A. $\|e'_1\| < 1$ an. Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt sofort $\|e'_2\| = \|2e' - e'_1\| \geq \|2e'\| - \|e'_1\| > 1$, ein Widerspruch.

Für die zweite Behauptung sei zunächst $e \in na(e'_1) \cap na(e'_2)$, d.h. es sei $e'_1(e) = e'_2(e) = 1$. Dann ist ganz sicher auch $e \in na(e')$, denn $e'(e) = \frac{1}{2}(e'_1(e) + e'_2(e)) = 1$. Sei nun andersherum $e \in na(e')$. Dann ist z.B.

$$\operatorname{Re} e'_1(e) = 2\operatorname{Re} e'(e) - \operatorname{Re} e'_2(e) = 2\|e\| - \operatorname{Re} e'_2(e) \geq \|e\|,$$

da $\operatorname{Re} e'_2(e) \leq \|e\|$. Da e'_1 ein Norm-1-Funktional ist, folgt zusammen mit

$$\|e\| \geq |e'_1(e)| \geq \operatorname{Re} e'_1(e) \geq \|e\|,$$

dass $e'_1(e) = \|e\|$. Die Behauptung für e'_2 erfolgt mit der gleichen Schlussweise. \square

2.6. *Sei E ein normierter Raum und seien $e_1, e_2 \in E$ mit $\|e_1\| = \|e_2\| = \|\frac{1}{2}(e_1 + e_2)\| = 1$. Dann gilt $\|\lambda e_1 + (1 - \lambda)e_2\| = 1$ für alle $\lambda \in [0, 1]$.*

Beweis. ² Sei $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ und $e := \lambda e_1 + (1 - \lambda)e_2$. Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort $\|e\| \leq \lambda\|e_1\| + (1 - \lambda)\|e_2\| = 1$. Angenommen, $\|e\| < 1$. Wir bezeichnen den Mittelpunkt von e_1 und e_2 mit $m := \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ und setzen $\tilde{e} := \frac{e}{\|e\|}$. Wir werden ein $\tilde{\lambda} \in (0, 1)$ und ein $\alpha > 1$ bestimmen mit

$$\alpha m = \tilde{\lambda} e_1 + (1 - \tilde{\lambda})\tilde{e}. \quad (2.1)$$

²Hier wies ein Gutachter auf eine alternative Beweismöglichkeit hin, wo die Konvexität der Funktion $\lambda \mapsto \|\lambda e_1 + (1 - \lambda)e_2\|$ benutzt wird.

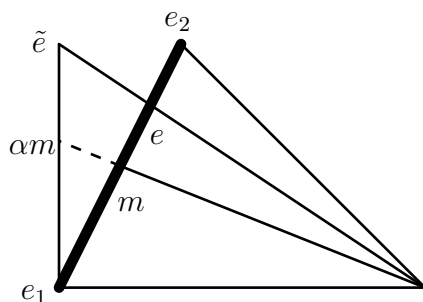


Abbildung 2.2: Zum Beweis von 2.6. Der Satz besagt, dass die Norm auf der dicken Linie konstant ist, wenn sie an den drei Punkten e_1, e_2 und m übereinstimmt. Wäre die Norm nicht konstant — so zeigt der Beweis — hätte die gestrichelte Linie positive Länge, ein Widerspruch.

Abbildung 2.2 soll die Konstruktion veranschaulichen. Einsetzen der Definitionen von m und \tilde{e} in die Gleichung 2.1 ergibt

$$\begin{aligned} \alpha \frac{e_1 + e_2}{2} &= \tilde{\lambda} e_1 + (1 - \tilde{\lambda}) \frac{\lambda e_1 + (1 - \lambda) e_2}{\|e\|} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} e_1 + \frac{\alpha}{2} e_2 &= \left(\tilde{\lambda} + \frac{(1 - \tilde{\lambda}) \lambda}{\|e\|} \right) e_1 + \frac{(1 - \tilde{\lambda})(1 - \lambda)}{\|e\|} e_2, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass die beiden Koeffizienten auf der rechten Seite übereinstimmen müssen. Durch Gleichsetzen und Auflösen können wir $\tilde{\lambda}$ bestimmen. Eingesetzt z.B. in den Koeffizienten vor e_2 erhalten wir α :

$$\tilde{\lambda} = \frac{1 - 2\lambda}{1 - 2\lambda + \|e\|}, \quad \alpha = \frac{2 - 2\lambda}{1 - 2\lambda + \|e\|} > 1.$$

Den gesuchten Widerspruch erhalten wir durch Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Gleichung 2.1:

$$1 < \|am\| \leq \tilde{\lambda} \|e_1\| + (1 - \tilde{\lambda}) \|\tilde{e}\| = 1.$$

Die Behauptung für $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ erhalten wir mit der gleichen Schlussweise, indem wir die Rollen von e_1 und e_2 vertauschen. \square

Eine Beschreibung von Extrempunkten am Anfang dieses Abschnitts war: e ist Extrempunkt einer konvexen Menge U , falls $\|e \pm d\| \in U$ stets $d = 0$ nach sich zieht. Im Fall eines komplexen Skalkörpers können wir

diese Definition wie folgt abschwächen. Ein Punkt e ist *komplexer Extrempunkt* einer konvexen Menge U , falls $\|e - \lambda d\| \in U$ für alle Skalare λ mit $|\lambda| \leq 1$ stets $d = 0$ nach sich zieht. Einen Banachraum nennen wir *komplex strikt konvex*, falls jedes Norm-1-Element ein komplexer Extrempunkt ist. Jeder strikt konvexe Banachraum mit komplexem Skalarkörper ist komplex strikt konvex. Das geht direkt aus der Definition hervor. Wir geben nun ein Beispiel eines komplex strikt konvexen, aber nicht strikt konvexen Raumes wieder. Dafür benötigen wir ein Lemma.

Lemma. *Seien z, w komplexe Zahlen mit $|z + w| = |z| + |w|$. Dann gibt es eine reelle Zahl α mit $z = \alpha w$. Allgemeiner: Seien $d, e \in \mathbb{C}^n$ mit $\|d + e\| = \|d\| + \|e\|$, wobei $\|\cdot\|$ die l^1 -Norm bezeichnet. Dann gibt es reelle Zahlen $\alpha(i)$ mit $d(i) = \alpha(i)e(i)$ ($i = 1, \dots, n$). Falls $d(i)$ und $e(i)$ beide ungleich null sind, ist $\alpha(i) > 0$.*

Beweis. [27, Lemma 4.1] Wir zeigen zunächst die Aussage für komplexe Zahlen. Falls eine der Zahlen z, w null ist, so leistet $\alpha = 0$ das Gewünschte. Sei deshalb o.B.d.A. $z \neq 0$. Wenn wir \mathbb{C} anschauen als zweidimensionalen reellen Hilbertraum, dann gilt $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\langle z, w \rangle + |w|^2$. Nach Voraussetzung wissen wir $|z + w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$. Also gilt $\langle z, w \rangle = |z||w|$ und somit Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Es ist bekannt [29, Satz V.1.2], dass daraus die lineare Abhängigkeit von z und w folgt, d.h. $z = \alpha w$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Die Aussage für $d, e \in \mathbb{C}^n$ können wir durch folgende Abschätzung auf den skalaren Fall zurückführen:

$$\begin{aligned} 0 \leq |d(i)| + |e(i)| - |d(i) + e(i)| &\leq \sum_{j=1}^n |d(j)| + |e(j)| - |d(j) + e(j)| \\ &= \|d\| + \|e\| - \|d + e\| = 0, \end{aligned}$$

so dass es nach dem gerade Gezeigten ein $\alpha(i) \in \mathbb{R}$ mit $d(i) = \alpha(i)e(i)$ gibt. Da wir so für $i = 1, \dots, n$ argumentieren können, folgt daraus die Behauptung.

Zum Nachweis des Zusatzes sei $d(i) \neq 0$ und $e(i) \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |1 + \alpha(i)||e(i)| &= |e(i) + \alpha(i)e(i)| = |e(i) + d(i)| = |e(i)| + |d(i)| \\ &= |e(i)| + |\alpha(i)e(i)| = (1 + |\alpha(i)|)|e(i)|. \end{aligned}$$

Wegen $e(i) \neq 0$ ist demnach $|1 + \alpha(i)| = 1 + |\alpha(i)|$, woraus $\alpha(i) > 0$ folgt. \square

2.7 Beispiel. Ein komplex strikt konvexer, aber nicht strikt konvexer Raum: $E := \mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) versehen mit der l^1 -Norm $\|e\| := \sum_{i=1}^n |e(i)|$. (Spezialfall

von [27, Th. 4.2], [14, Prop. 3.2.3].) Sei $e \in E$ mit $\|e\| = 1$ und $d \in E$ mit $\|e + \lambda d\| \leq 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Wir zeigen $d = 0$ in mehreren Schritten.

Wir zeigen zunächst, dass $\|e + \lambda d\| = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$. Angenommen, es gibt ein λ_0 mit $|\lambda_0| \leq 1$ und $\|e + \lambda_0 d\| < 1$. Daraus folgt der Widerspruch

$$2\|e\| \leq \|e + \lambda_0 d\| + \|e - \lambda_0 d\| < 2.$$

Wir zeigen nun, dass $d(i) \neq 0$ immer $e(i) \neq 0$ nach sich zieht. Wir bezeichnen mit $\text{coz } e$ diejenigen Indizes i mit $e(i) \neq 0$. Nun ist

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \sum_{i \in \text{coz } e} |e(i)| \leq \sum_{i \in \text{coz } e} |e(i) + d(i)| + |e(i) - d(i)| \\ &\leq \sum_{i \in \text{coz } e} |e(i) + d(i)| + |e(i) - d(i)| + 2 \sum_{j \notin \text{coz } e} |d(j)| \\ &= \sum_{i=1}^n |e(i) + d(i)| + |e(i) - d(i)| = \|e + d\| + \|e - d\| = 2. \end{aligned}$$

Offenbar hat das Addieren des Terms $\sum_{j \notin \text{coz } e} |d(j)|$ keine Wirkung, was zeigt, dass er null ist.

Wie oben gezeigt, ist $\|e \pm \lambda d\| = 1$, so dass

$$2 = \|2e\| = \|e + \lambda d + e - \lambda d\| = \|e + \lambda d\| + \|e - \lambda d\|.$$

Das obige Lemma sichert daher die Existenz von $h_\lambda(1), \dots, h_\lambda(n)$ mit $e(i) + \lambda d(i) = h_\lambda(i)(e(i) - \lambda d(i))$ zu. Das Lemma besagt weiter $h_\lambda(i) > 0$ für $d(i) \neq 0$. ($e(i)$ ist dann auch ungleich 0, wie gerade gezeigt.) Durch Termumformungen erhalten wir für $d(i) \neq 0$ und $|\lambda| \leq 1$ die Darstellung

$$\lambda d(i) = \frac{h_\lambda(i) - 1}{h_\lambda(i) + 1} e(i).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit der zu $e(i)$ konjugierten Zahl $\overline{e(i)}$, so erhalten wir

$$\lambda d(i) \overline{e(i)} = \frac{h_\lambda(i) - 1}{h_\lambda(i) + 1} e(i) \overline{e(i)} = \frac{h_\lambda(i) - 1}{h_\lambda(i) + 1} |e(i)|^2 \in \mathbb{R}.$$

Angenommen, es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $d(i) \neq 0$. Dann können wir ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ bestimmen mit $|\lambda_0| \leq 1$ und $\lambda_0 d(i) \overline{e(i)} \notin \mathbb{R}$. Konkret ist

$$\lambda_0 := e^{i(\pi/2 - \arg d(i) \overline{e(i)})}$$

eine Zahl mit Betrag 1, während $\text{Im } \lambda_0 d(i) \overline{e(i)} = |d(i) \overline{e(i)}| > 0$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $d = 0$ und E also komplex strikt konvex sein muss.

Aber E ist nicht strikt konvex: Das Element $(1/2, 1/2, 0, \dots, 0)$ z.B. lässt sich darstellen als $1/2((1, 0, 0, \dots, 0) + (0, 1, 0, \dots, 0))$.

2.3 Extremalfunktionale erhalten Norm-Intervalle

In diesem Abschnitt untersuchen wir Besonderheiten des Kerns von Extremalfunktionalen. Es zeigt sich ein enger Zusammenhang zwischen Extremalfunktionalen und Norm-Intervall erhaltenden Funktionalen.

Als Hilfsmittel verwenden wir die schwach*-Topologie σ^* auf dem Dualraum eines lokalkonvexen Raumes. Ohne sie zu beweisen, verwenden wir folgende Tatsachen:

Lemma 1. *Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum mit Skalarkörper \mathbb{K} . Dann gibt es zu jedem linearen stetigen Funktional $e'' : (E, \tau)' \rightarrow \mathbb{K}$ auf dem Dualraum von (E, τ) ein $e \in E$ mit $e''(d') = d'(e)$ für alle $d' \in (E, \tau)'$ [29, Kor. VIII.3.4].*

Lemma 2. *Sei E ein Banachraum mit Skalarkörper \mathbb{K} . Dann ist $(E', \sigma^*) \times \mathbb{K}$, topologisiert durch die Halbnormfamilie $\{(e', \beta) \mapsto |e'(e)| + |\beta|\}_{e \in E}$, ein lokalkonvexer Hausdorffraum.*

Lemma 3 (Hahn-Banach). *Seien (E, τ) ein lokalkonvexer Hausdorffraum mit Skalarkörper \mathbb{K} , D eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von E und $e \in E \setminus D$ ein Punkt außerhalb von D . Dann gibt es ein lineares stetiges Funktional $e' : E \rightarrow \mathbb{K}$ und ein $\alpha > 0^3$ mit $\operatorname{Re} e'(e) > \alpha > \operatorname{Re} e'(d)$ für alle $d \in D$ [29, Th. VIII.2.12].*

2.8. *Seien E ein Banachraum mit Skalarkörper \mathbb{K} und e' ein Extremalfunktional auf E . Dann ist für alle $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1$ auch $\lambda e'$ ein Extremalfunktional auf E mit dem gleichen Kern wie e' .*

Beweis. Dass Funktionale, die sich nur um eine multiplikative Konstante (ungleich 0) unterscheiden, den gleichen Kern besitzen, ist elementar. Das Funktional $\lambda e'$ hat ebenfalls Norm 1. Wenn wir $\lambda e' = (e'_1 + e'_2)/2$ schreiben, dann folgt daraus mit Division durch λ und der Extremaleigenschaft von e' , dass $e' = e'_1/\lambda = e'_2/\lambda$. Daraus folgt direkt die gewünschte Extremaleigenschaft von $\lambda e'$. \square

2.9. *Seien E ein Banachraum mit Skalarkörper \mathbb{K} und e' ein Extremalfunktional auf E . Dann ist e' ein Norm-Intervall erhaltendes Funktional, d.h. aus $f \in E$ mit $e'(f) = 0$ folgt $[0; f] \subset \ker(e')$.*

³Es muss $\alpha \neq 0$ heißen.

Beweis. [6, 2.3(e)], [5, Prop. 3.4]. Sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir werden für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$ eine Kugel $U_\alpha(e_0)$ bestimmen, die 0 und f enthält und wo $\operatorname{Re} \lambda e'(e) < \epsilon$ ist für alle $e \in U_\alpha(e_0)$. Die Behauptung folgt daraus so: Angenommen, es gibt ein $e \in [0; f]$, ein $\epsilon > 0$ und ein $\beta \in [0, 2\pi]$ mit $e'(e) = \epsilon e^{i\beta}$. Wir betrachten das Funktional $e^{-i\beta}e'$: Einerseits ist $\operatorname{Re} e^{-i\beta}e'(e) = \operatorname{Re} e^{-i\beta}\epsilon e^{i\beta} = \epsilon$, andererseits können wir die Existenz einer Kugel $U_\alpha(e_0)$ beweisen mit $\operatorname{Re} e^{-i\beta}e'(d) < \epsilon$ für alle $d \in U_\alpha(e_0)$. Weil aber e als Element des Norm-Intervalls auch in der Kugel $U_\alpha(e_0)$ liegen muss, ist das ein Widerspruch.

Da nach 2.8 für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$ das Funktional $\lambda e'$ wieder ein Extremalfunktional mit gleichem Kern wie e' ist, und wir nur diese beiden Eigenschaften zur Konstruktion der Kugel verwenden, zeigen wir nur den Fall $\lambda = 1$. Die Konstruktionen für die anderen Fälle folgen, wenn $\lambda e'$ statt e' geschrieben wird.

Wir betrachten das nach Lemma 2 existierende Produkt $(E', \sigma^*) \times \mathbb{K}$. Darin betrachten wir die konvexe Menge K :

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{(e', 0) \mid e' \in E', \|e'\| \leq 1\} \\ K_2 &:= \{(e', \operatorname{Re} e'(f)) \mid e' \in E', \|e'\| \leq 1\} \\ K &:= \operatorname{conv}(K_1 \cup K_2). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Kompaktheit von K , die ja die Abgeschlossenheit impliziert. Die Argumentation beruht vor allem auf der Kompaktheit der Einheitskugel im Dualraum von E , versehen mit der schwach*-Topologie, wie sie der Satz von Banach-Alaoglu [15, 28.3] aussagt. Die Menge K_1 ist kompakt, weil $\{0\}$ kompakt ist und das Produkt kompakter Mengen kompakt ist [15, 9.9]. Die Menge K_2 ist das Bild der Einheitskugel des Dualraums unter der Abbildung

$$\psi: (E', \sigma^*) \rightarrow K_2, d' \mapsto (d', \operatorname{Re} d'(f)).$$

Die Identität in der ersten Komponente von ψ ist stetig, die Funktion $d' \mapsto \operatorname{Re} d'(f)$ in der zweiten Komponente von ψ ist eine Hintereinanderausführung einer Punktauswertung (stetig, weil Punktauswertungen initial sind bezüglich der schwachen Topologie), gefolgt von einer Projektion auf den Realteil (stetig, weil Projektionen in topologischen Räumen stetig sind). Da also beide Komponenten von ψ stetig sind, ist auch ψ stetig und somit K_2 als stetiges Bild eines Kompaktums kompakt. Die konvexe Hülle K wiederum ist das Bild des Kompaktums $K_1 \times K_2 \times [0, 1]$ unter der Abbildung

$$\phi: K_1 \times K_2 \times [0, 1] \rightarrow K, (k_1, k_2, \lambda) \mapsto \lambda k_1 + (1 - \lambda)k_2$$

[15, 21.9], welche aufgrund der Stetigkeit von Addition und skalarer Multiplikation in lokalkonvexen Räumen stetig ist.

Angenommen, die Menge K enthält den Punkt (e', ϵ) . Da dieser Punkt offensichtlich nicht in K_1 oder K_2 enthalten ist, muss er sich durch eine der folgenden Konvexkombinationen darstellen lassen ($\lambda \in (0, 1)$, $d'_i \in E'$, $\|d'_i\| \leq 1$, $i = 1, 2$):

$$\begin{aligned}(e', \epsilon) &= \lambda(d'_1, 0) + (1 - \lambda)(d'_2, 0) \\(e', \epsilon) &= \lambda(d'_1, d'_1(f)) + (1 - \lambda)(d'_2, 0) \\(e', \epsilon) &= \lambda(d'_1, d'_1(f)) + (1 - \lambda)(d'_2, d'_2(f))\end{aligned}$$

In jedem der drei Fälle wird e' als Konvexkombination der d'_i dargestellt und aufgrund der Extremaleigenschaft von e' muss $d'_1 = d'_2 = e'$ sein. Dann ist aber in jedem Fall die zweite Komponente 0, d.h. ungleich ϵ . Durch Ausschließen haben wir also gezeigt, dass $(e', \epsilon) \notin K$.

Wir denken uns $(E', \sigma^*) \times \mathbb{K}$ so topologisiert, wie es in Lemma 2 beschrieben wurde, und wenden jetzt den Satz von Hahn-Banach in der Version von Lemma 3 auf die Menge K und den Punkt (e', ϵ) an. Der Satz garantiert uns die Existenz eines linearen stetigen Funktionals $\theta: (E', \sigma^*) \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ und eines $\gamma > 0$ mit

$$\operatorname{Re} \theta(e', \epsilon) > \gamma > \operatorname{Re} \theta(d', \beta) \quad \forall (d', \beta) \in K. \quad (2.2)$$

Wir zerlegen das Funktional in $\theta(d', \beta) = \theta(d', 0) + \theta(0, \beta)$. Die Funktion $\beta \mapsto \theta(0, \beta)$ ist stetig: Da θ stetig ist, gibt es eine Konstante $M > 0$ mit $|\theta(0, \beta)| \leq M|\beta|$ für alle $\beta \in \mathbb{K}$. Auch die Funktion $d' \mapsto \theta(d', 0)$ ist als Differenz zweier stetiger Funktionen stetig. Beide Funktionen sind offensichtlich linear. Nach Lemma 1 und wegen $\mathbb{K}' \simeq \mathbb{K}$ gibt es ein $e_\theta \in E$ und ein $\alpha_\theta \in \mathbb{K}$ mit

$$\theta(d', \beta) = d'(e_\theta) + \alpha_\theta \beta,$$

und die Aussage der Gleichung (2.2) wird zu

$$\operatorname{Re} e'(e_\theta) + \operatorname{Re} \alpha_\theta \epsilon > \gamma > \operatorname{Re} d'(e_\theta) \quad (2.3)$$

$$\operatorname{Re} e'(e_\theta) + \operatorname{Re} \alpha_\theta \epsilon > \gamma > \operatorname{Re} d'(e_\theta) + \operatorname{Re} \alpha_\theta d'(f) \quad (2.4)$$

für alle $d' \in E'$, $\|d'\| \leq 1$. Da die Ungleichung (2.3) insbesondere für das Nullfunktional gilt, muss $\gamma > 0$ sein. Setzen wir in dieser Ungleichung für d' das e' ein, erhalten wir $\operatorname{Re} \alpha_\theta > 0$.

