FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Erziehungswissenschaft und Psychologie
Arbeitsbereich Methoden der Psychologie
Prof. Dr. Albrecht Iseler

Grundbegriffe der Vektor- und Matrixalgebra

Fassung WS 2002/03

Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren und Matrizen.

1.1 Zielsetzung

Die Vektor- und Matrixalgebra wird in der Statistik (insbesondere bei multivariaten Verfahren) verwendet, um Operationen mit ganzen Datensätzen möglichst einfach beschreiben zu können.

1.2 Definitionen

1.2.1 Vorläufige Definition eines Vektors

Ein Vektor ist eine Ansammlung von "durchnumerierten" Zahlen.

Beispiele:
- Die Meßwerte x_1, x_2, ..., x_n bilden zusammen den Vektor **x**.
- Wenn wir bei der multiplen Regression die Meßwerte der Vpn mit den Gewichtszahlen b_1, b_2, ..., b_m multiplizieren, dann bilden diese Gewichtszahlen zusammen den Vektor **b**.

Die einzelnen Zahlen, aus denen ein Vektor gebildet ist, heißen die Elemente des Vektors.

Will man einen Vektor elementweise darstellen, dann schreibt man die Elemente untereinander und setzt das Ganze in eckige Klammern.
Haben wir z.B. 3 Meßwerte x_1=8, x_2=5 und x_3=2, die zusammen den Vektor **x** bilden, dann können wir auch schreiben:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Anmerkung: In dieser Schreibweise handelt es sich genauer gesagt um einen Spaltenvektor. Gelegentlich schreibt man die Zahlen auch nebeneinander:

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dann spricht man von einem Zeilenvektor. (Der Strich in dem Symbol **x'** signalisiert, daß es sich um einen Zeilenvektor handelt; vgl. Abschnitt 2.1).

Hinweis: In der vorliegenden Darstellung werden vor allem die Gemeinsamkeiten von Matrizen und Vektoren hervorgehoben. In anderen Büchern, die (im Interesse größerer mathematischer Präzision) eher die Unterschiede herausstellen, werden Vektoren nicht - wie Matrizen (s.u.) - in eckige, sondern in runde Klammern eingeschlossen.

1.2.2 Vorläufige Definition einer Matrix

Eine Matrix ist eine aus Zeilen und Spalten bestehende Tabelle, in der jeweils in dem Feld, das durch die "Kreuzung" einer Zeile und einer Spalte gebildet wird, eine Zahl steht.

Hinweis: Der Plural von "Matrix" ist "Matrizen".

Beispiele:
- "Daten-Matrix": Die Meßwerte von n Vpn in m Variablen werden häufig als eine Tabelle mit n Zeilen und m Spalten dargestellt; in der i-ten Zeile der Tabelle stehen die Daten der i-ten Vp in den verschiedenen Variablen. Entsprechend kann man auch sagen: In der j-ten Spalte stehen die Daten der verschiedenen Vpn in der j-ten Variablen.
- "Interkorrelations-Matrix": Die Korrelationen mehrerer Variablen sind in einer Tabelle zusammengefaßt; in dem Feld, das in der 2. Zeile und der 3. Spalte steht, befindet sich die Korrelation der 2. und der 3. Variablen.

Die einzelnen Zahlen, aus denen eine Matrix gebildet wird, heißen die <u>Elemente</u> der Matrix.

Bei der elementweisen Darstellung einer Matrix setzt man die Matrix als ganze ebenfalls in eckige Klammern.
Wenn z. B. die 3 Vpn einer Untersuchung auf einer 1. Variablen die Meßwerte 8, 5 und 2 und auf der 2. Variablen die Meßwerte 17, 23 und 9 haben, dann können wir das Ganze als Matrix **X** darstellen:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 8 & 17 \\ 5 & 23 \\ 2 & 15 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3)}$$

Wie man sieht, ist ein Vektor in gewisser Hinsicht ein Spezialfall einer Matrix: Eine Matrix, die nur eine Spalte hat (Spaltenvektor) bzw. nur eine Zeile (Zeilenvektor). Bestimmte Operationen und Begriffe gibt es aber nur für Vektoren; dies ist einer von mehreren Gründen dafür, daß es für Matrizen mit nur einer Spalte (oder nur einer Zeile) den speziellen Begriff des Vektors gibt.

1.2.3 Vorläufige Definition eines Skalars

Als <u>Skalare</u> werden einfache ("reelle") Zahlen bezeichnet.

Anmerkung: Es gibt Bücher, in denen Skalare als "Matrix aus einer Zeile und einer Spalte" bezeichnet werden. Das ist aber unzutreffend! Man kann z.B. - wie noch gezeigt wird - eine Matrix aus 3 Zeilen und 2 Spalten mit der Zahl 2 multiplizieren, aber nicht mit der aus einer Zeile und einer Spalte bestehenden Matrix

$$\boldsymbol{X} = [2] \qquad \textbf{(4)}$$

Die "normale" Algebra, die man etwa aus der Schule kennt und die mit Skalaren arbeitet, wird im Unterschied zur Vektor- und Matrix-Algebra auch skalare Algebra genannt.

1.2.4 Erweiterungsmöglichkeit der Definitionen

In den "vorläufigen Definitionen" der vorangehenden Abschnitte wurde davon ausgegangen, daß die

"Elemente" von Vektoren und Matrizen Zahlen sind. Das ist auch der häufigste Fall. Im Prinzip können aber auch andere Dinge in einer Matrix stehen.
Beispiel:

- Datenmatrix auf Nominalskalenniveau: Die Zeilen unserer Matrix sind Vpn, die Spalten stehen für die Variablen Familienstand und Geschlecht; dann erhalten wir z.B.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} vh & w \\ ld & m \\ gs & w \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5)}$$

Auch eine solche Tabelle wird manchmal als Matrix bezeichnet. Für die Rechenoperationen, die im folgenden zu behandeln sind, ist es aber am einfachsten, wenn man den Begriff der Matrix für Fälle reserviert, in denen die "Elemente" (also die "Tabelleneintragungen") Zahlen sind. Daher genügen für die folgende Darstellung der Grundbegriffe meistens die "vorläufigen Definitionen" der vorangehenden Abschnitte, und Erweiterungen werden jeweils im Kontext behandelt.

1.3 Weitere Definitionen und Darstellungs-Konventionen

Wenn in einer Formel ein Buchstabe vorkommt, muß zu erkennen sein, ob er für einen Skalar, einen Vektor oder eine Matrix steht. Man könnte dies jeweils bei der Definition eines Symbols (also der Bedeutung, die ein Buchstabe haben soll) tun. Besser ist es aber, bestimmte Regeln einzuhalten, z.B. daß fett gedruckte Großbuchstaben immer für eine Matrix stehen.
Es gibt einige solche Konventionen, die allgemein üblich sind und an die man sich auf jeden Fall halten sollte; andere werden unterschiedlich