Wir setzen $\alpha := \gamma / \operatorname{Re} \alpha_\theta$ und $e_0 := -e_\theta / \operatorname{Re} \alpha_\theta$ und behaupten, dass die Kugel $U_\alpha(e_0)$ die gewünschten Eigenschaften hat. Dazu benutzen wir die Tatsache

$$\|d\| = \max\{\operatorname{Re} d'(d) \mid d' \in E', \|d'\| \leq 1\}.$$

Dass die Norm größer als oder gleich groß wie die Realteile der Funktionale sein muss, folgt aus der Bedingung $\|d'\| \leq 1$. Dass es ein Norm-1-Funktional gibt, welches die Norm tatsächlich annimmt, garantiert der Satz von Hahn-Banach. Nun ergibt Division der Gleichungen (2.3) und (2.4) durch $\operatorname{Re} \alpha_\theta$

$$\alpha > \operatorname{Re} d'(-e_0) \quad \text{und} \quad \alpha > \operatorname{Re} d'(-e_0 + f)$$

für alle $d' \in E'$, $\|d'\| \leq 1$, woraus $\|e_0\| < \alpha$ und $\|e_0 - f\| < \alpha$ folgt. Zuletzt ist für alle $d \in U_\alpha(e_0)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e'(d - e_0) &\leq \|d - e_0\| \leq \alpha, \quad \text{und somit} \\ \operatorname{Re} e'(d) &\leq \alpha + e'(e_0) < \epsilon, \end{aligned}$$

wobei wir die letzte Ungleichung wieder mittels Division von (2.3) durch $\operatorname{Re} \alpha_\theta$ erhalten haben. \square

2.10 Beispiel. Seien X ein lokalkompakter Hausdorffraum und E ein strikt konvexer Banachraum. Dann sind die Norm-Intervall erhaltenden Funktionale auf $C_0(X, E)$ mit Norm 1 genau die Extremalfunktionale.

2.4 Zerlegungssatz für Extremalfunktionale

Jedes Extremalfunktional μ auf einem Raum stetiger Funktionen $C_0(X, E)$ kann dargestellt werden als $\mu = e' \circ ev_x$, wobei e' ein Extremalfunktional auf E ist und ev_x ein Auswertungsfunktional an einem bestimmten festen Punkt in X ist. Der Beweis dieser Charakterisierung ist Thema dieses Abschnitts.

Lemma. Sei \mathbb{K} entweder \mathbb{R} oder \mathbb{C} und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$ und $|\lambda\alpha + \beta| = |\lambda\alpha| + |\beta|$.

Beweis. Falls $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$, wählen wir $\lambda := 1$. Andernfalls wählen wir $\lambda := \exp(i(\arg \beta - \arg \alpha))$. \square

2.11. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei E ein Banachraum. Dann ist $(\mathcal{E}_{C_0(X, E)}, \sigma^*)$ homöomorph zu $X \times (\mathcal{E}_E, \sigma^*)$. Der Homöomorphismus ist gegeben durch $\Theta: X \times \mathcal{E}_E \longrightarrow \mathcal{E}_{C_0(X, E)}$, $\Theta(x, e') = e' \circ ev_x$.

Beweis. [5, Th. 4.5] Wir zeigen die Aussage in mehreren Schritten.

Θ ist wohldefiniert. Sei $x_0 \in X$ und sei e' Extremalfunktional auf E . Θ ist wohldefiniert, wenn $e' \circ ev_{x_0}$ ein Extremalfunktional auf $C_0(X, E)$ ist, also wenn für zwei beliebige Funktionale $\mu_1, \mu_2 \in C_0(X, E)'$ mit Norm kleiner

oder gleich 1 und mit $e' \circ ev_{x_0} = (\mu_1 + \mu_2)/2$ gilt: $\mu_1 = \mu_2 = e' \circ ev_{x_0}$. Der Beweis dafür verlangt als Hilfskonstruktion die für $i = 1, 2$ durch

$$(e, \alpha) \in \text{graph}(e'_i) :\Leftrightarrow \forall f \in C_0(X, E), f(x_0) = e: \mu_i(f) = \alpha$$

definierten Relationen auf $E \times \mathbb{K}$ (\mathbb{K} bezeichnet den Skalkörper von E .) Wir werden zeigen, dass e'_i zwei lineare, stetige Funktionale sind mit $e' = (e'_1 + e'_2)/2$.

Da wir mit 1.2 zu jedem $e \in E$ ein $f \in C_0(X, E)$ mit $f(x_0) = e$ konstruieren können, gibt es für jedes $e \in E$ eine Zuordnung $e \mapsto \alpha$. Wir werden zeigen, dass diese Zuordnungen eindeutig, d.h. die e'_i Funktionen sind. Die Hilfsbehauptung dazu ist

$$D := \{h \mid h \in C_0(X, E), \text{ es gibt eine Umgebung } U_h(x_0): \\ h(x) = 0 \text{ für alle } x \in U_h(x_0)\} \subset \ker(\mu_i). \quad (2.5)$$

Seien ein $h \in D$ mit zugehöriger Umgebung U_h (wo h verschwindet) und ein $\epsilon > 0$ vorgelegt. Wir werden $|\mu_1(h)| < \epsilon \|h\|$ zeigen, daraus folgt die Behauptung. (Die Behauptung für μ_2 erfolgt mit der gleichen Schlussweise.)

Da $\|e'\| = 1$, gibt es ein $e_\epsilon \in E$ mit $\|e_\epsilon\| = 1$ und $(1 - \frac{\epsilon}{2}) < |e'(e_\epsilon)| \leq 1$. Aufgrund der Linearität von e' gilt diese Ungleichung auch für alle λe_ϵ , wobei $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1$. Wir wählen noch eine Funktion $\hat{g} \in C(X, [0, 1])$ mit $\hat{g}(x_0) = 1$ und $\hat{g}(x) = 0$ für alle $y \in U_h^C$ und setzen

$$g: X \rightarrow E, g(x) := \|h\| \hat{g}(x) e_\epsilon.$$

Für alle $x \in X$ gilt $\|g(x)\| \leq \|h\|$ und speziell ist $\|g(x_0)\| = \|h\|$. Somit ist $\|g\| = \|h\|$. Aufgrund der Homogenität der Norm ist auch $\|\lambda g\| = \|h\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1$. Da für jedes $x \in X$ entweder $h(x)$ oder $g(x)$ verschwindet, ist auch $\|h + \lambda g\| = \|h\|$.

Die Darstellung von $e' \circ ev_{x_0}$ als Konvexkombination der μ_i und $\|\mu_2\| = 1$ erlauben nun die Abschätzung

$$(1 - \frac{\epsilon}{2})\|h\| < |e'(\lambda g(x_0))| = \frac{1}{2}|\mu_1(\lambda g) + \mu_2(\lambda g)| \leq \frac{1}{2}|\mu_1(\lambda g)| + \frac{\|h\|}{2},$$

was sich zu $|\mu_1(\lambda g)| > (1 - \epsilon)\|h\|$ umformen lässt. Wir können noch das $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1$, frei wählen und wählen es so, dass $|\mu_1(\lambda g) + \mu_1(h)| = |\mu_1(\lambda g)| + |\mu_1(h)|$ (siehe Lemma). Zusammen erhalten wir schließlich die Ungleichung

$$\|h\| = \|\lambda g + h\| \geq |\mu_1(\lambda g + h)| = |\mu_1(\lambda g)| + |\mu_1(h)| > (1 - \epsilon)\|h\| + |\mu_1(h)|,$$

aus der wie gewünscht $|\mu_1(h)| < \epsilon \|h\|$ folgt.

Die Funktionseigenschaft der e'_i folgt aus (2.5) so: Da der Kern der μ_i abgeschlossen ist, liegt mit D auch der Abschluss \overline{D} im Kern. Wenn nun $f, \hat{f} \in C_0(X, E)$ zwei beliebige Funktionen mit $f(x) = \hat{f}(x) = e$ sind, dann ist $\mu_i(f) - \mu_i(\hat{f}) = \mu_i(f - \hat{f}) = 0$, denn nach 1.9 liegt $f - \hat{f}$ in \overline{D} .

Die e'_i sind linear und stetig. Die Linearität folgt direkt aus der Linearität der μ_i , ebenso die Stetigkeit: Für ein $e \in E$ mit $\|e\| = 1$ wählen wir ein $f \in C_0(X, E)$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x_0) = e$, dann ist $|e'_i(e)| = |\mu_i(f)| \leq 1$.

Schließlich ist noch $e' = (e'_1 + e'_2)/2$: Zu jedem $e \in E$ können wir ein $f \in C_0(X, E)$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x_0) = e$ konstruieren, und nach Definition der μ_i und der e'_i ist

$$e'(e) = e'(f(x_0)) = \frac{\mu_1(f) + \mu_2(f)}{2} = \frac{e'_1(e) + e'_2(e)}{2}.$$

Auf Grund der Extremaleigenschaft von e' bedeutet das aber $e' = e'_1 = e'_2$! Daraus können wir direkt die Extremaleigenschaft von $e' \circ ev_{x_0}$ herleiten: $\mu_i(f) = e'_i(f(x_0)) = e' \circ ev_{x_0}(f)$.

Θ ist injektiv. Sei $e' \circ ev_x(f) = d' \circ ev_y(f)$ für alle $f \in C_0(X, E)$. Wir müssen zeigen, dass $x = y$ und $e' = d'$ ist.

Angenommen, $x \neq y$. Da e' als Norm-1-Funktional nicht das Nullfunktional sein kann, gibt es ein $e \in E$ mit $e'(e) \neq 0$. Wir wählen dazu ein $f \in C_0(X, E)$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x) = e, f(y) = 0$ nach 1.2 und erhalten $0 = d'(f(y)) = e'(f(x)) \neq 0$, einen Widerspruch.

Angenommen, es gibt ein $e \in E$ mit $e'(e) \neq d'(e)$. Wir wählen wieder ein $f \in C_0(X, E)$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x) = e$. Aus $x = y$ (wie gerade gezeigt) folgt dann $e'(f(x)) \neq d'(f(y))$, ein Widerspruch.

Θ ist surjektiv. Sei $\mu \in \mathcal{E}_{C_0(X, E)}$ vorgelegt. Nach 2.9 erhält μ Norm-Intervalle und nach 2.2 gibt es ein $x_0 \in X$ und ein Norm-1-Funktional e' auf E mit $\mu = e' \circ ev_{x_0}$. Um die Extremaleigenschaft von e' zu zeigen, nehmen wir an, dass $e' = (e'_1 + e'_2)/2$ und definieren $\mu_i(f) := e'_i(f(x_0))$. Wegen $\|e_i\| \leq 1$ ist auch $\|\mu_i\| \leq 1$. Für jedes $f \in C_0(X, E)$ gilt

$$\mu(f) = e'(f(x_0)) = \frac{e'_1(f(x_0)) + e'_2(f(x_0))}{2} = \frac{\mu_1(f) + \mu_2(f)}{2}.$$

Auf Grund der Extremaleigenschaft von μ folgt $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Da aber für jedes vorgegebene $e \in E$ ein $f \in C_0(X, E)$ mit $f(x_0) = e$ existiert (nach 1.2), gilt wie gewünscht $e'_i(e) = \mu_i(f) = \mu(f) = e'(e)$ für alle $e \in E$. Insgesamt haben wir $\mu = e' \circ ev_{x_0}$ und somit die Surjektivität nachgewiesen.

Θ ist stetig. Da die schwach*-Topologie gerade die initiale Topologie bzgl. der Punktauswertungen ist, ist Θ genau dann stetig, falls für alle $f \in C_0(X, E)$ die Funktion $ev_f \circ \Theta: (x, e') \mapsto e'(f(x))$ stetig ist.

Seien $f \in C_0(X, E)$ und $(x_0, e'_0) \in X \times \mathcal{E}_E$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Menge $E_\epsilon := \{e \in E, \|e - f(x_0)\| < \epsilon/3\}$ ist offen und ihr Urbild unter f ist eine offene Umgebung von x_0 . Wir wählen mit Hilfe der Lokalkompaktheit und Hausdorffeigenschaft eine kompakte Umgebung $K \subset f^{-1}[E_\epsilon]$ von x_0 aus. Dann ist auch $f[K] \subset E_\epsilon$ kompakt und es gibt endlich viele Elemente e_1, \dots, e_n aus $f[K]$, so dass es für jedes $e \in f[K]$ ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $\|e - e_i\| < \epsilon/3$. Als Umgebung V von e'_0 wählen wir $V := \{e' \in \mathcal{E}_E, |e'(e_i) - e'_0(e_i)| < \epsilon/3, i = 1, \dots, n\}$. Dann ist $K \times V$ eine Umgebung von (x_0, e'_0) , und für jedes (x, e') aus dieser Umgebung lässt sich ein geeignetes i finden mit:

$$\begin{aligned} |e'(f(x)) - e'_0(f(x_0))| &\leq |e'(f(x)) - e'(e_i)| + |e'(e_i) - e'_0(e_i)| \\ &\quad + |e'_0(e_i) - e'_0(f(x_0))| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

(Beim ersten und dritten Summanden geht die Standardabschätzung für die Norm-1-Funktionale e', e'_0 und die Wahl von E_ϵ ein. Der mittlere Summand kann aufgrund der Wahl von V abgeschätzt werden.)

Die Umkehrfunktion von Θ ist stetig. Die Umkehrfunktion Θ^{-1} ist genau dann stetig, falls jede offene Menge $G \subset X \times \mathcal{E}_E$ ein offenes Urbild $(\Theta^{-1})^{-1}[G] = \Theta[G]$ hat. Sei eine offene Menge G vorgelegt und $(x_0, e'_0) \in G$. Da (x_0, e'_0) ein innerer Punkt von G ist, gibt es eine offene Umgebung U von x_0 und eine Umgebung $V := \{e' \in \mathcal{E}_E, |e'(e_i) - e'_0(e_i)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}$ von e'_0 , so dass $U \times V$ ganz in G liegt. Wir werden eine Umgebung W von $\Theta(x_0, e'_0) = e'_0 \circ ev_{x_0}$ konstruieren, die ganz in $\Theta[U \times V]$ liegt. Dann ist nämlich $\Theta(x_0, e'_0)$ ein innerer Punkt von $\Theta[G]$ — und die Behauptung ist bewiesen.

Wir wählen ein $e_0 \in E$ mit $|e'_0(e_0)| > \epsilon$. Da e'_0 ein Norm-1-Funktional ist, muss es so ein e_0 geben. Wir wählen noch eine kompakte Umgebung K von x_0 aus, die in U liegt, und eine offene Umgebung \hat{U} von x_0 , die in K liegt. Damit und mit 1.2 bestimmen wir die Funktionen f_0, \dots, f_n mit

$$\begin{aligned} f_0(x_0) &= e_0, & f_0(x) &= 0 \quad \forall x \in \hat{U}^C; \\ f_i(x) &= e_i \quad \forall x \in K, & f_i(x) &= 0 \quad \forall x \in U^C, \end{aligned}$$

wobei $i = 1, \dots, n$. Wir setzen $W := \{\mu \mid |\mu(f_i) - e'_0 \circ ev_{x_0}(f_i)| < \epsilon, i = 0, \dots, n\}$. Ist nun ein $\mu = e' \circ ev_x$ aus W vorgelegt, brauchen wir nur noch

zu zeigen, dass x in U und e' in V liegt. Angenommen, $x \in \hat{U}^C$, dann folgt aus

$$|e' \circ ev_x(f_0) - e'_0 \circ ev_{x_0}(f_0)| = |e'(0) - e'_0(e_0)| > \epsilon$$

ein Widerspruch zur Wahl von W . Daher muss x wie behauptet in $\hat{U} \subset K$ liegen. Zudem folgt aus $x \in K$ nach Definition der f_i für $i = 1, \dots, n$ $|e'(e_i) - e'_0(e_i)| = |e'(f_i) - e'_0(f_i)| < \epsilon$, d.h. $e' \in V$.

Somit ist der Satz 2.11 vollständig bewiesen. \square

2.5 Fortsetzbarkeit

2.12. Seien E ein Banachraum und M ein Unterraum von E . Sei m' ein Extremalfunktional auf M . Dann gibt es ein Extremalfunktional e' auf E , welches mit m' auf M übereinstimmt.

Beweis. [29, Aufg. VIII.6.29], [10, Cor. 2.3.6] Wir betrachten die Menge aller möglichen normgleichen Fortsetzungen von m' :

$$K := \{e' \mid e' \in E', \|e'\| \leq 1, e'(m) = m'(m) \forall m \in M\}.$$

Der Satz von Hahn-Banach garantiert $K \neq \emptyset$.

Wir zeigen die Abgeschlossenheit von K . Wir topologisieren die Einheitskugel B des Dualraumes von E mit der schwach*-Topologie und betrachten für beliebiges $m \in M$ die Abbildung $\theta_m: B \rightarrow \mathbb{K}$, $\theta_m(e') := e'(m)$. Nach Definition der schwach*-Topologie sind alle diese Abbildungen stetig. Daher ist $\theta_m^{-1}(m'(m))$ abgeschlossen für alle $m \in M$. Die Abgeschlossenheit von K folgt nun aus der Darstellung

$$K = \bigcap_{m \in M} \theta_m^{-1}(m'(m)).$$

Da K Teilmenge des Kompaktums B ist, muss K kompakt sein.

Zum Nachweis der Konvexität von K seien $e'_1, e'_2 \in K$ und $\lambda \in (0, 1)$. Für jedes $m \in M$ ist dann $\lambda e'_1(m) + (1 - \lambda)e'_2(m) = \lambda m'(m) + (1 - \lambda)m'(m) = m'(m)$. Für alle $e \in E$ mit Norm 1 gilt zudem $|\lambda e'_1(e) + (1 - \lambda)e'_2(e)| \leq \lambda \|e'_1\| + (1 - \lambda)\|e'_2\| = 1$. Somit ist $\lambda e'_1 + (1 - \lambda)e'_2 \in K$.

Als nicht leere kompakte konvexe Menge besitzt K einen Extrempunkt e' [29, Th. VIII.4.4]. Wir zeigen, dass dieser Extrempunkt ein Extremalfunktional auf E ist. Seien e'_1, e'_2 zwei Funktionale mit Norm kleiner oder gleich 1 und $e' = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2)$. Nach 2.5 ist $\|e'_1\| = \|e'_2\| = 1$. Wir setzen $m'_i(m) := e'_i(m)$ für alle $m \in M, i = 1, 2$. Wegen $\|m'_i\| \leq \|e'_i\| = 1$ und $m' = \frac{1}{2}(m'_1 + m'_2)$ muss $m'_1 = m'_2 = m'$ gelten. Daher liegen e'_1, e'_2 in K , und die Extremaleigenschaft von e' erfordert wie gewünscht $e'_1 = e'_2 = e'$. \square

2.13. Seien X ein lokalkompakter Raum, E ein Banachraum und M ein Unterraum von $C_0(X, E)$. Sei μ ein Extremalfunktional auf M . Dann gibt es ein $x \in X$ und ein Extremalfunktional e' auf E mit $\mu = e' \circ ev_x$.

Beweis. Nach 2.12 gibt es ein Extremalfunktional ν auf $C_0(X, E)$, welches auf M mit μ übereinstimmt. Nach 2.11 gibt es ein Paar $(x, e') = \Theta^{-1}(\nu)$ mit der gewünschten Eigenschaft. \square

2.14 Beispiel. Nicht jedes Funktional $e' \circ ev_x$ muss ein Extremalfunktional auf einem Unterraum sein. Das wird am Beispiel 2.20 deutlich: Für T , definiert durch $T: \mathbb{R} \rightarrow l_2^\infty, \alpha \mapsto (\alpha, 0)$, ist $\mathcal{E}_{\text{bild } T} = \{(\alpha, \beta) \mapsto \pm\alpha\}$, also die Auswertung in der ersten Komponente, mit möglichem Vorzeichenwechsel. Die Auswertungen in der zweiten Komponente, $(\alpha, \beta) \mapsto \pm\beta$, sind keine Extremalfunktionale auf $\text{bild } T$, da sie dort verschwinden. Man könnte sie z.B. als Mittelpunkt der beiden Extremalfunktionale auffassen.

2.6 Teilmenge des Dualraumes

2.15. Sei E ein normierter Raum und sei e aus E . Dann gibt es ein Extremalfunktional e' mit $e'(e) = \|e\|$. Insbesondere separiert \mathcal{E}_E die Punkte von E , d.h. zu verschiedenen $d, e \in E$ gibt es ein Extremalfunktional e' mit $e'(d) \neq e'(e)$.

Beweis. ⁴ [2, Lemma 2.4] Wir betrachten zunächst die Menge Q aller Norm-1-Funktionale, deren Realteile an e ihre Norm annehmen:

$$Q := \{e' \mid e' \in E', \|e'\| \leq 1, e'(e) = \|e\|\}.$$

Die Menge Q ist konvex nach 2.5 und nicht leer nach dem Satz von Hahn-Banach. Wir zeigen die Abgeschlossenheit von Q bezüglich der schwach*-Topologie. Seien dazu $e'_0 \in \overline{Q}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir betrachten

$$U := \{e' \mid e' \in E', \|e'\| = 1, |e'(e) - e'_0(e)| < \epsilon\}.$$

Da U Umgebung von e'_0 ist und e'_0 Berührungspunkt von Q ist, gibt es ein $q' \in Q \cap U$ und es gilt

$$\epsilon > |e'_0(e) - q'(e)| = |e'_0(e) - \|e\||.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, muss $\|e\| = e'_0(e)$ sein. Also ist $e'_0 \in Q$.

⁴Hier wies ein Gutachter darauf hin, dass die zu beweisende Aussage ein Spezialfall von 2.12 ist.

Nach dem Satz von Krein-Milman [29, Th.VIII.4.4(a)] ist die Menge der Extrempunkte von Q nicht leer. Sei x' ein solcher Extrempunkt von Q . Wir zeigen, dass x' ein Extremalfunktional ist. Seien e'_1, e'_2 Funktionale mit $\|e'_i\| \leq 1$ ($i = 1, 2$) und $x' = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2)$. Da x' in e seine Norm annimmt, müssen nach 2.5 auch e'_1 und e'_2 ihre Norm in e annehmen. Sie gehören daher zu Q , und weil x' ein Extrempunkt von Q ist, folgt $x' = e'_1 = e'_2$, was zu zeigen war.

Für die Separationseigenschaft wählen wir zu $d \neq e$ ein Extremalfunktional e' mit $e'(d - e) = \|d - e\| > 0$. \square

2.16. *Sei E ein normierter Raum und D ein dichter Unterraum. Sei $e' \in E'$ ein lineares Funktional auf E . Genau dann ist e' ein Extremalfunktional auf E , wenn die Einschränkung $e'|_D$ ein Extremalfunktional auf D ist. Insbesondere separieren die Fortsetzungen der Extremalfunktionale auf D die Menge E .*

Beweis. Die Restriktion $\theta: E' \rightarrow D', \theta e' := e'|_D$ ist eine surjektive lineare Isometrie, siehe z.B. [15, 18.19]. Nach 2.18 ist θ eine Bijektion zwischen den Extrempunkten der Einheitskugeln von E' und D' .

Für die Separationseigenschaft wählen wir mit Hilfe von 2.15 zu $e_1, e_2 \in E, e_1 \neq e_2$ ein Extremalfunktional $e' \in \mathcal{E}_E$ mit $e'(e_1 - e_2) = \|e_1 - e_2\|$. Nach dem gerade Gezeigten ist $\theta e'$ ein Extremalfunktional auf D und leistet das Gewünschte. \square

2.7 Verhalten unter linearen Isometrien

2.17 Beispiel. Die Adjungierte einer linearen Isometrie muss nicht Auswertungsfunktionale auf Auswertungsfunktionale abbilden [11, Ex. 3.1]: Wir betrachten den Operator

$$T: C(\{1, 2\}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\{3\}, l_2^\infty), Tf(3) := (f(1), f(2)).$$

Es handelt sich um eine (sogar surjektive) lineare Isometrie, wie sich direkt an der Definition ablesen lässt. Wir betrachten das Funktional $e' := (ev_1 + ev_2)/2$ auf l_2^∞ und bestimmen das Bild von $e' \circ ev_3$ unter T^* . Es ist

$$T^*(e' \circ ev_3)(f) = e'(Tf(3)) = \frac{1}{2}(f(1) + f(2)).$$

Da f an zwei Stellen ausgewertet wird, handelt es sich nicht um ein Auswertungsfunktional.

2.18. Seien D und E normierte Räume, sei $T: D \rightarrow E$ eine surjektive lineare Isometrie. Dann ist T eine Bijektion zwischen den Extrempunkten der Einheitskugeln von D und E . Zudem ist T^* eine Bijektion zwischen den Extremalfunktionalen auf E und D .

Beweis. Sei d ein Extrempunkt der Einheitskugel von D und $e := Td$ habe die Darstellung $e = (e_1 + e_2)/2$. Dann ist $d = (T^{-1}e_1 + T^{-1}e_2)/2$ und folglich ist $T^{-1}e_1 = T^{-1}e_2 = d$. Auf Grund der Injektivität von T^{-1} muss $e_1 = e_2 = e$ sein. Sei e ein Extrempunkt der Einheitskugel von E und $d = T^{-1}e$. Mit einer ähnlichen Schlussweise wie zuvor folgt dann unter Benutzung der Isometrieeigenschaft von T^{-1} , dass d ein Extrempunkt der Einheitskugel von D ist.

Die Aussage über die Adjungierte T^* ist gerade die duale Aussage: Wenn T eine lineare Isometrie zwischen D und E ist, dann ist T^* eine lineare Isometrie zwischen E' und D' . \square

Beispiel 4.1 zeigt, dass 2.18 für lineare Norm-Isomorphismen im Allgemeinen nicht gilt.

2.19. Seien D, E Banachräume und $T: D \rightarrow E$ eine lineare Isometrie. Dann sendet die Adjungierte T^* jedes Extremalfunktional auf bild T zu einem Extremalfunktional auf D , d.h. $T^*[\mathcal{E}_{\text{bild } T}] \subset \mathcal{E}_D$.

Beweis. Die Abbildung $T: D \rightarrow \text{bild } T$ ist eine surjektive lineare Isometrie. Nach 2.18 ist T^* eine Bijektion zwischen den Extremalfunktionalen von bild T und D . \square

2.20 Beispiel. Weder muss eine lineare Isometrie Extrempunkte der Einheitskugel auf Extrempunkte der Einheitskugel des Wertevorrats abbilden, noch muss ihre Adjungierte Extremalfunktionale auf Extremalfunktionale abbilden: Betrachte dazu die Einbettung $T: \mathbb{R} \hookrightarrow l_2^\infty, \alpha \mapsto (\alpha, 0)$. Sie ist eine lineare Isometrie. Die Extrempunkte der Einheitskugel von \mathbb{R} sind die beiden Punkte ± 1 , während die Extrempunkte der Einheitskugel von l_2^∞ die vier Punkte $(\pm 1, \pm 1)$ sind. Offenbar bildet T keinen Extrempunkt auf einen Extrempunkt ab.

Die adjungierte Abbildung T^* lässt sich interpretieren als $T^*: l_2^1 \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha$. Sie ist keine lineare Isometrie. Die Extremalfunktionale auf l_2^∞ sind gegeben durch $\mathcal{E}_{l_2^\infty} = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, die Extremalfunktionale auf \mathbb{R} sind wiederum die beiden Punkte ± 1 . Das Bild von $\mathcal{E}_{l_2^\infty}$ unter T^* enthält aber noch den Punkt $0 = T^*(0, 1)$. Somit ist nicht jedes Bild eines Extremalfunktionalen ein Extremalfunktional.

Wir nennen einen linearen Operator $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ einen *gewichteten Kompositionsoperator*, falls es zwei Funktionen $h: Y \rightarrow \mathcal{L}(D, E)$ und $\varphi: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ für alle $y \in Y$. Ist eine solche Darstellung nur auf einer nicht leeren Teilmenge Y_0 von Y möglich, so nennen wir T einen *verallgemeinerten Kompositionsoperator*.

2.21. *Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume und D, E Banachräume sowie $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ ein stetiger gewichteter Kompositionsoperator, d.h. $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ für alle $y \in Y$. Dann wirft die Adjungierte T^* Auswertungsfunktionale auf Auswertungsfunktionale.*

Beweis. Zu vorgelegtem $e' \circ ev_y$ setzen wir $d' := e' \circ h(y)$ und $x := \varphi(y)$. Als Verknüpfung linearer stetiger Operatoren ist d' ein lineares stetiges Funktional und es ist

$$T^*e' \circ ev_y(f) = e'(Tf(y)) = e'(h(y)(f(\varphi(y)))) = d'(f(x)). \quad \square$$

3 Darstellung linearer Isometrien

Wir haben gerade gesehen: Im Allgemeinen werfen die Adjungierten linearer Isometrien nicht alle Auswertungsfunktionale auf Auswertungsfunktionale (Beispiel 2.17), wohl aber, wenn die Isometrie ein gewichteter Kompositionsoperator ist. In diesem Kapitel werden wir unter anderem hinreichende Kriterien angeben, wann dies der Fall ist.

Im ersten Abschnitt sammeln wir einige Eigenschaften der gewichteten Kompositionsooperatoren, die im Wesentlichen aus der Wohldefiniertheit des Operators gründen. Im zweiten Abschnitt zeigen wir, dass separierende stetige Operatoren, insbesondere Algebra- und Verbandshomomorphismen, eine Darstellung als gewichteter Kompositionsoperator zulassen. Im dritten Abschnitt beweisen wir ein hinreichendes technisches Kriterium für die Darstellung einer surjektiven linearen Isometrie als gewichteter Kompositionsoperator. Im vierten Abschnitt zeigen wir, dass, wenn der Wertevorrat der stetigen Funktionen einen eindimensionalen Zentralisator hat, jede surjektive lineare Isometrie ein gewichteter Kompositionsoperator sein muss. Fordern wir vom Wertevorrat die strikte Konvexität — so zeigt der fünfte Abschnitt — lässt sich eine ähnliche Aussage auch für nichtsurjektive lineare Isometrien machen.

3.1 Kompositionsooperatoren

In diesem Abschnitt fragen wir nach den Eigenschaften von φ und h eines Kompositionsooperators, die allein aus der Wohldefiniertheit des Operators folgen. Insbesondere fordern wir nicht die Stetigkeit von T . Wie in der gesamten Arbeit denken wir uns den Raum $\mathcal{L}(D, E)$ mit der starken Operortopologie topologisiert.

3.1. *Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume und D, E Banachräume. Sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ ein verallgemeinerter Kompositionsoperator, d.h. $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ für alle $y \in Y_0, \emptyset \neq Y_0 \subset Y$. Sei weiter $h(y) \neq 0$ für alle $y \in Y_0$. Dann sind φ und h stetig.*

Beweis. [21, Prop. 2] *Stetigkeit von φ .* Seien $y_0 \in Y_0$ und ein gegen y_0

konvergenter Filter \mathcal{F} vorgegeben. Wir bezeichnen mit αX die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von X und zeigen, dass der Bildfilter $\varphi(\mathcal{F})$ in αX genau den Häufungspunkt $\varphi(y_0)$ hat. Nach 1.1 folgt daraus die Konvergenz des Bildfilters und somit die Stetigkeit von φ .

Der Bildfilter $\varphi(\mathcal{F})$ muss aufgrund der Kompaktheit von αX einen Häufungspunkt besitzen, dies folgt aus der endlichen Durchschnittseigenschaft des Filters. Angenommen, es gibt einen Häufungspunkt x ungleich $\varphi(y_0)$. Wir zeigen, dass es dann einen gegen y_0 konvergenten Filter \mathcal{G} und eine Funktion $f \in C_0(X, D)$ mit $Tf(\mathcal{G}) \not\rightarrow Tf(y_0)$ gibt, was der Stetigkeit von Tf widerspricht.

Wir wählen zwei disjunkte Umgebungen $U_x, V_{\varphi(y)}$ von x und $\varphi(y)$ und definieren

$$\mathcal{G} := \{L \mid \exists F \in \mathcal{F}: \varphi^{-1}[\varphi[F] \cap U_x] \cap F \subset L \subset Y_0\}.$$

Wir weisen nach, dass \mathcal{G} ein Filter auf Y_0 ist. Sei F ein beliebiges Element aus \mathcal{F} . Da x ein Berührungspunkt von $\varphi(\mathcal{F})$ ist, ist $\varphi[F] \cap U_x \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $y \in F$ mit $\varphi(y) \in U_x$. Da $F \in \mathcal{F}$ beliebig war, ist $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Die endliche Durchschnittseigenschaft von \mathcal{G} folgt direkt aus der endlichen Durchschnittseigenschaft von \mathcal{F} , und \mathcal{G} ist gerade so definiert, dass er gegenüber Bildung von Obermengen abgeschlossen ist.

Der Filter \mathcal{G} enthält den Filter \mathcal{F} , denn für jedes $F \in \mathcal{F}$ ist $\varphi^{-1}[\varphi[F] \cap U_x] \cap F \subset F$. Da \mathcal{F} gegen y konvergiert, muss auch \mathcal{G} gegen y konvergieren.

Da $h(y_0)$ nicht der Nulloperator ist, gibt es ein $d_0 \in D$ mit $h(y_0)d_0 \neq 0$. Wir bestimmen mit Hilfe von 1.2 eine Funktion $f \in C_0(X, D)$ mit $f(\varphi(y_0)) = d_0$, $\|f\| = \|d_0\|$ und $\text{supp } f \subset V_{\varphi(y)}$. Es ist

$$Tf(y_0) = h(y_0)(f(\varphi(y_0))) = h(y_0)d_0 \neq 0.$$

Wir zeigen nun, dass der Bildfilter $Tf(\mathcal{G})$ höchstens den Häufungspunkt 0 haben kann und deshalb nicht gegen $Tf(y_0)$ konvergiert. Dazu betrachten wir die Menge $G_0 := \varphi^{-1}[\varphi[Y_0] \cap U_x] \cap Y_0$. Sie ist ein Element von \mathcal{G} und es ist $\varphi[G_0] = \varphi[Y_0] \cap U_x \subset U_x$. Für alle $y \in G_0$ gilt

$$Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y))) = h(y)0 = 0,$$

so dass für die Menge der Häufungspunkte von $Tf(\mathcal{G})$ folgt:

$$\bigcap \{\overline{Tf[G]} \mid G \in \mathcal{G}\} \subset \overline{Tf[G_0]} = \overline{\{0\}} = \{0\}.$$

Wir haben also gezeigt, dass $Tf(y_0)$ kein Häufungspunkt von $Tf(\mathcal{G})$ ist und somit $Tf(\mathcal{G}) \not\ni Tf(y_0)$. Insgesamt haben wir gezeigt: $\varphi(\mathcal{F})$ muss einen Häufungspunkt haben, aber es darf kein Häufungspunkt ungleich $\varphi(y_0)$ sein.

Stetigkeit von h . Sei $d_0 \in D$ vorgegeben. Wir zeigen, dass die Funktion $y \mapsto h(y)d_0$ stetig ist. Seien dazu ein $y_0 \in Y$ und eine Umgebung \tilde{U} von $h(y_0)d_0 \in E$ fest vorgegeben. Wir finden ein $\epsilon > 0$, so dass $U := \{e \in E, \|e - e_0\| < \epsilon\}$ ganz in \tilde{U} enthalten ist. Gesucht ist nun eine Umgebung V von y_0 , so dass $h(y)d_0 \in U$ für alle $y \in V$ gilt.

Dazu wählen wir eine offene Umgebung $W \neq X$ und eine kompakte Umgebung $K \subset W$ von $\varphi(y_0)$ und bestimmen mit 1.2 eine Funktion $f \in C_0(X, D)$ mit $f(x) = d_0$ für alle $x \in K$. Da die Funktion φ stetig ist, gibt es eine Umgebung V_1 von y_0 , so dass $\varphi[V_1] \subset K$. Da die Funktion Tf stetig ist, gibt es eine Umgebung V_2 von y_0 , so dass $Tf[V_2] \subset U$. Für jedes $y \in V := V_1 \cap V_2$ gilt nun wie gewünscht:

$$h(y)d_0 = h(y)f(\varphi(y)) = Tf(y) \in U,$$

wobei das erste Gleichheitszeichen sich aus der Wahl der Funktion f und der Umgebung V_1 rechtfertigt, das zweite Gleichheitszeichen aus der Definition von $h(y)$ und das Enthaltensein in U aus der Wahl der Umgebung V_2 . \square

3.2 Beispiel. Die Forderung $h(y) \neq 0$ ist notwendig [16]: Wir betrachten den Operator $T: C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$, definiert durch

$$Tf(y) := \begin{cases} yf(\sin \frac{1}{y}) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass Tf stetig für alle $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ ist. Da $\sin 1/y$ stetig ist für alle $y \neq 0$, und Kompositionen und punktweise Produkte stetiger Funktionen stetig sind, ist Tf stetig für $0 < y \leq 1$. Für eine Folge $\{y_n\}$ mit $y_n \rightarrow 0$ gilt

$$|Tf(y_n)| = |y_n f(\sin \frac{1}{y_n})| \leq |y_n| \|f\| \rightarrow 0.$$

Daher ist Tf auch an 0 stetig.

Angenommen, T hat eine Darstellung als gewichteter Kompositionsoperator mit stetigen \tilde{h} und $\tilde{\varphi}$, also $Tf(y) = \tilde{h}(y)f(\tilde{\varphi}(y))$. Wir bezeichnen die Funktion, die konstant den Wert 1 annimmt, mit $\mathbf{1}$ und folgern für $y \neq 0$

$$\tilde{h}(y) = \tilde{h}(y)\mathbf{1}(\tilde{\varphi}(y)) = T\mathbf{1}(y) = y \mathbf{1}(\sin \frac{1}{y}) = y.$$

Wenn wir andererseits die Funktion $\text{id}: x \mapsto x$ einsetzen, folgt

$$y\tilde{\varphi}(y) = \tilde{h}(y)\text{id}(\tilde{\varphi}(y)) = T\text{id}(y) = y \text{id}\left(\sin \frac{1}{y}\right) = y \sin \frac{1}{y}$$

für alle $y \neq 0$, so dass $\tilde{\varphi}(y) = \sin 1/y$ sein muss. Da aber $\sin 1/y$ sich nicht stetig nach 0 fortsetzen lässt, kann $\tilde{\varphi}$ nicht stetig sein.

3.3. *Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume und D, E Banachräume. Sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ ein gewichteter Kompositionsoperator, d.h. T habe die Darstellung $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ für alle $y \in Y$. Sei weiter $\|h(y)\| \geq \alpha > 0$ für alle $y \in Y$. Dann sind φ und h stetig und φ hat folgende Eigenschaften:*

1. *Das Urbild kompakter Mengen unter φ ist kompakt.*
2. *Es gibt eine stetige Fortsetzung von φ auf αY .*
3. *Das Bild von φ ist abgeschlossen.*

Ist T zudem injektiv, so ist φ surjektiv.

Beweis. [18, Lemma 3] [4, Prop. 2.1(b)] Nach 3.1 sind φ und h stetig. Sei eine kompakte Menge $K \subset X$ vorgegeben. Wir zeigen, dass $\varphi^{-1}[K]$ in αY abgeschlossen ist. Als Kompaktum ist K abgeschlossen, daher ist $\varphi^{-1}[K]$ abgeschlossen in Y , und wir müssen nur noch nachweisen, dass

$$\infty \notin \overline{\varphi^{-1}[K]}^{\alpha Y}.$$

Angenommen, das Gegenteil ist wahr. Da die Umgebungen von ∞ gerade die Komplemente der kompakten Mengen in Y sind, muss für jede kompakte Menge $L \subset Y$

$$L^C \cap \varphi^{-1}[K] \neq \emptyset$$

sein. Wir wählen ein $d \in D$ mit $\|d\| = 1$ und ein $f \in C_0(X, D)$ mit $f(x) = d$ für alle $x \in K$ und setzen

$$L_0 := \left\{ y \mid \|Tf(y)\| \geq \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Wegen $Tf \in C_0(Y, E)$ ist die Menge L_0 kompakt, daher gibt es ein $y_0 \in L_0^C \cap \varphi^{-1}[K]$. Dieses y_0 führt zu dem Widerspruch

$$\frac{\alpha}{2} > \|Tf(y_0)\| = \|h(y_0)(f(\varphi(y_0)))\| \geq \alpha \|f(\varphi(y_0))\| = \alpha.$$

Als abgeschlossene Menge des Kompaktums αY ist nun $\varphi^{-1}[K]$ kompakt in αY — und auch in Y , da jede Überdeckung mit offenen Teilmengen aus Y auch eine offene Überdeckung in αY ist.

Wir können eine Fortsetzung φ_∞ von φ wie folgt definieren:

$$\varphi_\infty(y) := \begin{cases} \varphi(y) & y \in Y \\ \infty & y = \infty. \end{cases}$$

Wir zeigen die Stetigkeit von φ_∞ . Wegen der Stetigkeit von φ brauchen wir nur die Stetigkeit an ∞ zu zeigen. Sei U eine Umgebung von ∞ in X . Dann ist $U = K^C$ für ein kompaktes $K \subset X$ und, wie gerade gezeigt, ist auch $L := \varphi^{-1}[K]$ kompakt in Y . Die Menge $V := L^C$ ist eine Umgebung von ∞ in Y und es gilt $\varphi_\infty[V] \subset U$. Also ist φ_∞ stetig.

Wir zeigen nun, dass das Bild von φ abgeschlossen ist. Als Bild des Kompaktums αY ist $\text{bild } \varphi_\infty$ kompakt und somit abgeschlossen. Es folgt aus einer grundlegenden Charakterisierung von Abgeschlossenheit in Relativtopologien [15, 3.5] und der Isotonie des Abschlussoperators [15, noch vor 1.1]

$$\overline{\text{bild } \varphi}^X = \overline{\text{bild } \varphi}^{\alpha X} \cap X \subset \overline{\text{bild } \varphi_\infty}^{\alpha X} \cap X = \text{bild } \varphi_\infty \cap X = \text{bild } \varphi.$$

Zum Nachweis des Zusatzes nehmen wir an, T ist injektiv und es gibt ein $x_0 \notin \text{bild } \varphi$. Da das Bild von φ abgeschlossen ist, können wir eine Funktion f wählen mit $f(x_0) = d \neq 0$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \text{bild } \varphi$. Dann ist für alle $y \in Y$

$$Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y))) = 0,$$

im Widerspruch zur Injektivität von T . □

3.4 Beispiel. Die Forderung $\|h(y)\| \geq \alpha > 0$ ist notwendig (vgl. [18, S. 984]): Wir betrachten den linearen Operator $T: C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C_0([1, \infty), \mathbb{R})$, definiert durch

$$Tf(y) := \frac{1}{y} f\left(\frac{y-1}{y} \sin y\right).$$

Der Operator T ist wohldefiniert: Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist Tf stetig, und es gilt $|Tf(y)| \leq \frac{1}{y} \|f\| \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$. Es handelt sich um einen gewichteten Kompositionsoperator mit

$$h(y) := \frac{1}{y} \text{ und } \varphi(y) := \frac{y-1}{y} \sin y.$$

Das Urbild des Kompaktums $[-1/2, 1/2]$ unter φ enthält die unbeschränkte und daher nicht kompakte Menge $\{\pi n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Das Bild von φ ist das offene Intervall $(-1, 1)$. Daher kann es auch keine Fortsetzung von φ auf αY geben: Dann wäre das Bild dieser Fortsetzung kompakt in αX und deshalb abgeschlossen in X .

3.5 Beispiel. Ein isometrischer gewichteter Kompositionsoperator mit nicht injektivem, unstetigen φ (vgl. [9, S. 151]): Wir betrachten die Funktion

$$\varphi(y) := \begin{cases} \frac{y^2}{y-1} + 4 & y < 1 \\ 0 & y = 1 \\ \frac{y^2}{y-1} - 4 & y > 1. \end{cases}$$

Am Graphen 3.1 von φ erkennen wir, dass φ surjektiv ist. Konkret wird ein vorgegebenes $x_0 \leq 0$ z.B. von $y_0 := (-4 - \sqrt{(-8+x)(-4+x)} + x)/2$ getroffen und ein $x_0 \geq 0$ wird z.B. von $y_0 := 4 + \sqrt{x(4+x)} + x)/2$ durch φ getroffen.

Dazu betrachten wir den linearen Operator $T: C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$Tf(y) := \begin{cases} f \circ \varphi(y) & y \neq 1 \\ 0 & y = 1. \end{cases}$$

Sei $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann ist Tf als Komposition stetiger Funktionen stetig an allen $y \neq 0$, und da die Grenzwerte an $y = 1$

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} f \circ \varphi(y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 1^+} f \circ \varphi(y)$$

mit $Tf(1)$ übereinstimmen, ist Tf stetig. Die Funktion Tf verschwindet auch im Unendlichen:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f \circ \varphi(y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

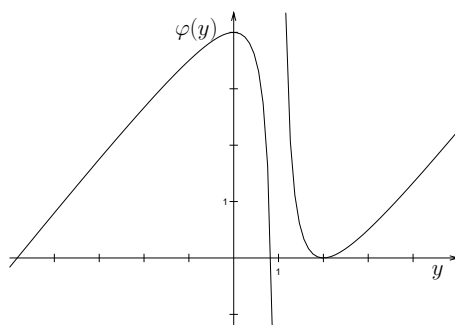
Insgesamt ist T also wohldefiniert und offensichtlich linear. Der Operator T ist eine Isometrie: Einerseits ist $\|Tf\| \leq \|f\|$, andererseits gibt es für ein vorgelegtes $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x_0)| = \|f\|$ und dank der Surjektivität von φ gibt es ein $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(y_0) = x_0$, so dass

$$\|Tf\| \geq |Tf(y_0)| = |f(x_0)| = \|f\|.$$

3.2 Disjunktheit erhaltende Operatoren

Ein linearer Operator $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ heißt *Disjunktheit erhaltend* oder *separierend*, falls für alle $f, g \in C_0(X, D)$ gilt:

$$\text{coz } f \cap \text{coz } g = \emptyset \Rightarrow \text{coz } Tf \cap \text{coz } Tg = \emptyset.$$

Abbildung 3.1: Der Graph der Funktion φ aus dem Beispiel 3.5

(Das Komplement der Nullstellen einer Funktion f bezeichnen wir mit $\text{coz } f$.)

Disjunktheit erhaltende lineare Isometrien sind gewichtete Kompositionsooperatoren. Dies ist die erste Antwort auf die in dieser Arbeit bearbeitete Frage. Der Beweis 3.6 dieses Satzes verwendet die Argumente von Beckenstein, Narici und Todd aus deren Arbeit [4]. Dort untersuchen sie Räume skalarwertiger stetiger Funktionen auf kompakten Hausdorffräumen. In einer späteren Arbeit [12] behandeln Hernandez, Beckenstein und Narici dann Räume vektorwertiger stetiger Funktionen (nicht im Unendlichen verschwindend) auf vollständig regulären Räumen, topologisiert mit der kompakt-offenen Topologie. Es ist eine Verallgemeinerung in einer anderen Richtung als wir in dieser Arbeit gehen. Es zeigt sich, dass die Argumente der ersten Arbeit sich gut auf Räume vektorwertiger, im Unendlichen verschwindenden, stetiger Funktionen auf lokalkompakten Hausdorffräumen anwenden lassen.

Der Beweis des Satzes 3.6 verwendet zwei im Abschnitt 2.1 eingeführte Begriffe: *verschwindende* Menge für ein Funktional,

$$V \subset X \text{ verschwindend für } \mu \in C_0(X, D)' :\Leftrightarrow \\ V \text{ offen und } (\text{coz } f \subset V \Rightarrow \mu(f) = 0),$$

und *Unterstützung* eines Funktionals $\mu \in C_0(X, D)'$,

$$\text{stütz}(\mu) := \left(\bigcup \{V \mid V \text{ verschwindend für } \mu\} \right)^C.$$

Lemma. Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume, D, E Banachräume und $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ ein linearer stetiger Operator ($T \neq 0$). Dann ist

$$\{\text{coz } Tf \mid f \in C_0(X, D)\} = \{\text{coz } Tf \mid f \in C_0(X, D), \text{supp } f \text{ kompakt}\}.$$

Beweis. Die Inklusion „ \supset “ folgt direkt aus der Definition. Zum Nachweis der Inklusion „ \subset “ sei $y \in \{\text{coz } Tf \mid f \in C_0(X, D)\}$. Dann gibt es ein $g \in C_0(X, D)$ mit $Tg(y) = d$, wo $\|d\| > 0$. Da die Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $C_0(X, D)$ liegen (siehe 1.8), gibt es ein $f \in C_0(X, D)$ mit kompaktem Träger und mit $\|f - g\| \leq \frac{\|d\|}{2\|T\|}$. Für dieses f gilt

$$\begin{aligned} \|Tf(y)\| &= \|Tg(y) - (Tg(y) - Tf(y))\| \geq \|Tg(y)\| - \|Tg(y) - Tf(y)\| \\ &\geq \|Tg(y)\| - \|T\|\|f - g\| \geq \|d\| - \frac{\|d\|}{2} > 0. \quad \square \end{aligned}$$

3.6. *Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume, D, E Banachräume und sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ ein linearer, stetiger, Disjunktheit erhaltender Operator mit $Y = \bigcup\{\text{coz } Tf \mid f \in C_0(X, D)\}$. Dann ist T ein gewichteter Kompositionsoperator, d.h. es gibt eine stetige Funktion $\varphi: Y \rightarrow X$ und eine stetige Funktion $h: Y \rightarrow (\mathcal{L}(D, E), SOT)$ mit $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ für alle $y \in Y$. Dabei ist $h(y) \neq 0$ für alle $y \in Y$ und es ist $\varphi[\text{coz } Tf] \subset \text{supp } f$ für alle $f \in C_0(X, D)$.*

Beweis. [12, Th. 3.4], [4, Th. 2.2, Prop. 2.1(c)]

Definition des φ . Wir definieren

$$(y, x) \in \text{graph}(\varphi) :\Leftrightarrow x \in \bigcup\{\text{stütz}(T^*e' \circ ev_y) \mid e' \in E'\}.$$

Definitionsbereich von φ sei Y . Zum Nachweis der Wohldefiniertheit zeigen wir in einem ersten Schritt, dass es für jedes $y \in Y$ ein $e' \in E'$ gibt, so dass die Unterstützung für $T^*e' \circ ev_y$ nicht leer ist. In einem zweiten Schritt zeigen wir, dass die Zuordnung φ eindeutig ist.

Sei für den ersten Schritt ein $y \in Y$ vorgegeben. Angenommen, für jedes $e' \in E'$ ist $\text{stütz}(T^*e' \circ ev_y) = \emptyset$. Wir wählen eine Funktion $f \in C_0(X, D)$ mit kompaktem Träger und mit $y \in \text{coz } Tf$. Das ist möglich durch unsere Forderung an T und obiges Lemma. Sei $e' \in E'$ ein beliebiges Funktional. Nach Annahme ist $\text{stütz}(T^*e' \circ ev_y) = \emptyset$, d.h.

$$\text{supp } f \subset \bigcup\{V \mid V \text{ verschwindet für } T^*e' \circ ev_y\}.$$

Da der Träger von f kompakt ist, genügen endlich viele für $T^*e' \circ ev_y$ verschwindende Mengen V_1, \dots, V_n , um den Träger von f zu überdecken. Wir wählen mit 1.5 eine Zerlegung der Eins zu diesen V_i , also $f_1, \dots, f_n \in C_0(X, [0, 1])$ mit $\text{supp } f_i \subset V_i$ ($i = 1, \dots, n$) und $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ für alle

$x \in \text{supp } f$. Weil für $i = 1, \dots, n$ die Menge $\text{coz } f f_i$ eine Teilmenge von V_i ist und V_i für $T^*e' \circ ev_y$ verschwindet, ist $e'(T f f_i(y)) = 0$. Somit ist

$$e'(Tf(y)) = e'(T(\sum_{i=1}^n f f_i(y))) = e'(\sum_{i=1}^n T f f_i(y)) = 0.$$

Da wir so für alle $e' \in E'$ argumentieren können und E' den Raum E separiert, muss $Tf(y) = 0$ sein. Aber das f ist so gewählt, dass $y \in \text{coz } Tf$! Also muss es ein $e' \in E'$ geben mit $\text{stütz}(T^*e' \circ ev_y) \neq \emptyset$.

Wir zeigen nun im zweiten Schritt die Eindeutigkeit der Zuordnung φ . Angenommen, es gibt ein $y \in Y$ und zwei verschiedene Elemente x_1, x_2 aus X mit $(y, x_1), (y, x_2) \in \text{graph}(\varphi)$. Wir wählen zwei Funktionale $e'_1, e'_2 \in E'$ mit $x_i \in \text{stütz}(T^*e'_i \circ ev_y)$ und weiter zwei offene, disjunkte Umgebungen U_i von x_i ($i = 1, 2$). Es gibt zwei Funktionen f_1, f_2 mit $\text{coz } f_i \subset U_i$ und $e'_i(T f_i(y)) \neq 0$, denn sonst wären die Mengen U_i verschwindend für $T^*e'_i \circ ev_y$ ($i = 1, 2$). Aufgrund der Linearität der e'_i müssen die $T f_i(y) \neq 0$ sein ($i = 1, 2$). Dann ist T aber nicht Disjunktheit erhaltend, denn wir haben einerseits $\text{coz } f_1 \cap \text{coz } f_2 = \emptyset$ und andererseits $y \in \text{coz } T f_1 \cap \text{coz } T f_2$. Aus diesem Widerspruch folgt, dass φ eine wohldefinierte Funktion von Y nach X ist.

Hilfsbehauptung: $f(\varphi(y)) = 0$ impliziert $Tf(y) = 0$. Sei $f(\varphi(y)) = 0$ und $e' \in E'$. Die Definition von φ besagt nun $f(x) = 0$ für alle $x \in \text{stütz}(T^*e' \circ ev_y)$. (Tatsächlich ist es höchstens ein einziges x .) Nach Satz 2.1 folgt daraus

$$0 = T^*e' \circ ev_y(f) = e'(Tf(y)).$$

Da wir so für alle $e' \in E'$ argumentieren können und die linearen Funktionale den Raum E separieren, folgt daraus $Tf(y) = 0$.

Definition des h . Wir definieren für jedes y aus Y

$$(d, e) \in \text{graph}(h(y)) : \Leftrightarrow \forall f \in C_0(X, D), f(\varphi(y)) = d : Tf(y) = e.$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Zuordnung seien $f, g \in C_0(X, D)$ vorgelegt mit $f(\varphi(y)) = g(\varphi(y)) = d$. Dann ist $(f - g)(\varphi(y)) = 0$. Aus der obigen Hilfsbehauptung folgt $T(f - g)(y) = 0$ und somit $Tf(y) = Tg(y)$. Die Linearität von $h(y)$ folgt direkt aus der Linearität von T . Um zu prüfen, dass $h(y)$ stetig ist, sei d aus D vorgegeben. Dann gibt es ein $f \in C_0(X, D)$ mit $f(\varphi(y)) = d$ und $\|f\| = \|d\|$ nach dem Satz von Urysohn. Es folgt

$$\|h(y)d\| = \|Tf(y)\| \leq \|T\| \|f\| = \|T\| \|d\|,$$

und damit die Stetigkeit von $h(y)$.

Wir haben also für T eine Darstellung als gewichteten Kompositionsoperator gefunden: h ist so gewählt, dass $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ für alle $y \in Y$.

Stetigkeit von h und φ . Dazu zeigen wir $h(y) \neq 0$ für alle $y \in Y$. Sei ein $y \in Y$ vorgelegt. Aufgrund unserer Forderung an T gibt es ein $f \in C_0(X, D)$ mit $y \in \text{coz } Tf$. Es folgt

$$0 < \|Tf(y)\| = \|h(y)(f(\varphi(y)))\| \leq \|h(y)\| \|f\|,$$

und deshalb ist $h(y) \neq 0$. Aus 3.1 folgt nun die Stetigkeit von φ und h .

Zusätzliche Eigenschaft von φ . Seien ein $f \in C_0(X, D)$ und ein $y \in \text{coz } Tf$ vorgelegt. Angenommen, $\varphi \notin \text{supp } f$. Aufgrund der Regularität von X [15, S. 91] gibt eine offene Umgebung U von $\varphi(y)$, die disjunkt zu $\text{supp } f$ ist. Da $h(y)$ nicht der Nulloperator ist, gibt es ein $d \in D$, welches nicht im Kern von $h(y)$ liegt. Wir wählen mit 1.2 eine Funktion $g \in C_0(X, D)$ mit $\text{supp } g \subset U$ und $g(\varphi(y)) = d$. Dann ist $Tg(y) = h(y)(g(\varphi(y))) \neq 0$ und daher $y \in \text{coz } Tf \cap \text{coz } Tg$. Das widerspricht der Disjunktheit erhaltenden Eigenschaft von T , da $\text{coz } f \cap \text{coz } g = \emptyset$ ist. Also war die Annahme falsch und es ist $y \in \text{supp } f$. \square

Die beiden folgenden Beispiele sind einfache Anwendungen des gerade bewiesenen Darstellungssatzes.

3.7 Beispiel. Stetige Algebrenhomomorphismen sind gewichtete Kompositionsoperatoren: Seien X, Y kompakte Hausdorffräume und seien D, E kommutative Banachalgebren mit Eins. Dann lassen sich auch die Vektorräume $C(X, D)$ und $C(Y, E)$ als kommutative Banachalgebren mit Eins auffassen, indem die Multiplikation punktweise definiert wird, d.h. $fg(x) := f(x)g(x)$. Die Eins in $C(X, D)$ ist dann die konstante Funktion $\mathbf{1}$, die jedes $x \in X$ auf die Eins in D abbildet.

Sei T ein stetiger Algebren-Homomorphismus, d.h. es sei $Tfg = TfTg$ und $T\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Wir zeigen, dass T den Voraussetzungen von 3.6 genügt. Da $\text{coz } f \cap \text{coz } g = \emptyset$ äquivalent zu $fg = 0$ ist, folgt für Funktionen mit disjunkten Cozeros

$$TfTg = Tfg = 0.$$

Also erhält T Disjunktheit. Weil $T\mathbf{1}$ jedes $y \in Y$ auf die Eins in E wirft, ist auch die Forderung $Y = \{\text{coz } Tf \mid f \in C(X, D)\}$ erfüllt.

3.8 Beispiel. Stetige Verbandshomomorphismen sind gewichtete Kompositionsooperatoren: Seien X, Y kompakte Hausdorffräume und seien D, E Banachverbände mit Einheit. Dann lassen sich auch die Vektorräume $C(X, D)$ und $C(Y, E)$ als Banachverbände mit Einheit auffassen, indem Supremum und Infimum punktweise definiert wird, d.h. $f \vee g(x) := f(x) \vee g(x)$, $f \wedge g(x) := f(x) \wedge g(x)$. Die Einheit in $C(X, D)$ ist dann die konstante Funktion $\mathbb{1}$, die jedes $x \in X$ auf die Einheit in D abbildet.

Sei T ein stetiger Verband-Homomorphismus, d.h. es sei $T(f \vee g) = Tf \vee Tg$ für alle $f, g \in C(X, D)$ und $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$. Wir zeigen, dass T den Voraussetzungen von 3.6 genügt. Wir schreiben $|f| := f \vee -f$. Es ist $\text{coz } f \cap \text{coz } g = \emptyset$ äquivalent zu $|f| \wedge |g| = 0$ und es gilt $T|f| = T(f \vee -f) = Tf \vee -Tf = |Tf|$. Daher folgt für Funktionen f, g mit disjunkten Cozeros

$$|Tf| \wedge |Tg| = T|f| \wedge T|g| = T(|f| \wedge |g|) = T0 = 0.$$

Also erhält T Disjunktheit. Weil $T\mathbb{1}$ jedes $y \in Y$ auf die Eins in E wirft, ist auch die Forderung $Y = \{\text{coz } Tf \mid f \in C(X, D)\}$ erfüllt.

Wir geben nun ein Kriterium an, wann die Funktion φ aus der Darstellung eines surjektiven, stetigen Disjunktheit erhaltenden Operators ein Homöomorphismus ist.

3.9. Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume, seien D, E Banachräume und sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ ein stetiger, bijektiver, Disjunktheit erhaltender, linearer Operator, dessen Inverse ebenfalls Disjunktheit erhält. Dann ist T ein gewichteter Kompositionsooperator, d.h. $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ für alle $y \in Y$. Dabei ist $h(y): D \rightarrow E$ für alle $y \in Y$ stetig und bijektiv, die Funktion $h: Y \rightarrow (\mathcal{L}(D, E), \text{SOT})$ ist stetig und $\varphi: Y \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Zu einem $y \in Y$ gibt es nach 1.2 eine Funktion $\hat{f} \in C_0(Y, E)$ mit $\hat{f}(y) \neq 0$. Auf Grund der Surjektivität von T gilt also $Y = \bigcup \{\text{coz } Tf \mid f \in C_0(X, D)\}$. Daher und nach Voraussetzung erfüllt der Operator T die Bedingungen des Satzes 3.6 und hat daher eine Darstellung $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ für alle $y \in Y$. Dabei sind φ und h stetig. Der Operator T^{-1} ist stetig nach einem Fundamentalsatz der Funktionalanalysis [29, Kor. IV.3.4]. Mit der gleichen Schlussweise wie für T können wir $X = \bigcup \{T^{-1}\hat{f} \mid \hat{f} \in C_0(Y, E)\}$ zeigen. Also erfüllt T^{-1} ebenfalls die Voraussetzungen von 3.6 und hat eine Darstellung $T^{-1}\hat{f}(x) = \hat{h}(x)(\hat{f}(\hat{\varphi}(x)))$ für alle $x \in X$.

Bijektivität von φ . Wir zeigen $\varphi \circ \hat{\varphi}(x) = x$ für alle $x \in X$ und somit die Surjektivität von φ . Sei ein beliebiges $x \in X$ vorgelegt. Wir setzen $y :=$

$\hat{\varphi}(x)$. Angenommen, $\varphi(y) \neq x$. Dann können wir mit 1.2 ein $f \in C_0(X, D)$ wählen mit $f(x) \neq 0$ und $f(\varphi(y)) = 0$. Wir setzen $\hat{f} = Tf$ und folgern zunächst

$$\hat{f}(y) = h(y)(f(\varphi(y))) = h(y)0 = 0. \quad (3.1)$$

Wir verwenden diese Erkenntnis, um einen Widerspruch herzuleiten:

$$0 \neq f(x) = T^{-1}\hat{f}(x) = \hat{h}(x)(\hat{f}(\hat{\varphi}(x))) = \hat{h}(x)0 = 0. \quad (3.2)$$

Also war die Annahme falsch und es ist $\varphi(y) = x$. Daher ist φ surjektiv. Mit der gleichen Schlussweise können wir die Surjektivität von $\hat{\varphi}$ nachweisen, indem wir die Rollen von T und T^{-1} vertauschen.

Wir zeigen mit einem ähnlichen Argument $\hat{\varphi} \circ \varphi(y) = y$ für alle $y \in Y$ und somit die Injektivität von φ . Sei ein $y \in Y$ vorgelegt. Aufgrund der Surjektivität von $\hat{\varphi}$ gibt es ein $x \in X$ mit $\hat{\varphi}(x) = y$. Angenommen, $\varphi(y) \neq x$. Dann gibt es ein $f \in C_0(X, D)$ mit $f(\varphi(y)) = 0$ und $f(x) \neq 0$. Wir setzen $\hat{f} := Tf$ und folgern wie in Gleichung (3.1) $\hat{f}(y) = 0$ und leiten daraus wie in Gleichung (3.2) einen Widerspruch her. Also war die Annahme falsch und φ ist bijektiv mit Umkehrfunktion $\hat{\varphi}$.

Bijektivität von $h(y)$. Sei $e \in E$ vorgegeben. Wir wählen mit 1.2 ein $\hat{f} \in C_0(Y, E)$ mit $\hat{f}(y) = e$, setzen $f := T^{-1}\hat{f}$ sowie $d := f(\varphi(y))$ und folgern

$$h(y)d = h(y)f(\varphi(y)) = Tf(y) = \hat{f}(y) = e.$$

Also ist $h(y)$ surjektiv.

Zum Nachweis der Injektivität sei $d \in \ker(h(y))$ vorgegeben. Wir wählen mit 1.2 ein $f \in C_0(X, D)$ mit $f(\varphi(y)) = d$ und setzen $\hat{f} = Tf$. Dann ist zunächst

$$\hat{f}(y) = h(y)(f(\varphi(y))) = h(y)d = 0,$$

woraus wir dann wie gewünscht folgern:

$$\begin{aligned} d = f(\varphi(y)) &= T^{-1}\hat{f}(\varphi(y)) = \hat{h}(\varphi(y))(\hat{f}(\hat{\varphi}(\varphi(y)))) \\ &= \hat{h}(\varphi(y))(\hat{f}(y)) = \hat{h}(\varphi(y))0 = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $h(y)$ bijektiv.

Es gibt ein $\alpha > 0$ mit $\|h(y)\| \geq \alpha$ für alle $y \in Y$. Dazu bemerken wir zunächst, dass für alle $y \in Y$ der Operator $h(y)^{-1}$ stetig ist mit $\|h(y)^{-1}\| \leq \|T^{-1}\|$. Für ein vorgegebenes $e \in E$ wählen wir ein $\hat{f} \in C_0(Y, E)$ mit $f(y) =$

e und $\|\hat{f}\| = \|e\|$ und setzen $f := T^{-1}\hat{f}$. Nach diesen Vorbereitungen können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\|h(y)^{-1}e\| &= \|h(y)^{-1}Tf(y)\| = \|h(y)^{-1}h(y)f(\varphi(y))\| \leq \|f\| \\ &\leq \|T^{-1}\|\|\hat{f}\| = \|T^{-1}\|\|e\|.\end{aligned}$$

Indem wir zum Supremum über alle $e \in E$ übergehen, folgt daraus die Behauptung $\|h(y)\| \leq \|T^{-1}\|$.

Angenommen, für jedes $\alpha > 0$ gibt es ein $y \in Y$ mit $\|h(y)\| < \alpha$. Dann gibt es ein $y \in Y$ mit $\|h(y)\| < 1/\|T^{-1}\|$ und es ist

$$1 = \|Id\| \leq \|h(y)\|\|h(y)^{-1}\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}\|T^{-1}\| < 1,$$

was nicht sein kann. Also war die Annahme falsch und es gibt ein $\alpha > 0$ mit $\|h(y)\| \geq \alpha$ für alle $y \in Y$.

φ ist ein Homöomorphismus. Der Operator T erfüllt die Bedingungen des Satzes 3.3. Daher können wir φ zu einer stetigen Funktion φ_∞ auf αY fortsetzen, indem wir dem Punkt ∞ in αY den Punkt ∞ in αX zuordnen. Die Funktion φ_∞ ist ebenfalls eine Bijektion und nach einem bekannten Satz der Topologie [15, 9.12] ist die Inverse φ_∞^{-1} stetig. Daher ist auch die Einschränkung von φ^{-1} stetig. Also ist φ ein Homöomorphismus. \square

In ihrer Arbeit [11, Th. 2.3] zeigen Gau, Jeang und Wong, dass im Fall kompakter Hausdorffräume X, Y die Forderung der Stetigkeit an T fallen gelassen werden kann. Es ist jedoch nicht klar, ob diese Aussage für lokal-kompakte Hausdorffräume weiterhin gilt, denn im Gegensatz zu den kompakten Hausdorffräumen muss dort die Stetigkeit der Inversen von φ zusätzlich begründet werden. In dieser Diplomarbeit geht es um die Darstellung von Isometrien, also stetigen Operatoren. Deshalb fordern wir die Stetigkeit von T und zeigen die Behauptung für lokalkompakte Hausdorffräume.

Wir greifen noch einmal das Beispiel 2.17 auf, um zu demonstrieren, dass ohne Forderung an die Inverse von T die Funktion φ kein Homöomorphismus sein muss.

3.10 Beispiel. Eine surjektive, Disjunktheit erhaltende, lineare Isometrie, deren Inverse nicht Disjunktheit erhält [11, Ex. 3.1]: Wir betrachten den Operator

$$T: C(\{3\}, l_2^\infty) \rightarrow C(\{1, 2\}, \mathbb{R}), Tf(y) := h(y)(f(\varphi(y))),$$

wobei $\varphi: \{1, 2\} \rightarrow \{3\}$ die konstante Funktion 3 ist und $h(y): l_2^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ durch $h(1)(\alpha_1, \alpha_2) := \alpha_1$, $h(2)(\alpha_1, \alpha_2) := \alpha_2$ definiert ist. Es handelt sich um eine surjektive lineare Isometrie, wie sich direkt an der Definition ablesen lässt. Da es keine zwei Funktionen mit disjunkten Cozeros auf der Menge $\{3\}$ gibt, erhält T Disjunktheit. Die Funktion φ ist offensichtlich nicht bijektiv und somit kein Homöomorphismus. Der inverse Operator von T ist gegeben durch

$$T^{-1}: C(\{1, 2\}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\{3\}, l_2^\infty), T^{-1}f(3) := (f(1), f(2)).$$

Wäre T^{-1} Disjunktheit erhaltend, dann wäre er nach 3.6 ein Kompositionsoperator und seine Adjungierte würde nach 2.21 Auswertungsfunktionale auf Auswertungsfunktionale abbilden. Das leistet T^{-1} jedoch nicht, wie im Beispiel 2.17 vorgeführt.

Gau, Jeang und Wong geben auch ein interessantes Kriterium an, wann die Inverse eines Disjunktheit erhaltenden Operators selbst Disjunktheit erhält. Wir nennen einen linearen Operator $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ *Träger-isoton* (engl.: support containment preserving), falls aus $\text{supp } f \subset \text{supp } g$ stets $\text{supp } Tf \subset \text{supp } Tg$ folgt ($f, g \in C_0(X, D)$) [11, Def. 3.2].

3.11. *Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume, seien D, E Banachräume und sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ ein linearer, injektiver, Träger-isotoner Operator. Dann ist T^{-1} Disjunktheit erhaltend.*

Beweis. [11, Lemma 3.3]. Angenommen, die Behauptung ist falsch und es gibt $f, g \in C_0(X, D)$ mit $\text{coz } Tf \cap \text{coz } Tg = \emptyset$ und ein $x_0 \in \text{coz } f \cap \text{coz } g$. Dann ist für $\delta := \min\{\|f(x_0)\|, \|g(x_0)\|\}/2$ die Menge

$$U := \{x \mid x \in X, \|f(x) - f(x_0)\| < \delta, \|g(x) - g(x_0)\| < \delta\}$$

eine offene Umgebung von x_0 , die ganz in $\text{coz } f \cap \text{coz } g$ liegt. Wir wählen mit 1.2 eine Funktion $h \in C_0(X, D)$ mit $\text{supp } h \subset U$ und $h(x_0) \neq 0$. Wir wollen $Th = 0$ zeigen, ein Widerspruch zur Injektivität von T .

Wir stellen zunächst folgendes fest. Aufgrund von $U \subset \text{coz } f$ und der Träger-Isotonie von T gilt $\text{supp } Th \subset \text{supp } Tf$. Nach Annahme gilt $\text{coz } Tf \subset Y \setminus \text{coz } Tg$, so dass zusammen mit der gerade gemachten Überlegung

$$\text{coz } Th \subset Y \setminus \text{coz } Tg \tag{3.3}$$

folgt. Des Weiteren ist die Menge $\text{coz } Th$ offen¹: zu jedem $y_0 \in \text{coz } Th$ liegt die Umgebung $\{y \mid y \in Y, \|Th(y) - Th(y_0)\| \leq \|Th(y_0)\|/2\}$ ganz in $\text{coz } Th$.

¹Dies ist, so ein Gutachter, trivial.

Wir folgern nun $\text{coz } Th \cap \text{supp } Tg = \emptyset$. Angenommen, $y_1 \in \text{coz } Th \cap \text{supp } Tg$, dann gibt es aufgrund der Offenheit von $\text{coz } Th$ eine Umgebung V von y_1 die ganz in $\text{coz } Th$ liegt. Da $\text{supp } Tg = \overline{\text{coz } Tg}$ ist, muss $V \cap \text{coz } Tg \neq \emptyset$ und somit auch $\text{coz } Th \cap \text{coz } Tg \neq \emptyset$ sein, im Widerspruch zu (3.3). Somit war die Annahme falsch und es gibt kein $y_1 \in \text{coz } Th \cap \text{supp } Tg$.

Wegen der Träger erhaltenden Eigenschaft gilt aber $\text{coz } Th \subset \text{supp } Tg$, so dass nur $\text{coz } Th = \emptyset$ möglich ist. Also ist $Th = 0$, aber $h \neq 0$ im Widerspruch zur Injektivität von T . \square

3.3 Schwache Darstellung

In diesem Abschnitt zeigen wir zunächst, dass jede lineare Isometrie als ein „schwacher Kompositionsoperator“ aufgefasst werden kann. Wesentlich kommen hierbei die Besonderheiten der Extremalfunktionale, die wir im zweiten Kapitel herausgearbeitet haben, zum Tragen. Diese schwache Darstellung der linearen Isometrien liefert im zweiten Teil dieses Abschnitt eine weitere Antwort auf unsere Frage.

3.12. *Seien X und Y lokalkompakte Hausdorffräume, seien D und E Banachräume und sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ eine lineare Isometrie. Dann gibt es genau eine stetige surjektive Funktion $\tilde{\varphi}: (\mathcal{E}_{\text{bild } T}, \sigma^*) \rightarrow X$ und genau eine stetige Funktion $\tilde{h}: (\mathcal{E}_{\text{bild } T}, \sigma^*) \rightarrow (\mathcal{E}_D, \sigma^*)$, so dass für jedes Extremalfunktional $\mu \in \mathcal{E}_{\text{bild } T}$ gilt:*

$$\mu(Tf) = \tilde{h}(\mu)(f(\tilde{\varphi}(\mu))) \quad (3.4)$$

für alle Funktionen $f \in C_0(X, D)$.

Beweis. [21, Th. 4] Sei $\mu \in \mathcal{E}_{\text{bild } T}$. Nach 2.13 ist $\mu \in \mathcal{E}_{C_0(Y, E)}$. Wir wenden den Homöomorphismus Θ aus 2.11 zweimal an — einmal auf μ und einmal auf $T^*\mu$. Die Definition der Adjungierten $T^*\mu = \mu \circ T$ liefert uns dann die gewünschte Aussage. Genauer definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mu) &:= pr_X \circ \Theta^{-1} \circ T^*(\mu) \\ \tilde{h}(\mu) &:= pr_{D'} \circ \Theta^{-1} \circ T^*(\mu). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen pr_X und $pr_{D'}$ die Projektionen auf X bzw. \mathcal{E}_D . Abbildung 3.2 soll die Definitionen verdeutlichen.

Die Räume $C_0(X, D)$ und $\text{bild } T$ sind isometrisch isomorph. Daher sendet die Adjungierte T^* jedes Extremalfunktional auf $\text{bild } T$ zu einem Extremalfunktional auf $C_0(X, D)$. Somit sind $\tilde{\varphi}$ und \tilde{h} wohldefiniert. Als Kompositionen stetiger Funktionen sind sie stetig.

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & X \\
& & & \nearrow \tilde{\varphi} & \uparrow pr_X \\
(\mathcal{E}_{\text{bild } T}, \sigma^*) & \xrightarrow{T^*} & (\mathcal{E}_{C_0(X,D)}, \sigma^*) & \xrightarrow{\Theta^{-1}} & X \times (\mathcal{E}_D, \sigma^*) \\
& & & \searrow \tilde{h} & \downarrow pr_{D'} \\
& & & & (\mathcal{E}_D, \sigma^*)
\end{array}$$

Abbildung 3.2: Definition von $\tilde{\varphi}$ und \tilde{h} zur schwachen Darstellung linearer Isometrien. Die Funktionen sind so definiert, dass das Diagramm kommutiert.

Wir zeigen nun die Surjektivität der Funktion $\tilde{\varphi}$. Sei ein $x \in X$ vorgegeben. Wir wählen dazu ein beliebiges Extremalfunktional $d' \in \mathcal{E}_D$ aus. Dann ist $d' \circ ev_x$ ein Extremalfunktional auf $C_0(X, D)$, und es gibt aufgrund der isometrischen Isomorphie ein Extremalfunktional μ auf $\text{bild } T$ mit $T^*\mu = d' \circ ev_x$. Für dieses μ gilt wie gewünscht $\tilde{\varphi}(\mu) = x$.

Wir zeigen nun, dass die so bestimmten Funktionen $\tilde{\varphi}$ und \tilde{h} tatsächlich die schwache Darstellung in Gleichung (3.4) erlauben. Nach 2.13 können wir das Extremalfunktional μ schreiben als $\mu = e' \circ ev_y$, wobei $e' \in \mathcal{E}_E$ und $y \in Y$. Wir haben nun $\tilde{\varphi}$ und \tilde{h} gerade so gewählt, dass für alle $f \in C_0(X, D)$ wie behauptet gilt:

$$\mu(Tf) = \mu \circ T(f) = T^*\mu(f) = \tilde{h}(\mu) \circ ev_{\tilde{\varphi}(\mu)}(f) = \tilde{h}(\mu)(f(\tilde{\varphi}(\mu))).$$

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von $\tilde{\varphi}$ und \tilde{h} . Seien $\tilde{\varphi}_1, \tilde{h}_1$ und $\tilde{\varphi}_2, \tilde{h}_2$ zwei schwache Darstellungen von T . Angenommen, es gibt ein $\mu \in \mathcal{E}_{\text{bild } T}$ mit $\tilde{\varphi}_1(\mu) \neq \tilde{\varphi}_2(\mu)$. Da $h_2(\mu)$ ein Extremalfunktional ist und daher Norm 1 hat, gibt es ein $d \in D$ mit $h_2(\mu)(d) \neq 0$. Wir wählen mit 1.2 eine Funktion $f \in C_0(X, D)$ mit $f(\tilde{\varphi}_1(\mu)) = 0$ und $f(\tilde{\varphi}_2(\mu)) = d$. Daraus folgen jedoch zwei verschiedene Ergebnisse für $\mu(Tf)$: Einerseits ist $\mu(Tf) = h_1(\mu)(f(\tilde{\varphi}_1(\mu))) = 0$, andererseits ist $\mu(Tf) = h_2(\mu)(f(\tilde{\varphi}_2(\mu))) \neq 0$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ sein muss. Angenommen, es gibt ein $\nu \in \mathcal{E}_{\text{bild } T}$ mit $\tilde{h}_1(\nu) \neq \tilde{h}_2(\nu)$. Dann gibt es ein $d \in D$ mit $\tilde{h}_1(\nu)(d) \neq \tilde{h}_2(\nu)(d)$. Wir wählen mit 1.2 ein $f \in C_0(X, D)$ mit $f(\tilde{\varphi}_1(\nu)) = d$. Wegen $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ folgen damit wiederum zwei widersprüchliche Darstellungen von $\nu(Tf)$:

$$h_1(\nu)(f(\tilde{\varphi}_1(\nu))) = h_1(\nu)(d) \neq h_2(\nu)(d) = h_2(\nu)(f(\tilde{\varphi}_2(\nu))) \quad \square$$

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{\varphi} & X & \xrightarrow{f} & D \\
 & \searrow Tf & & \swarrow h(y) & \\
 & & & & E
 \end{array}$$

Abbildung 3.3: Definition von $h(y)$. Der Beweis zeigt, dass es für jedes $y \in Y$ ein $h(y)$ gibt, so dass das Diagramm für alle $f \in C_0(X, D)$ kommutiert.

3.13. Seien X und Y lokalkompakte Hausdorffräume, seien D und E Banachräume und sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ eine surjektive lineare Isometrie. Dann sind äquivalent:

1. Die Funktion $\tilde{\varphi}$ aus 3.12 ist unabhängig von der Wahl von e' , d.h.

$$\tilde{\varphi}(e'_1 \circ ev_y) = \tilde{\varphi}(e'_2 \circ ev_y) \quad \forall e'_1, e'_2 \in \mathcal{E}_E, \forall y \in Y,$$

2. Es gibt eine stetige surjektive Funktion $\varphi: Y \rightarrow X$ und eine stetige Funktion $h: Y \rightarrow (\mathcal{L}(D, E), SOT)$ mit

$$Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y))) \quad \forall f \in C_0(X, D), \forall y \in Y.$$

Beweis. [21, Lemma 5] 1. \Rightarrow 2.

Die Funktion φ . Wir setzen $\varphi(y) := \tilde{\varphi}(e' \circ ev_y)$ für irgendein $e' \in E'$. Nach Voraussetzung ist φ wohldefiniert und nach 3.12 ist sie stetig und surjektiv.

Die Funktion h . Wir definieren für jedes $y \in Y$ den Operator $h(y): D \rightarrow E$ durch

$$(d, e) \in \text{graph}(h(y)) :\Leftrightarrow \forall f \in C_0(X, D), f(\varphi(y)) = d: Tf(y) = e.$$

Abbildung 3.3 soll die Definition verdeutlichen. Der Operator $h(y)$ ist für jedes $d \in D$ definiert, denn nach 1.2 gibt es eine Funktion $f \in C_0(X, D)$ mit $f(\varphi(y)) = d$. Um die Wohldefiniertheit des Operators $h(y)$ nachzuweisen, zeigen wir, dass die Zuordnung $d \mapsto h(y)d$ unabhängig von der Wahl des f ist. Dazu zeigen wir als Hilfsbehauptung

$$f(\varphi(y)) = 0 \Rightarrow Tf(y) = 0.$$

Sei also $f(\varphi(y)) = 0$. Nach Definition von φ und nach 3.12 heißt das

$$0 = f(\tilde{\varphi}(e' \circ ev_y)) = e' \circ ev_y(Tf) = e'(Tf(y))$$

für alle $e' \in \mathcal{E}_E$. Da nach 2.15 die Extremalfunktionale \mathcal{E}_E den Raum E separieren, folgt daraus $Tf(y) = 0$. Die Unabhängigkeit des Operators $h(y)$ von der Wahl von f ergibt sich daraus so: Seien $f, g \in C_0(X, D)$ mit $f(\varphi(y)) = g(\varphi(y)) = d$. Dann ist $(f - g)(\varphi(y)) = 0$ und nach der gerade gezeigten Hilfsbehauptung folgt $T(f - g)(y) = 0$ und somit $Tf(y) = Tg(y)$.

Die Linearität von $h(y)$ folgt sofort aus der Linearität des T . Wir zeigen nun die Stetigkeit von $h(y)$. Sei $d \in D$ mit $\|d\| = 1$ vorgegeben. Dann gibt es nach 1.2 eine Funktion $f \in C_0(X, D)$ mit $f(\varphi(y)) = d$ und $\|f\| = \|d\|$. Nach Definition von $h(y)$ und weil T eine Isometrie ist, gilt

$$\|h(y)d\| = \|h(y)f(\varphi(y))\| = \|Tf(y)\| \leq \|Tf\| = \|f\| = \|d\|,$$

woraus die Stetigkeit von $h(y)$ folgt. Die Stetigkeit $y \mapsto h(y)$ folgt aus 3.1.

2. \Rightarrow 1. Sei eine Darstellung von T in der Form $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ vorgegeben. Wir setzen

$$\tilde{h}(e' \circ ev_y)(d) := e'(h(y)d), \quad \tilde{\varphi}(e' \circ ev_y) := \varphi(y).$$

Aus der Definition erkennen wir, dass $\tilde{\varphi}$ nicht von der Wahl von e' abhängt. Die so definierten Funktionen sind gerade die Funktionen der schwachen Darstellung: Wir schreiben ein vorgelegtes Extremalfunktional $\mu \in \mathcal{E}_{C_0(Y, E)}$ als $\mu = e' \circ ev_y$ und folgern

$$\mu(Tf) = e'(Tf(y)) = e'(h(y)(f(\varphi(y)))) = \tilde{h}(\mu)(f(\tilde{\varphi}(\mu))).$$

Aus der Eindeutigkeit der schwachen Darstellung folgt daraus die Behauptung. \square

3.4 Wertevorrat mit eindimensionalem Zentralisator

Ein linearer stetiger Operator S von einem Banachraum E in den gleichen Banachraum heißt *Multiplikator*, falls alle Extremalfunktionale auf E zum Eigenraum von S^* gehören, d.h. wenn es zu jedem $e' \in \mathcal{E}_E$ ein $\lambda_S(e')$ gibt mit $S^*e' = \lambda_S(e')e'$. Zwei Multiplikatoren S, \bar{S} heißen zueinander *konjugiert*, falls $\lambda_S(e') = \overline{\lambda_{\bar{S}}(e')}$ für alle Extremalfunktionale e' ist. Die Menge aller zueinander konjugierten Multiplikatoren nennen wir *Zentralisator* von E und schreiben dafür $Z(E)$. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist der Zentralisator gerade die Menge der Multiplikatoren.

3.14 Beispiel. Beschreibung des Zentralisators mit Hilfe einer Halbordnung [1, Lemma 4.6, Theorem 4.8]: Sei E ein Banachraum mit reellem Skalarkörper. Wir definieren eine lineare Halbordnung auf $\mathcal{L}(E, E)$ durch

$$S \prec_M T :\Leftrightarrow \forall e \in E, \forall e' \in \mathcal{E}_E: \\ 0 \leq e'(Se) \leq e'(Te) \text{ oder } e'(Te) \leq e'(Se) \leq 0.$$

Die Antisymmetrie folgt aus der Separationseigenschaft 2.15 der Extremalfunktionale, die Verträglichkeit mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation aus deren Linearität. Wir setzen noch

$$Z(E)^+ = \{T \mid \exists \alpha \geq 0: T \prec_M \alpha Id\}$$

und zeigen $Z(E) = Z(E)^+ - Z(E)^+$.

„ \supset “ Sei $T \in Z(E)^+$. Wir zeigen, dass T ein Multiplikator ist. Da die Menge der Multiplikatoren einen Unterraum von $\mathcal{L}(E, E)$ bildet, folgt daraus die Behauptung. Sei $e' \in \mathcal{E}_E$ und $e \in \ker(e')$. Wegen $T \prec_M \alpha Id$ ist auch $Te \in \ker(e')$ und somit $e \in \ker(T^*e')$. Nach [15, 19.1] muss deshalb e' ein skalares Vielfaches von T^*e' sein. Wir benennen diesen Skalar mit $\lambda_T e'$ und haben so eine Funktion auf \mathcal{E}_E definiert. Sie ist beschränkt: Wegen $\|e'\| = 1$ ist $|\lambda_T(e')| = \|\lambda_T(e')e'\| = \|T^*e'\| \leq \|T^*\| \|e'\| = \|T^*\|$. Zum Nachweis der Stetigkeit von λ_T sei ein $e'_1 \in \mathcal{E}_E$ und ein $\epsilon > 0$ vorgelegt. Wir wählen ein $e_1 \in E$ mit $e'_1(e_1) > 0$ und setzen $e_2 := Te_1, \delta := \epsilon e'_1(e_1)/(1 + \|T^*\|)$ und $U := \{e' \mid e' \in \mathcal{E}_E, |e'(e_i) - e'_1(e_i)| < \delta, i = 1, 2\}$. Für alle $e' \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} |\lambda_T(e') - \lambda_T(e'_1)| &= |\lambda_T(e')e'_1(e_1) - \lambda_T(e'_1)e'_1(e_1)| \frac{1}{e'_1(e_1)} \\ &\leq (|\lambda_T(e')e'(e_1) - \lambda_T(e'_1)e'_1(e_1)| \\ &\quad + |\lambda_T(e')e'_1(e_1) - \lambda_T(e')e'(e_1)|) \frac{1}{e'_1(e_1)} \\ &= (|T^*e'(e_1) - T^*e'_1(e_1)| + |\lambda_T(e')(e'_1(e_1) - e'(e_1))|) \frac{1}{e'_1(e_1)} \\ &< (\delta + \|T^*\|\delta) \frac{1}{e'_1(e_1)} = \epsilon. \end{aligned}$$

„ \subset “ Sei T ein Multiplikator. Wir schreiben die Funktion λ_T als Differenz zweier positiver Funktionen: $\lambda_T =: \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_i(e') \geq 0$ für alle $e' \in \mathcal{E}_E, i = 1, 2$. Wir definieren für $i = 1, 2$

$$(e_{in}, e_{res}) \in \text{graph}(T_i) :\Leftrightarrow \forall e' \in \mathcal{E}_E: e'(e_{res}) = \lambda_i(e')e'(e_{in}).$$

Die Operatoren T_1, T_2 sind wohldefiniert (eine Folge der Separationseigenschaft der Extremalfunktionale²), linear, stetig und erfüllen $T_i \prec_M \|\lambda_i\| Id$:

²Diese Begründung war einem Gutachter zu kurz.

Wegen der Nichtnegativität der λ_i haben $e'(T_i e)$ und $e'(e)$ das gleiche Vorzeichen und es gilt

$$|e'(T_i e)| = |\lambda_i(e')e'(e)| \leq \|\lambda_i\| |e'(e)| \quad (e' \in \mathcal{E}_E).$$

Somit haben wir einen Hinweis, wie sich der Zentralisator geometrisch, mit Hilfe einer linearen Halbordnung, auffassen lässt.

In jedem Banachraum E gehören die skalaren Vielfachen der Identität zum Zentralisator, denn es gilt

$$(\lambda Id)^* e'(e) = e'(\lambda e) = \lambda e'(e)$$

für alle $e \in E$ und λId ist konjugiert zu $\bar{\lambda} Id$. Wenn der Zentralisator von E keine anderen Elemente besitzt, so sagen wir, E habe einen *eindimensionalen* (oder trivialen) Zentralisator.

3.15 Beispiel. Strikt konvexe Banachräume haben einen eindimensionalen Zentralisator³ [5, Cor. 4.23]: Wir benutzen entscheidend, dass in strikt konvexen Banachräumen jedes Norm-1-Funktional ein Extremalfunktional ist. Sei $S \in Z(E)$, $S \neq 0$. Wir betrachten die Funktion $\lambda_S: \mathcal{E}_E \rightarrow \mathbb{K}$, die durch $S^* e' = \lambda_S(e') e'$ definiert ist. Wir zeigen, dass diese Funktion konstant ist und folgern daraus $S = \lambda_S Id$. Seien dazu zwei Extremalfunktionale $e'_1, e'_2 \in \mathcal{E}_E$ vorgelegt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Falls $e'_1 = \alpha e'_2$ für ein Skalar α , so ist für alle $e \in E$

$$\lambda_S(e'_1) e'_1(e) = e'_1(Se) = \alpha e'_2(Se) = e'_2(S\alpha e) = \lambda_S(e'_2) e'_2(\alpha e) = \lambda_S(e'_2) \alpha e'_1(e).$$

Weil es ein $e \in E$ gibt mit $e'_1(e) \neq 0$, muss $\lambda_S(e'_1) = \lambda_S(e'_2)$ sein.

Falls e'_1 und e'_2 linear unabhängig sind, betrachten wir das Funktional

$$e' := \frac{e'_1 + e'_2}{\|e'_1 + e'_2\|}.$$

Es ist $\|e'\| = 1$. Weil E strikt konvex ist, ist e' ein Extremalfunktional! Somit ist $\lambda_S(e')$ wohldefiniert. Einerseits ist

$$\lambda_S(e') e'(e) = \lambda_S(e') \frac{e'_1(e) + e'_2(e)}{\|e'_1 + e'_2\|} = \frac{\lambda_S(e') e'_1(e)}{\|e'_1 + e'_2\|} + \frac{\lambda_S(e') e'_2(e)}{\|e'_1 + e'_2\|}, \quad (3.5)$$

³Die Aussage an sich ist richtig und wurde von Jarosz 1985 und von Wodinski 1986 bewiesen. Unten wird jedoch die Aussage für Banachräume mit strikt konvexen Dualraum bewiesen. Ein Gutachter wies darauf hin, dass strikte Konvexität des Dualraums i.A. nicht die strikte Konvexität des Raumes selbst nach sich zieht.

andererseits ist

$$\lambda_S(e')e'(e) = e'(Se) = \frac{e'_1(Se) + e'_2(Se)}{\|e'_1 + e'_2\|} = \frac{\lambda_S(e'_1)e'_1(e)}{\|e'_1 + e'_2\|} + \frac{\lambda_S(e'_2)e'_2(e)}{\|e'_1 + e'_2\|} \quad (3.6)$$

für alle $e \in E$. Wir wählen zwei Elemente $e_1, e_2 \in E$ mit

$$e'_i(e_j) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, 2\},$$

wobei δ_{ij} das Kroneckersymbol bezeichnet. So eine Wahl ist in jedem normierten Raum möglich, siehe z.B. [15, 19.6]. Setzen wir e_1 in die jeweils rechte Seite der beiden Gleichungen (3.5) und (3.6) ein und setzen wir beide Terme gleich, so erhalten wir

$$\frac{\lambda_S(e')}{\|e'_1 + e'_2\|} + 0 = \frac{\lambda_S(e'_1)}{\|e'_1 + e'_2\|} + 0.$$

Verfahren wir genauso mit e_2 , dann erhalten wir

$$0 + \frac{\lambda_S(e')}{\|e'_1 + e'_2\|} = 0 + \frac{\lambda_S(e'_2)}{\|e'_1 + e'_2\|},$$

so dass nur $\lambda_S(e'_1) = \lambda_S(e'_2)$ sein kann.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass λ_S eine konstante Funktion ist, die wir auch mit λ_S bezeichnen. Die behauptete Darstellung für S folgt daraus so: Es ist für beliebiges $e \in E$

$$e'(Se) = \lambda_S e'(e) = e'(\lambda_S e)$$

für alle $e' \in \mathcal{E}_E$. Weil die Extremalfunktionale E separieren (siehe 2.15), folgt daraus $Se = \lambda_S e$.

Somit haben wir gezeigt, dass strikt konvexe Banachräume einen eindimensionalen Zentralisator haben.

Wir bezeichnen die Menge der beschränkten stetigen Funktionen zwischen zwei topologischen Räumen X, Y mit $C^b(X, Y)$. Zu einer beschränkten, stetigen, skalarwertigen Funktion g auf einem lokalkompaktem Hausdorffraum X definieren wir den *Multiplikationsoperator* M_g wie folgt:

$$M_g: C_0(X, E) \rightarrow C_0(X, E), M_g(f)(x) := g(x)f(x).$$

Dabei ist E ein beliebiger Banachraum.

3.16. *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und E ein Banachraum mit eindimensionalem Zentralisator. Dann ist der Zentralisator von $C_0(X, E)$ genau die Menge $\{M_g \mid g \in C^b(X, \mathbb{K})\}$.*

Beweis. [2, Cor. 2.6], [5, Th. 8.10] Wir zeigen zunächst, dass alle Multiplikationsoperatoren im Zentralisator liegen. Sei dazu ein $g \in C^b(X, \mathbb{R})$ vorgelegt. Sei weiter μ ein Extremalfunktional auf $C_0(X, E)$. Nach dem Zerlegungssatz 2.11 hat μ die Form $\mu = e' \circ ev_x$, wobei $x \in X, e' \in \mathcal{E}_E$. Es folgt

$$M_g^*(\mu)(f) = e'(g(x)f(x)) = g(x)e'(f(x)) = g(x)\mu(f),$$

so dass wir $\lambda_{M_g}(\mu) = g(x)$ setzen können. Zudem ist die Funktion \bar{g} , definiert durch $\bar{g}(x) := \overline{g(x)}$, ebenfalls in $C^b(X, \mathbb{R})$. Mit der gleichen Argumentation folgt, dass $M_{\bar{g}}$ ein Multiplikator ist mit $\lambda_{M_{\bar{g}}}(\mu) = \bar{g}(x)$. Also sind M_g und $M_{\bar{g}}$ zueinander konjugiert und liegen im Zentralisator.

Wir zeigen nun, dass jedes Element aus dem Zentralisator ein Multiplikationsoperator ist. Seien dazu S, \bar{S} zueinander konjugierte Multiplikatoren. Wir bemerken vorab, dass für alle Extremalfunktionale $\mu \in \mathcal{E}_{C_0(X, E)}$

$$|\lambda_S(\mu)| = |\lambda_S(\mu)|\|\mu\| = \|\lambda_S(\mu)\mu\| = \|(*S)\mu\| \leq \|S^*\| = \|S\| \quad (3.7)$$

gilt und mit der gleichen Schlussweise auch $|\lambda_{\bar{S}}(\mu)| \leq \|\bar{S}\|$.

Wir betrachten nun für festes $x \in X$ die Zuordnung $\Psi(x): E \rightarrow E$ durch

$$(e_{in}, e_{res}) \in \text{graph}(\Psi(x)) :\Leftrightarrow \forall f \in C_0(X, E) \text{ mit } f(x) = e_{in} : Sf(x) = e_{res}$$

und behaupten, dass $\Psi(x)$ eine Funktion ist. Der Satz von Urysohn 1.2 sichert für jedes $e \in E$ die Existenz eines $f \in C_0(X, E)$ mit $f(x) = e$. Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Zuordnung seien zwei Funktionen $f_1, f_2 \in C_0(X, E)$ mit $f_1(x) = f_2(x) = e$ vorgelegt. Dann gilt für alle Extremalfunktionale $e' \in \mathcal{E}_E$:

$$\begin{aligned} e'(Sf_1(x)) &= S^*(e' \circ ev_x)(f_1) = \lambda_S(e' \circ ev_x)(e' \circ ev_x)(f_1) \\ &= \lambda_S(e' \circ ev_x)e'(f_1(x)) = \lambda_S(e' \circ ev_x)e'(f_2(x)) \\ &= S^*(e' \circ ev_x)(f_2) = e'(Sf_2(x)). \end{aligned}$$

Da nach 2.15 die Extremalfunktionale auf E den Raum E separieren, folgt $Sf_1(x) = Sf_2(x)$. Daher ist $\Psi(x)$ eine Funktion.

Aus der Linearität von S folgt direkt die Linearität von $\Psi(x)$. Wir zeigen nun die Stetigkeit von $\Psi(x)$. Sei ein $e \in E$ vorgegeben. Wir wählen mit dem Satz von Urysohn eine Funktion $f \in C_0(X, E)$ mit $f(x) = e$ und $\|f\| = \|e\|$. Zudem bestimmen wir ein Extremalfunktional $e' \in \mathcal{E}_E$ mit $e'(Sf(x)) = \|Sf(x)\|$, wofür wir 2.15 verwenden. Es folgt

$$\begin{aligned} \|\Psi(x)e\| &= \|Sf(x)\| = e'(Sf(x)) = S^*(e' \circ ev_x)(f) = \lambda_S(e' \circ ev_x)e'(f(x)) \\ &\leq \|S\| e'(f(x)) \leq \|S\|\|f\| = \|S\|\|e\|, \end{aligned}$$

wobei in die erste Abschätzung die Vorbemerkung (3.7) eingeht und in die zweite Abschätzung die Tatsache $\|e' \circ ev_x\| = 1$.

Wir zeigen nun, dass $\Psi(x)$ ein Multiplikator auf E ist. Sei ein Extremalfunktional $e' \in \mathcal{E}_E$ vorgegeben. Zu einem $e \in E$ wählen wir ein $f \in C_0(X, E)$ mit $f(x) = e$ und $\|f\| = \|e\|$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\Psi(x)^*e')e &= (\Psi(x)^*e')f(x) = e'(\Psi(x)f(x)) = (e' \circ ev_x)(Sf) \\ &= S^*(e' \circ ev_x)(f) = \lambda_S(e' \circ ev_x)(e' \circ ev_x)(f) = \lambda_S(e' \circ ev_x)e'(e). \end{aligned}$$

Da wir so für alle $e \in E$ argumentieren können, ist

$$\Psi(x)^*e' = \lambda_S(e' \circ ev_x)e'.$$

Daher ist $\Psi(x)$ ein Multiplikator.

Wenn wir nun $\overline{\Psi}(x)$ definieren durch

$$(e_{in}, e_{res}) \in \text{graph}(\overline{\Psi}(x)) : \Leftrightarrow \forall f \in C_0(X, E) \text{ mit } f(x) = e_{in} : \overline{S}f(x) = e_{res}$$

und obige Argumentation auf $\overline{\Psi}(x)$ anwenden, indem wir statt S jeweils \overline{S} schreiben, so erhalten wir

$$\overline{\Psi}(x)^*e' = \lambda_{\overline{S}}(e' \circ ev_x)e',$$

so dass $\Psi(x)$ und $\overline{\Psi}(x)$ zueinander konjugiert sind. Somit liegen sie im Zentralisator und da wir einen eindimensionalen Zentralisator von E vorausgesetzt haben, hat z.B. $\Psi(x)$ die Form

$$\Psi(x) = g(x)Id,$$

wobei $g(x)$ ein Skalar ist.

Damit können wir S als Multiplikationsoperator darstellen: Für alle $x \in X$ gilt

$$(Sf)(x) = \Psi(x)(f(x)) = g(x)f(x).$$

Aufgrund der Vorbemerkung (3.7) ist g beschränkt durch $\|S\|$. Wir zeigen nun die Stetigkeit von g . Sei $\epsilon > 0$ und $x_0 \in X$ vorgelegt. Wir wählen eine kompakte Umgebung K von x_0 , ein $e \in E$ mit $\|e\| = 1$ und ein $f \in C_0(X, E)$ mit $f(x) = e$ für alle $x \in K$. Da $M_g = S$ als Operator auf $C_0(X, E)$ stetige Funktionen auf stetige Funktionen wirft, ist gf stetig auf X , insbesondere an x_0 . Daher gibt es eine Umgebung $U \subset K$ von x_0 mit $\|(M_g f)(x) - (M_g f)(x_0)\| < \epsilon$ für alle $x \in U$. Für alle $x \in U$ folgt nun durch geschicktes Multiplizieren mit 1

$$|g(x) - g(x_0)| = \|g(x)e - g(x_0)e\| = \|g(x)f(x) - g(x_0)f(x_0)\| < \epsilon. \quad \square$$

Lemma. *Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume, D, E Banachräume mit gleichem Skalarkörper \mathbb{K} . Der Raum E habe einen eindimensionalen Zentralisator. Sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ eine surjektive lineare Isometrie und sei $g \in C^b(Y, \mathbb{K})$. Dann gibt es ein $\tilde{g} \in C^b(X, \mathbb{K})$ mit $TM_g = M_{\tilde{g}}T$.*

Beweis. [2, Th. 2.8] Wir betrachten $S := TM_gT^{-1} \in \mathcal{L}(C_0(Y, E), C_0(Y, E))$ und zeigen, dass S im Zentralisator enthalten ist.

Sei ein Extremalfunktional $e' \circ ev_y$ auf $C_0(Y, E)$ vorgelegt, d.h. $e' \in \mathcal{E}_E$ und $y \in Y$. Da T eine surjektive lineare Isometrie ist, gibt es ein $d' \in \mathcal{E}_D$ und ein $x \in X$ mit $T^*e' \circ ev_y = d' \circ ev_x$. Zu beliebigem $f \in C_0(Y, E)$ setzen wir $\tilde{f} := T^{-1}f$. Mit diesen Festlegungen folgt

$$\begin{aligned} S^*(e' \circ ev_y)(f) &= e'(Sf(y)) = e'(TM_gT^{-1}f(y)) = e'(TM_g\tilde{f}(y)) \\ &= T^*(e' \circ ev_y)(M_g\tilde{f}) = d' \circ ev_x(M_g\tilde{f}) = d'(g(x)\tilde{f}(x)) \\ &= g(x)d' \circ ev_x(\tilde{f}) = g(x)T^*(e' \circ ev_y)(\tilde{f}) = g(x)e' \circ ev_y(T\tilde{f}) \\ &= g(x)e' \circ ev_y(f). \end{aligned}$$

Da das Extremalfunktional $e' \circ ev_y$ beliebig war, haben wir damit gezeigt, dass S ein Multiplikator ist.

Wenn wir genauso für $\bar{S} := TM_{\bar{g}}T^{-1}$ argumentieren ($\bar{g}(x) := \overline{g(x)}$ für alle $x \in X$), so erhalten wir

$$\bar{S}^*(e' \circ ev_y)(f) = \overline{g(x)}e' \circ ev_y(f)$$

für alle Extremalfunktionale $e' \circ ev_y \in \mathcal{E}_{C_0(Y, E)}$, so dass S und \bar{S} zueinander konjugiert sind. Nach dem Darstellungssatz 3.16 gibt es eine Funktion $\tilde{g} \in C^b(X, \mathbb{K})$ mit

$$M_{\tilde{g}} = S = TM_gT^{-1}.$$

Rechtsseitige Multiplikation mit T führt zur Behauptung. \square

3.17. *Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume, D, E Banachräume mit gleichem Skalarkörper \mathbb{K} . Der Raum E habe eindimensionalen Zentralisator. Sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ eine surjektive lineare Isometrie. Dann ist T ein gewichteter Kompositionsoperator, d.h. für alle $y \in Y$ hat T die Darstellung $Tf(y) = h(y)f(\varphi(y))$ mit stetigem $h: Y \rightarrow (\mathcal{L}(D, E), SOT)$ und stetigem, surjektivem $\varphi: Y \rightarrow X$.*

Beweis. [2, Th. 2.9], [5, Th. 8.11] Wir betrachten die schwache Darstellung von T aus 3.12, also

$$e'(Tf(y)) = \tilde{h}(e' \circ ev_y)f(\tilde{\varphi}(e' \circ ev_y))$$

für alle $y \in Y$. Wir zeigen $\tilde{\varphi}(e'_1 \circ ev_y) = \tilde{\varphi}(e'_2 \circ ev_y)$ für alle $e'_1, e'_2 \in \mathcal{E}_E$. Daraus folgt dann mit dem Kriterium 3.13 die behauptete Darstellung von T als gewichteter Kompositionsoperator.

Seien $e'_1, e'_2 \in \mathcal{E}_E$ und ein $y \in Y$ vorgelegt. Wir setzen $d'_i \circ ev_{x_i} := T^*(e'_i \circ ev_y)$ ($i = 1, 2$) und müssen $x_1 = x_2$ nachweisen. Angenommen, $x_1 \neq x_2$. Dann können wir eine Funktion $g \in C(X, [0, 1])$ mit $g(x_1) = 0$ und $g(x_2) = 1$ wählen. Weiter wählen wir zwei Funktionen $f_1, f_2 \in C_0(X, D)$ derart, dass $d'_i(f_i(x_i)) \neq 0$. Eine solche Wahl von g, f_1 und f_2 ist möglich nach dem Satz von Urysohn 1.2 und weil die d'_i als Extremalfunktionale nicht konstant null sein können. Nun folgt

$$\begin{aligned} g(x_i)d'_i(f_i(x_i)) &= d'_i \circ ev_{x_i}(M_g f_i) = T^*e'_i \circ ev_y(M_g f_i) \\ &= e'_i \circ ev_y(TM_g f_i) = e'_i \circ ev_y(M_{\tilde{g}} T f_i) \\ &= e'_i(\tilde{g}(y)T f_i(y)) = \tilde{g}(y)e'_i(T f_i(y)) = \tilde{g}(y)T^*e'_i \circ ev_y(f_i) \\ &= \tilde{g}(y)d'_i(f_i(x_i)), \end{aligned}$$

wobei wir die im obigen Lemma eingeführte Funktion \tilde{g} verwenden. Es ist also $g(x_i) = \tilde{g}(y)$. Dann wäre aber $0 = g(x_1) = \tilde{g}(y) = g(x_2) = 1$, was nicht sein kann. Also war die Annahme falsch und es ist $x_1 = x_2$. \square

Somit haben wir eine weitere Antwort auf die in dieser Arbeit bearbeitete Frage gefunden: Falls die surjektive lineare Isometrie ihre Werte in einem Raum $C_0(X, E)$ annimmt, wo E eindimensionalen Zentralisator hat, dann ist sie ein gewichteter Kompositionsoperator.

3.5 Strikt konvexer Wertevorrat

Wir können das Ergebnis des vorigen Abschnitts für nichtsurjektive lineare Isometrien wie folgt verallgemeinern:

3.18. *Sei D ein Banachraum und sei E ein strikt konvexer Banachraum über \mathbb{K} oder ein komplex strikt konvexer Banachraum über \mathbb{C} . Seien X und Y lokalkompakte Hausdorffräume und $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ eine (nicht notwendig surjektive) lineare Isometrie. Dann ist T ein verallgemeinerter Kompositionsoperator, d.h. es gibt eine Menge $Y_1 \subset Y$, eine Funktion $\varphi: Y_1 \rightarrow X$ und eine Funktion $h: Y_1 \rightarrow (\mathcal{L}(D, E), SOT)$, mit $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$ für alle $y \in Y_1$. Dabei ist die Funktion φ stetig und surjektiv; die Funktion h ist stetig und erfüllt $\|h(y)\| = 1$ für alle $y \in Y_1$.*

Beweis. [19], [21, Th.3], [13] *Definition der Funktion φ .* Dazu wählen wir ein beliebiges $d_0 \in D$ mit $\|d_0\| = 1$ aus und bestimmen mit dem Satz von

Hahn-Banach ein $d'_0 \in D'$ mit $d'_0(d_0) = \|d'_0\| = 1$. Zu einem vorgegebenen $x \in X$ bezeichnen wir mit $na(d'_0 \circ ev_x)$ die Menge der Funktionen, wo $d'_0 \circ ev_x$ seine Norm annimmt:

$$na(d'_0 \circ ev_x) := \{f \mid f \in C_0(X, D), d'_0(f(x)) = \|f\|\}$$

Nach dem Satz von Urysohn ist diese Menge für alle $x \in X$ nicht leer. In ähnlicher Weise definieren wir für alle $y \in Y$, für alle $e' \in E'$:

$$na(e' \circ ev_y) := \{f \mid f \in C_0(Y, E), e'(f(y)) = \|f\| \|e'\|\}.$$

Wir definieren

$$(y, x) \in \text{graph}(\varphi) :\Leftrightarrow \begin{cases} \text{es gibt ein } e' \in E', \|e'\| = 1 \text{ mit} \\ T[na(d'_0 \circ ev_x)] \subset na(e' \circ ev_y). \end{cases}$$

Als Definitionsbereich Y_1 von φ setzen wir pragmatisch $Y_1 := \{y \mid \exists x \in X: \varphi(y) = x\}$. Wir zeigen die Eindeutigkeit der Zuordnung $y \mapsto x$. Angenommen, es gibt zwei Elemente $x_1 \neq x_2$ aus X und ein $y \in Y$ derart, dass (y, x_1) und (y, x_2) zu $\text{graph}(\varphi)$ gehören. Dann gibt es zwei Norm-1-Funktionale $e'_1, e'_2 \in E'$ mit $T[na(d'_0 \circ ev_{x_i})] \subset na(e'_i \circ ev_y)$ ($i = 1, 2$). Wir wählen zwei disjunkte offene Umgebungen U_1 von x_1 , U_2 von x_2 und mit 1.2 zwei Funktionen $f_i \in C_0(X, D)$ mit $f_i(x_i) = d_0$, $\|f_i\| = 1$ und $\text{supp } f_i \subset U_i$ ($i = 1, 2$). Da T eine Isometrie ist, ist $\|Tf_i(y)\| \leq 1$. Wegen $f_i \in na(d'_0 \circ ev_{x_i})$ ist $Tf_i \in na(e'_i \circ ev_y)$, und es folgt

$$1 = \text{Re } e'_i(Tf_i)(y) \leq |e'_i(Tf_i)(y)| \leq \|e'_i\| \|Tf_i(y)\| = \|Tf_i(y)\|.$$

Somit ist $\|Tf_i(y)\| = 1$ für $i = 1, 2$. Aufgrund der disjunkten Träger ist $\|f_1 + \lambda f_2\| = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$. Daraus folgt mittels der Linearität und Isometrie-eigenschaft von T

$$\|Tf_1(y) + \lambda Tf_2(y)\| = \|T(f_1 + \lambda f_2)(y)\| \leq \|T(f_1 + \lambda f_2)\| = 1$$

und wegen der strikten Konvexität bzw. komplexen strikten Konvexität muss $\|Tf_2(y)\| = 0$ gelten, ein Widerspruch.

Surjektivität von φ . Sei $x \in X$ fest vorgegeben. Wir wollen ein Funktional $e' \circ ev_y$ finden mit $Tf \in na(e' \circ ev_y)$ für alle $f \in na(d'_0 \circ ev_x)$. Dazu betrachten wir für $f \in na(d'_0 \circ ev_x)$ die Menge

$$C_f := \{e' \circ ev_y \mid e'(Tf(y)) = \|e'\| = 1, y \in Y\}.$$

Jede Menge C_f ist abgeschlossen bezüglich der schwach*-Topologie in der Einheitskugel von $C_0(Y, E)'$: Die Punktauswertung ev_f , definiert auf der

Menge $\{\mu \mid \mu = e' \circ ev_y, e' \in E', \|e'\| = 1, y \in Y\}$ (versehen mit der schwach*-Topologie), ist stetig ($|\mu(f)| = |e'(f(y))| \leq \|e'\| \|f\|$) und die Menge C_f ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ unter ev_f .

Zudem hat die Familie $\{C_f \mid f \in na(d'_0 \circ ev_x)\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft: Seien $f_1, \dots, f_n \in na(d'_0 \circ ev_x)$ mit $\|f_i\| = 1$ für $i = 1, \dots, n$. Wir zeigen

$$\bigcap_{i=1}^n C_{f_i} \neq \emptyset.$$

Wir setzen $h := f_1 + \dots + f_n$. Dann ist $\|h\| = n$, denn einerseits besagt die Dreiecksungleichung $\|h\| \leq \sum_{i=1}^n \|f_i\| = n$, andererseits gilt

$$n = \sum_{i=1}^n d'_0 \circ ev_x(f_i) = d'_0 \circ ev_x(h) \leq \|d'_0 \circ ev_x\| \|h\| = \|h\|.$$

Da in $C_0(Y, E)$ die Norm angenommen wird (siehe 1.7), gibt es ein $y \in Y$ mit $\|Th(y)\| = \|Th\|$. Wir wählen mittels des Satzes von Hahn-Banach ein $e' \in E'$ mit $\|e'\| = 1$ und $e'(Th(y)) = n$. Das Funktional $e' \circ ev_y$ liegt nun im Durchschnitt $C_{f_1} \cap \dots \cap C_{f_n}$, denn wegen $\operatorname{Re} e'(Tf_i(y)) \leq |e'(Tf_i(y))| \leq \|e'\| = 1$ muss $\operatorname{Re} e'(Tf_i(y)) = 1$ sein.

Insgesamt haben wir eine Familie mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, die aus abgeschlossenen Teilmengen eines Kompaktums besteht, namentlich die Einheitskugel des $C_0(Y, E)'$ (versehen mit der schwach*-Topologie). Ein grundlegendes Korollar aus der Definition der Kompaktheit, siehe z.B. [15, 9.2], besagt nun, dass auch

$$\bigcap_{f \in na(d'_0 \circ ev_x)} C_f \neq \emptyset$$

— und jedes Funktional aus diesem Schnitt hat die von uns gewünschte Eigenschaft.

Schlüsselschritt: $f(\varphi(y)) = 0$ impliziert $Tf(y) = 0$. Wir nehmen zunächst an, dass $\varphi(y) \notin \operatorname{supp} f$ und gehen so ähnlich vor wie oben, als wir die Wohldefiniertheit von φ nachwiesen. Wir wählen eine Umgebung U von $\varphi(y)$ mit $U \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$. Das ist möglich auf Grund der Regularität von X . Nach Definition von φ gibt es ein $e' \in E'$ mit $\|e'\| = 1$ und $T[na(d'_0 \circ ev_{\varphi(y)})] \subset na(e' \circ ev_y)$. Wir wählen eine Funktion $g \in C_0(X, D)$ mit $\operatorname{supp} g \subset U$, $g(\varphi(y)) = d_0$ und $\|g\| = 1$. Dann ist g eine Funktion, wo $d'_0 \circ ev_{\varphi(y)}$ seine Norm annimmt (d.h. $g \in na(d'_0 \circ ev_{\varphi(y)})$) und daher nimmt $e' \circ ev_y$ seine Norm in Tg an. Es ist $\|Tg(y)\| = 1$, denn einerseits ist $\|Tg(y)\| \leq \|Tg\| = 1$, andererseits ist $1 = \operatorname{Re} e'(Tg(y)) \leq \|Tg(y)\|$.

Aufgrund der disjunkten Träger ist $\|g + \lambda f\| = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$. Daraus folgt mittels der Linearität und Isometrieeigenschaft von T $\|Tg(y) + \lambda Tf(y)\| \leq 1$ und wegen der strikten Konvexität bzw. komplexen strikten Konvexität muss $\|Tf(y)\| = 0$ gelten, was zu zeigen war.

Sei nun $f(\varphi(y)) = 0$, also möglicherweise auch ein Randpunkt des Trägers von f . Sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da nach 1.9 die Menge $D := \{f \mid f \in C_0(X, D), \exists \text{ eine Umgebung } U \text{ von } \varphi(y): f[U] = \{0\}\}$ dicht in $M := \{f \mid f \in C_0(X, D), f(\varphi(y)) = 0\}$ liegt, gibt es ein $g \in D$ mit $\|f - g\| < \epsilon$ und wir können abschätzen:

$$\|Tf(y)\| = \|Tf(y) - Tg(y) + Tg(y)\| \leq \|T\| \|g(y) - f(y)\| + \|Tg(y)\| < \epsilon,$$

da $\|T\| = 1$ und $\varphi(y) \notin \text{supp } g$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, muss $Tf(y) = 0$ sein.

Die Funktion h . Sei $y \in Y_1$ vorgegeben. Wir definieren

$$(d, e) \in \text{graph}(h(y)) :\Leftrightarrow \forall f \in C_0(X, D), f(\varphi(y)) = d: Tf(y) = e.$$

Der Satz von Urysohn 1.2 sichert zu, dass jedem $d \in D$ ein $e \in E$ zugeordnet wird. Wir zeigen die Unabhängigkeit des $h(y)$ von der Wahl des f . Seien $f_1, f_2 \in C_0(X, D)$ mit $f_1(\varphi(y)) = f_2(\varphi(y))$. Dann hat $f := f_1 - f_2$ an der Stelle $\varphi(y)$ den Wert 0 und mit der Hilfsbehauptung oben folgt $Tf(y) = 0$, d.h. $Tf_1(y) = Tf_2(y)$.

Wir zeigen $\|h(y)\| = 1$ für alle $y \in Y_1$. Einerseits gibt es für jedes $d \in D$, $\|d\| = 1$ nach 1.2 eine Funktion $f \in C_0(X, D)$ mit $f(\varphi(y)) = d$. Deshalb ist $\|h(y)d\| = \|h(y)(f(\varphi(y)))\| = \|Tf(y)\| \leq \|Tf\| = 1$. Andererseits ist für das am Anfang des Beweises festgesetzte d_0 die Norm von $h(y)d_0$ gleich 1: Die wie gerade gewählte Funktion $f \in C_0(X, D)$, $f(\varphi(y)) = d_0$, $\|f\| = 1$, liegt in der Menge $na(d'_0 \circ ev_{\varphi(y)})$ und somit in der Menge $na(e' \circ ev_y)$ für ein Norm-1-Funktional $e' \in E'$. Somit folgt $1 = \text{Re } e'(Tf(y)) \leq \|Tf(y)\| = \|h(y)(f(\varphi(y)))\| = \|h(y)d_0\|$.

Die Funktion h ist so definiert, dass T die behauptete Darstellung als gewichteter Kompositionsoperator hat. Die Stetigkeit von φ und h folgt aus dem Satz 3.1. \square

Das folgende Beispiel zeigt, dass bei nicht strikt konvexem Wertevorrat E und reellem Skalarkörper man *immer* zwei kompakte Hausdorffräume X, Y und eine lineare Isometrie $T: C(X, \mathbb{R}) \rightarrow C(Y, E)$ konstruieren kann, wo T kein Kompositionsoperator ist.

3.19 Beispiel. Eine nicht surjektive Isometrie, die kein verallgemeinerter Kompositionsoperator ist – reellem Fall [21, Th.3]: Sei E ein nicht strikt

konvexer Banachraum mit reellem Skalarkörper. Seien e_1, e_2 zwei verschiedene Elemente aus E mit $\|e_1\| = \|e_2\| = \|\frac{1}{2}(e_1 + e_2)\| = 1$. Wir definieren $T: C(\{1, 2\}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\{1, 2\}, E)$ durch

$$T(1, 1) := (e_1, e_1), T(1, -1) := (e_2, e_2).$$

Da $(1, 1)$ und $(1, -1)$ eine Basis von $C(\{1, 2\}, \mathbb{R}) = l_2^\infty$ bilden, ist T als lineare Abbildung damit wohldefiniert. Es gilt für alle α mit $|\alpha| \leq 1$

$$T(1, \alpha) = \frac{1 + \alpha}{2}(e_1, e_1) + \frac{1 - \alpha}{2}(e_2, e_2)$$

und nun folgt mit 2.6

$$\|T(1, \alpha)(1)\| = \|T(1, \alpha)(2)\| = \left\| \frac{1 + \alpha}{2}e_1 + \frac{1 - \alpha}{2}e_2 \right\| = 1.$$

Die gleiche Schlussweise lässt sich auch auf $T(\alpha, 1)$ anwenden und somit ist T eine Isometrie.

Aber T ist kein verallgemeinerter Kompositionsoperator: Angenommen, es gibt eine Teilmenge $Y_1 \subset \{1, 2\}$, eine stetige surjektive Funktion $\varphi: Y_1 \rightarrow \{1, 2\}$ und eine stetige Funktion $h: Y_1 \rightarrow (\mathcal{L}(\mathbb{R}, E), SOT)$ mit $Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y)))$. Wir wählen ein $y_0 \in Y_1$ mit $\varphi(y_0) = 1$. Wenn wir nun $f_1 := (1, 1)$ und $f_2 := (1, -1)$ schreiben, dann ist nach Definition von T widersprüchlicherweise

$$\begin{aligned} e_1 = Tf_1(y_0) &= h(y_0)(f_1(\varphi(y_0))) = h(y_0)(f_1(1)) = \\ &h(y_0)(f_2(1)) = h(y_0)(f_2(\varphi(y_0))) = Tf_2(y_0) = e_2. \end{aligned}$$

4 Bemerkungen

4.1 Zum Zerlegungssatz für Extremalfunktionale

Surjektive lineare Isometrien haben wir vor allem mittels der schwachen Darstellung 3.12 und dem daraus resultierenden Kriterium 3.13 untersucht. Die schwache Darstellung basiert auf dem Zerlegungssatz für Extremalfunktionale 2.11, dessen Beweis wir in diesem Abschnitt näher beleuchten.

Die Wohldefiniertheit und die Injektivität der Funktion Θ haben wir wie Behrends in [5, Th. 4.5] bewiesen. Zum Nachweis der Surjektivität von Θ verwendeten wir zwei Argumente: die Norm-Intervall erhaltende Eigenschaft der Extremalfunktionale 2.9 (wie von Behrends [6, 2.3(e)] gezeigt) und die Charakterisierung der Norm-Intervall erhaltenden Funktionale als Auswertungsfunktionale 2.2. Der Beweis dieser Charakterisierung ähnelt sehr der Argumentation Ivan Singers in seinem Beweis des Zerlegungssatzes [25, Lemma 1.7] — wobei Singer jedoch den Dualraum als Raum von Maßen anschaut. Die neuere Notation der Unterstützung, wie sie Beckenstein, Narici und Todd verwenden, kommt ohne Borelmengen aus.

Die Wohldefiniertheit von Θ kann auch mit Hilfe der Charakterisierung der Extremalfunktionale von Buck und Phelps nachgewiesen werden. Dies ist der Ansatz von Wolfgang Ströbele in [26]. Dieser Zugang erlaubt es, noch eine Aussage über den Kern von $e' \circ ev_{x_0}$ zu machen: Falls der abgeschlossene Unterraum $M \subset E$ im Kern von $e' \in \mathcal{E}_E$ enthalten ist, dann ist $\mathcal{M} := \{f \mid f \in C_0(X, E), \text{ bild } f \subset M\}$ im Kern von $e' \circ ev_{x_0}$ enthalten. Der Beweisweg Ströbeles durchläuft folgende Stationen: Sei $f \in C_0(X, E)$ vorgelegt.

- Es gibt $e_1, e_2 \in E$ und ein $m \in M$ mit $f(x_0) = e_1 - e_2 + m$, $\|e_i\| - \text{Re } e'(e_i) \leq 1/2$, $\|e_1\| \geq \|f\|$. Das ist im Wesentlichen eine Anwendung des Satzes von Buck-Phelps.
- Es ist $f = f_1 - f_2 + g$, $\|f_i\| - \text{Re } e'(f(x_0)) \leq 1$, $g \in \mathcal{M}$ wobei $f_1(x) = f(x) + h(x)(e_2 - m)$, $f_2(x) := h(x)e_2$, $g(x) := h(x)m$ für ein geeignetes $h \in C(X, [0, 1])$. Durch erneute Anwendung des Satzes von Buck-

Phelps, diesmal in die andere Richtung, folgt die Behauptung $e' \circ ev_{x_0} \in \mathcal{E}_{C_0(X,E)}$.

Die Begründung der Wohldefiniertheit von Θ im Satz 2.11 könnte wesentlich verkürzt werden, wenn wir wüssten, dass jedes Extremalfunktional seine Norm annimmt. Das ist im Allgemeinen nicht richtig, wie wir jetzt an einem Beispiel verdeutlichen wollen. Dafür benötigen wir einige Vorüberlegungen.

Eine Teilmenge W eines normierten Raumes heißt *kreisförmig*, falls mit w auch λw , $|\lambda| \leq 1$ in W enthalten ist. Falls W konvexe Teilmenge eines normierten Raumes mit Skalkörper \mathbb{R} ist, reduziert sich diese Bedingung auf $w \in W \Rightarrow -w \in W$ für alle $w \in W$.

Lemma 1. *Sei $(E, \|\cdot\|_{alt})$ ein normierter Raum und B dessen Einheitskugel. Sei W eine konvexe, kreisförmige und beschränkte Teilmenge von E . Dann definiert das Minkowski-Funktional der Menge $B + W$ eine Norm $\|\cdot\|_{neu}$, welche äquivalent zur ursprünglichen Norm $\|\cdot\|_{alt}$ ist.*

Beweis. ¹ Die Einheitskugel B ist absorbierend, konvex und kreisförmig aufgrund ihrer Definition. Daher ist auch die Menge $B + W \supset B$ absorbierend. Die Menge $B + W$ ist auch konvex und kreisförmig, wie wir direkt durch Einsetzen erkennen können. Somit haben wir gezeigt, dass das Minkowski-Funktional

$$p: E \rightarrow \mathbb{R}, p(e) := \inf\{\lambda \mid \lambda > 0, \frac{e}{\lambda} \in B + W\}$$

eine Halbnorm definiert [29, Satz VIII.1.5].

Sei nun $e \neq 0$. Angenommen, $p(e) = 0$. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$ das Element $\frac{e}{\epsilon}$ in der Menge $B + W$ enthalten. Das ist jedoch ein Widerspruch zur Beschränktheit von $B + W$. Daher ist die Annahme falsch und p ist eine Norm.

Wir zeigen nun die Äquivalenz der beiden Normen. Wegen $B \subset B + W$ ist $\|e\|_{neu} \leq \|e\|_{alt}$ für alle $e \in E$. Aufgrund der Beschränktheit von W gibt es ein M mit $\|w\|_{alt} \leq M$ für alle $w \in W$. Wir zeigen für alle $e \in E$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+M} \|e\|_{alt} \leq \|e\|_{neu} \\ \Leftrightarrow & \{\lambda \mid \lambda > 0, \frac{e}{\lambda(1+M)} \in B\} \supset \{\lambda \mid \lambda > 0, \frac{e}{\lambda} \in B + W\}. \end{aligned}$$

¹Ein Gutachter wies hier auf eine alternative Beweismöglichkeit hin, wo die Tatsache $B \subset B + W \subset rB$ für ein geeignetes r verwendet wird.

Sei ein Element $\frac{e}{\lambda} = b+w$ aus $B+W$ vorgelegt. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|b+w\|_{alt} \leq \|b\|_{alt} + \|w\|_{alt} \leq 1+M,$$

so dass $\frac{e}{\lambda(1+M)}$ in $B+W$ liegt. \square

Lemma 2. Sei E ein normierter Raum und seien d', e' zwei lineare stetige Funktionale auf E mit $\|d'\| = \|e'\| = 1$ und $\ker(d') \subset \ker(e')$. Dann ist $d' = e'$.

Beweis. Wir zeigen $\ker(e') \subset \ker(d')$. Daraus folgt die Behauptung nach [15, 19.1]. Angenommen, es gibt ein $e_0 \in E$ mit $e'(e_0) = 0$ und $d'(e_0) \neq 0$. Sei $e \in E$ beliebig. Falls $d'(e) = 0$, so ist nach Voraussetzung $e' = 0$. Falls $d'(e) \neq 0$, so ist

$$e_0 - \frac{d'(e_0)}{d'(e)}e \in \ker(d') \subset \ker(e')$$

und somit

$$0 = \underbrace{e'(e_0)}_{=0} - \underbrace{\frac{d'(e_0)}{d'(e)}}_{\neq 0} e'(e).$$

Daher ist $e'(e) = 0$. Also ist e' das Nullfunktional, ein Widerspruch zu $\|e'\| = 1$. \square

4.1 Beispiel. Ein Extremalfunktional, welches seine Norm nicht annimmt (gleichzeitig ein Norm-Isomorphismus mit Norm $1+\epsilon$, der ein Extremalfunktional verschwinden lässt) [24, Lemma 3.12]:

Wir betrachten zunächst den Raum $(E, \|\cdot\|_{alt}) := c_0$ aller reellen Nullfolgen, versehen mit der Maximumsnorm. Auf diesem Raum betrachten wir das Funktional

$$e'_0(\{c_n\}_n) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^i}.$$

Das Funktional e'_0 ist linear und stetig mit Norm 1: Einerseits ist

$$|e'_0(\{c_n\})| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^i} \right| \leq \max\{|c_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \|\{c_n\}\|_{alt},$$

andererseits streben die Funktionswerte $e'_0(\{c_n\}^i)$ des Funktionals für die Folge

$$\{c_n\}^1 := (1, 0, 0, \dots), \{c_n\}^2 := (1, 1, 0, 0, \dots), \{c_n\}^3 := (1, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

gegen 1 (für i gegen ∞). Die Norm wird jedoch nicht angenommen: Die einzige Folge mit Folgengliedern kleiner gleich 1, wo e'_0 den Wert 1 annimmt, ist die Folge $(1, 1, 1, \dots)$, und die liegt nicht in $(E, \|\cdot\|_{alt})$.

Wir normieren E nun um, so dass e'_0 bezüglich der neuen Norm ein Extremalfunktional ist. Sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da $(E, \|\cdot\|_{alt})$ separabel ist (siehe [15, 17.2]) und Unterräume separabler Räume separabel sind [15, 6.15], gibt es eine Folge $\{e^i\}_{i \in \mathbb{N}}$, deren lineare Hülle dicht in $\ker(e'_0)$ liegt. Wir setzen

$$K := \left\{ \frac{e^i}{\|e^i\|} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Die Menge K ist als Teilmenge der Einheitskugel von $(E, \|\cdot\|_{alt})$ beschränkt. Wir ergänzen K zu einer kreisförmigen konvexen Menge, d.h. wir setzen

$$W := \text{conv}\{K \cup -K\}.$$

Die Menge W ist konvex und kreisförmig nach Definition. Sie ist wie K eine Teilmenge der Einheitskugel von $(E, \|\cdot\|_{alt})$ und deshalb beschränkt. Wir wenden Lemma 1 an und definieren die Norm $\|\cdot\|_{neu}$ als Minkowski-Funktional der Menge $B + \epsilon W$, wobei B die Einheitskugel von $(E, \|\cdot\|_{alt})$ ist.

Die Norm des Dualraums von $(E, \|\cdot\|_{neu})$ können wir wie folgt charakterisieren:

$$\begin{aligned} \|e'\|_{neu} &= \sup\{e'(b + \epsilon w) \mid b \in B, w \in W\} \\ &= \|e'\|_{alt} + \epsilon \sup\{e'(w) \mid w \in W\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Das oben definierte Funktional e'_0 ist auch in $(E, \|\cdot\|_{neu})$ ein Norm-1-Funktional, welches seine Norm nicht annimmt, da $e'_0(w) = 0$ für alle $w \in W$.

Sei $e'_0 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2)$, wobei e'_1, e'_2 in $(E, \|\cdot\|_{neu})$ Norm kleiner gleich 1 haben. Wir bemerken zunächst, dass $\|e'_1\|_{alt} = \|e'_2\|_{alt} = 1$. Es ist nämlich

$$2e'_0(b) = e'_1(b) + e'_2(b) \quad (4.2)$$

für alle b aus B , und es ist $\sup\{e'_i(b) \mid b \in B\} \leq \|e'_i\|_{neu} \leq 1$ und $\sup\{e'_0(b) \mid b \in B\} = 1$. Wenn wir nun in der Gleichung (4.2) zum Supremum übergehen, kann nur $\sup\{e'_i(b) \mid b \in B\} = 1$ sein ($i = 1, 2$).

Wir zeigen nun, dass e'_0, e'_1 und e'_2 den gleichen Kern haben. Nach der Charakterisierung (4.1) der Norm gilt:

$$1 \geq \|e'_i\|_{neu} = \underbrace{\|e'_i\|_{alt}}_{=1} + \epsilon \sup\{e'_i(w) \mid w \in W\}.$$

Daraus folgt $\sup\{e'_i(w) \mid w \in W\} = 0$. Da aber W den Kern von e'_0 aufspannt, ist $\ker(e'_i) \subset \ker(e'_0)$ ($i = 1, 2$). Aus Lemma 2 folgt $e'_0 = e'_1 = e'_2$.

4.2 Über Disjunktheit erhaltende Operatoren

Der Satz 3.6 wirft die interessante Frage auf, ob die Forderung $Y = \{\text{coz } Tf \mid f \in C_0(X, D)\}$ abgeschwächt werden kann — vielleicht derart, dass man eine Darstellung als verallgemeinerten Kompositionsoperator wie im Satz von Holsztyński erhält. Eine Untersuchung in dieser Richtung ist die Arbeit [20] von Jeang und Wong, die Disjunktheit erhaltende Fredholm-Operatoren betrachten.

Falls die Disjunktheit erhaltende lineare Isometrie zusätzlich noch surjektiv ist, können wir — alternativ zu 3.6 — auch sehr elegant mit der schwachen Darstellung argumentieren:

4.2. *Seien X, Y lokalkompakte Hausdorffräume und D, E Banachräume. Sei $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ eine surjektive, Disjunktheit erhaltende, lineare Isometrie. Dann hat T für alle $y \in Y$ die Darstellung*

$$Tf(y) = h(y)(f(\varphi(y))),$$

wobei $h: Y \rightarrow (\mathcal{L}(D, E), SOT)$ eine stetige Funktion ist und $\varphi: Y \rightarrow X$ surjektiv und stetig ist.

Beweis. [21, Corollar 9] Wir verwenden die schwache Darstellung von T ,

$$\mu(Tf) = \tilde{h}(\mu)(f(\tilde{\varphi}(\mu))), \forall \mu \in \mathcal{E}_{C_0(Y, E)}$$

aus 3.12. Wir zeigen für fest vorgegebenes $y \in Y$, dass $\tilde{\varphi}(e'_1 \circ ev_y) = \tilde{\varphi}(e'_2 \circ ev_y)$ für alle $e'_1, e'_2 \in E'$ gilt. Nach dem Kriterium 3.13 folgt daraus die Behauptung.

Angenommen, es gibt ein $y \in Y$ und zwei Funktionale $e'_1, e'_2 \in \mathcal{E}_E$ mit $\tilde{\varphi}(e'_1 \circ ev_y) \neq \tilde{\varphi}(e'_2 \circ ev_y)$. Wir setzen

$$x_i := \tilde{\varphi}(e'_i \circ ev_y) \text{ und } \mu_i := e'_i \circ ev_y (i = 1, 2).$$

Wir wählen zwei disjunkte offene Umgebungen U_i von x_i , ($i = 1, 2$). Da $\|\tilde{h}(\mu_i)\| = 1$ (siehe 3.12), gibt es $d_i \in D$ mit $\tilde{h}(\mu_i)d_i \neq 0$. Wir wählen zwei Funktionen f_i mit $\text{supp } f_i \subset U_i$ und $f_i(x_i) = d_i$ mit Satz 1.2. Da f_1 und f_2 disjunkte Träger haben, ist $\text{coz } f_1 \cap \text{coz } f_2 = \emptyset$. Weil T Disjunktheit erhält, muss auch $\text{coz } Tf_1 \cap \text{coz } Tf_2 = \emptyset$ sein. Aber es ist

$$e'_i(Tf_i(y)) = \mu_i(Tf_i) = \tilde{h}(\mu_i)(f_i(\tilde{\varphi}(\mu_i))) = \tilde{h}(\mu_i)(f_i(x_i)) = \tilde{h}(\mu_i)d_i \neq 0,$$

für $i = 1, 2$, so dass weder $Tf_1(y)$ noch $Tf_2(y)$ null sind. Widerspruch! \square

4.3 Eindimensionaler Zentralisator

In unserem Beispiel 3.15 zeigten wir, dass strikt konvexe Banachräume einen eindimensionalen Zentralisator haben. Die Forderung nach einem eindimensionalen Zentralisator ist viel schwächer als die Forderung nach strikter Konvexität. Wir können die Forderung nach strikter Konvexität lesen als

$$\forall e_1, e_2 \in E, \|e_1\| = \|e_2\| = 1: \|e_1 + e_2\| < 1 \text{ und } \|e_1 - e_2\| < 1,$$

aber auch ein Raum mit

$$\forall e_1, e_2 \in E, \|e_1\| = \|e_2\| = 1: \|e_1 + e_2\| < 1 \text{ oder } \|e_1 - e_2\| < 1 \quad (4.3)$$

hat einen eindimensionalen Zentralisator. Dies wird — ohne Beweis — erwähnt in den Arbeiten [21, S. 102] und [17, S. 197]. Weitere Beispiele sind angegeben in [5, Prop. 5.1].

In ihrer Arbeit [21, Th. 6] beweisen die Autoren ohne die Notation des Zentralisators: Falls $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ eine surjektive lineare Isometrie ist und E die Bedingung (4.3) erfüllt, dann ist T ein gewichteter Kompositionsoperator. Ein Schritt ihrer Argumentation bleibt jedoch unklar: auf S. 102, zweite Zeile von unten, gehen die Autoren davon aus, dass die μ_i ihre Norm annehmen. Es ist nicht ganz klar, dass die μ_i immer diese Eigenschaft haben.

4.4 Linearität

Während des Bearbeitens des Themas stellte sich der Kandidat die Frage, was denn eigentlich verloren geht, wenn lineare Isometrien statt beliebiger Isometrien betrachtet werden. Hier zeigte sich die Bedeutung der Surjektivität. Die Aussage des folgenden Theorems ist seit vielen Jahren bekannt, der Beweis ist jedoch aus dem Jahr 2003 und verwendet ein geometrisches Konzept. Deshalb wird er hier wiedergegeben.

4.3. *Seien D, E normierte Räume und sei $T: D \rightarrow E$ eine bijektive (oder äquivalent: surjektive) Isometrie mit $T0 = 0$. Dann ist T reell-linear, d.h. additiv und homogen für reelle Skalare.*

Beweis. [28] Seien $a, b \in D, z := \frac{1}{2}(a + b)$ und $z' := \frac{1}{2}(Ta + Tb)$. Wir zeigen $Tz = z'$ und folgern daraus die Behauptung. Als Hilfsmittel verwenden wir Punktspiegelungen.

Punktspiegelung. Wir definieren $\theta: D \rightarrow D$ durch $\theta d := 2z - d$. Die Funktion θ hat interessante Eigenschaften, die direkt aus dem Einsetzen der Definition folgen:

- Sie ist eine Isometrie: $\|\theta d_1 - \theta d_2\| = \|d_1 - d_2\|$.
- Sie hat genau einen Fixpunkt, den Punkt z : $\theta z = z$. Insbesondere gilt $\|\theta d - z\| = \|d - z\|$ für alle $d \in D$.
- Sie wirft a auf b und b auf a .
- Es gilt $\|\theta d - d\| = 2\|d - z\|$ für alle $d \in D$.
- Sie ist ihre eigene Inverse: $\theta\theta d = d$ für alle $d \in D$.

Isometrien, die c und d fest lassen. Der Beweis verwendet als Hilfskonstruktion die Menge W ,

$$W := \{S \mid S: D \rightarrow D, S \text{ bijektive Isometrie, } Sa = a, Sb = b\}.$$

Wir zeigen, dass alle Funktionen in W nicht nur a und b , sondern auch den Mittelpunkt z fest lassen. Dazu setzen wir $\lambda := \sup\{\|Sz - z\| \mid S \in W\}$. Die Zahl λ ist endlich, denn mit Dreiecksungleichung, Isometrieeigenschaft und $Sa = a$ folgt für alle $S \in W$

$$\|Sz - z\| \leq \|Sz - a\| + \|a - z\| = \|z - a\| + \|a - z\| = 2\|a - z\|.$$

Zudem ist mit S auch die Funktion $\tilde{S} := \theta S^{-1} \theta S$ in W : Als Verknüpfung von bijektiven Isometrien ist auch \tilde{S} eine Isometrie, und es gilt

$$\tilde{S}a = \theta S^{-1} \theta Sa = \theta S^{-1} \theta a = \theta S^{-1} b = \theta b = a, \quad (4.4)$$

und, mit der gleichen Schlussweise, $\tilde{S}b = b$. Zusammen mit den Eigenschaften der Punktspiegelung folgt damit für alle $S \in W$:

$$\begin{aligned} 2\|Sz - z\| &= \|\theta z - z\| = \|\theta Sz - Sz\| = \|S^{-1} \theta Sz - z\| = \|\theta S^{-1} \theta Sz - z\| \\ &= \|\tilde{S}z - z\| \leq \lambda. \end{aligned}$$

Durch Übergang zum Supremum erhalten wir $2\lambda \leq \lambda$, d.h. $\lambda = 0$ und somit wie gewünscht $Sz = z$ für alle $S \in W$.

T bildet den Mittelpunkt auf den Mittelpunkt der Bilder ab. Wir definieren die Punktspiegelung θ' an z' : $\theta': E \rightarrow E, e \mapsto 2z' - e$ und die Funktion $\tilde{T} := \theta T^{-1} \theta' T$. Nun liegt \tilde{T} in W , dies folgt wie oben in (4.4) durch Einsetzen von a und b . Folglich ist $z = \tilde{T}z$. Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit θ , erhalten wir $z = \theta \tilde{T}z = T^{-1} \theta' Tz$. Eine weitere Multiplikation von links mit T ergibt dann $Tz = \theta' Tz$, und weil θ' genau einen Fixpunkt hat, nämlich den Punkt z' , gilt wie gewünscht $Tz = z'$.

T ist reell-linear. Wir zeigen zunächst induktiv $T \frac{a}{2^n} = \frac{Ta}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus dem vorherigen Beweisteil, indem wir

$b = 0$ setzen. Für den Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ nehmen wir $T \frac{a}{2^n} = \frac{Ta}{2^n}$ an und schreiben

$$T \frac{a}{2^{n+1}} = T \frac{a}{2 \cdot 2^n} = \frac{T \frac{a}{2^n}}{2} = \frac{Ta}{2^{n+1}}, \quad (4.5)$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde.

Daraus folgt sofort die Additivität:

$$T(a + b) = T \frac{2a + 2b}{2} = \frac{T2a + T2b}{2} = Ta + Tb.$$

Um die Homogenität von T nachzuweisen, nehmen wir zunächst $\lambda \in (0, 1)$ an. Mit Hilfe des Verfahrens der Intervallschachtelung können wir eine Folge $\{z_i\}_i$ mit $z_i \in \{0, 1\}$ konstruieren, so dass die Folge $\{\lambda_n\}_n$, $\lambda_n := \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{2^i}$ gegen λ konvergiert. Aufgrund der Additivität von T und Gleichung (4.5) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$T\lambda_n a = T \sum_{i=1}^n \frac{z_i a}{2^i} = \sum_{i=1}^n \frac{Tz_i a}{2^i} = Ta \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{2^i} = \lambda_n Ta.$$

Diese Überlegung führt — zusammen mit der Stetigkeit von T und der Stetigkeit der Skalarmultiplikation — zu

$$T\lambda a = \lim_{n \rightarrow \infty} T\lambda_n a = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n Ta = \lambda Ta. \quad (4.6)$$

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ nun beliebig, so schreiben wir $\lambda =: m + \beta$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $\beta \in [0, 1)$. Die Homogenität von T folgt nun aus der Additivität und der Gleichung (4.6):

$$T\lambda a = Tma + T\beta a = (m + \beta)Ta = \lambda Ta. \quad \square$$

4.4 Beispiel. Eine nichtlineare nicht-surjektive Isometrie [28]: Vorab bemerken wir, dass $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: Weil die Sinusfunktion beschränkt ist, genügt es, das Intervall $[-1, 1]$ zu betrachten; weil die Sinusfunktion punktsymmetrisch ist ($\sin -\alpha = -\sin \alpha$), genügt es, das Intervall $[0, 1]$ zu betrachten. Die Differenzfunktion $[0, 1] \mapsto \alpha - \sin \alpha$ hat an 0 den Wert 0 und ist monoton steigend, weil ihre Ableitung $1 - \cos \alpha$ größer als 0 ist.

Wir betrachten $T: \mathbb{R} \rightarrow l_2^\infty$, $\alpha \mapsto (\alpha, \sin \alpha)$. Dann folgt einerseits aus

$$\|T\alpha\| = \max\{|\alpha|, |\sin \alpha|\} = |\alpha|,$$

dass T eine Isometrie ist, andererseits ist

$$(\pi, 0) = T\pi \neq T \frac{\pi}{2} + T \frac{\pi}{2} = (\pi, 2).$$

4.5 Beispiel. Eine nichtlineare surjektive Isometrie zwischen komplexen Banachräumen: Wir interpretieren \mathbb{C} (versehen mit der euklidischen Norm) als Banachraum mit komplexem Skalarkörper und betrachten die Konjugation $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, w \mapsto \bar{w} := \operatorname{Re} w - i \operatorname{Im} w$. Die Funktion T ist eine Isometrie, denn

$$|Tw| = \sqrt{(\operatorname{Re} w)^2 + (-\operatorname{Im} w)^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2} = |w|.$$

Sie ist ebenfalls surjektiv, denn für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $TTz = z$. Aber sie ist nicht homogen — und somit nicht linear:

$$-i = T1i \neq iT1 = i.$$

4.6. Seien D, E normierte Räume mit komplexem Skalarkörper und T eine surjektive Isometrie mit $T0 = 0$ mit $Tid = iTd$ für alle $d \in D$. Dann ist T linear.

Beweis. Nach 4.3 ist T additiv und reell-homogen. Wir verwenden die zusätzliche Annahme an T , um die Behauptung nachzuweisen:

$$T(\alpha + i\beta)d = \alpha Td + \beta Tid = (\alpha + i\beta)Td. \quad \square$$

Zusammenfassung

Wir fassen die Antworten auf die Frage: „Wann hat eine lineare Isometrie $T: C_0(X, D) \rightarrow C_0(Y, E)$ (X, Y lokalkompakte Hausdorffräume, D, E Banachräume) eine kanonische Darstellung?“ zusammen:

- Falls T Disjunktheit erhält und $Y = \{\text{coz } Tf \mid f \in C_0(X, D)\}$ ist, so ist T ein gewichteter Kompositionsoperator.
- Falls T surjektiv ist und E einen eindimensionalen Zentralisator hat, so ist T ein gewichteter Kompositionsoperator.
- Falls T strikt konvex ist, so ist T ein verallgemeinerter gewichteter Kompositionsoperator.

Literaturverzeichnis

- [1] Erik M. Alfsen, Edward G. Effros. *Structure in real Banach spaces. Part II.* Annals of mathematics, **96**, 129–173, 1972.
- [2] Hasan Al-Halees, Richard J. Fleming. *Extreme point methods and Banach-Stone theorems.* Preprint vom 13. Juni 2001.
- [3] Stefan Banach. *Theory of linear operations.* North-Holland, Amsterdam New York Oxford Tokio, 1987.
- [4] Edward Beckenstein, Lawrence Narici, Aaron R. Todd. *Automatic continuity of linear maps on spaces of continuous functions.* Manuscripta Mathematica, **62**, 257–275, 1988.
- [5] Ehrhard Behrends. *M-Structure and the Banach-Stone-theorem.* (Lecture Notes in Mathematics 736) Springer, Berlin Heidelberg New York, 1979.
- [6] Ehrhard Behrends. *Operators which respect norm intervals.* Studia Mathematica, **70**, 203–220, 1982.
- [7] Neal L. Carothers. *Isometries on $C(K)$.* Analysis Seminar, Bowling Green, 1993. (<http://www.bgsu.edu/~carother/>)
- [8] Ryszard Engelking. *General Topology.* PWN, Warszawa, 1977.
- [9] William A. Feldman, James F. Porter. *Operators on Banach lattices as weighted compositions.* The journal of the London Mathematical Society (2. Serie), **33**, 149–156, 1986.
- [10] Richard J. Fleming, James E. Jamison. *Isometries on Banach spaces: function spaces.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London New York Washington (D.C.), 2003.
- [11] Hwa-Long Gau (高华隆), Jyh-Shyang Jeang (蒋志祥), Ngai-Ching Wong (黄毅青). *Biseparating linear maps between continuous vector-valued function spaces.* The journal of the Australian Mathematical Society, **74**, 101–109, 2003.

- [12] Salvador Hernández, Edward Beckenstein, Lawrence Narici. *Banach-Stone theorems and separating maps*. Manuscripta Mathematica, **86**, 409–416, 1995.
- [13] Włodzimierz Holsztyński. *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous function*. Studia Mathematica, **26**, 133–136, 1966.
- [14] Vasile I. Istrăţescu. *Strict convexity and complex strict convexity*. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 89.) Marcel Dekker, New York Basel, 1984.
- [15] Graham J. O. Jameson. *Topology and normed spaces*. Chapman and Hall, London, 1974.
- [16] James E. Jamison, Minakshisundaram Rajagopalan. *Weighted composition operator on $C(X, E)$* . Journal of operator theory, **19**, 307–317, 1988.
- [17] Krzysztof Jarosz. *Multipliers in complex Banach spaces and structure of the unit balls*. Studia Mathematica, **87**, 197–213, 1987.
- [18] Jyh-Shyang Jeang (蒋志祥), Ngai-Ching Wong (黄毅青). *Weighted composition operators of $C_0(X, E)$'s*. Journal of mathematical analysis and applications, **201**, 981–993, 1996.
- [19] Jyh-Shyang Jeang (蒋志祥), Ngai-Ching Wong (黄毅青). *Into isometries of $C_0(X, E)$ s*. Journal of mathematical analysis and applications, **207**, 286–290, 1997.
- [20] Jyh-Shyang Jeang (蒋志祥), Ngai-Ching Wong (黄毅青). *Disjointness preserving Fredholm linear operators of $C_0(X)$* . Journal of operator theory, **49**, 61–75, 2003.
- [21] Jyh-Shyang Jeang (蒋志祥), Ngai-Ching Wong (黄毅青). *On the Banach-Stone problem*. Studia Mathematica, **155**, Nr. 2, 95–104, 2003.
- [22] Eric Schechter. *Handbook of analysis and its foundations*. Academic Press, San Diego, 1997.
- [23] Horst Schubert. *Topologie. Eine Einführung*. 4. Auflage. B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [24] Jiménez Sevilla, José Pedro Moreno. *A note on norm attaining functionals*. Proceedings of the American Mathematical Society, **126**, Nr. 7, 1989–1997, 1998.

- [25] Ivan Singer. *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 171.) Springer, Berlin Heidelberg New York, 1970.
- [26] Wolfgang J. Ströbele. *On the representation of the extremal functionals on $C_0(T, X)$* . Journal of approximation theory, **10**, 64–68, 1974.
- [27] Edward Thorp, Robert Whitley. *The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space*. Proceedings of the American Mathematical Society, **18**, 640–646, 1967.
- [28] Jussi Väisälä. *A proof of the Mazur-Ulam theorem*. The American mathematical monthly, **110**, 634–636, 2003.
- [29] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. 3. Auflage. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2000.

Zu erledigen: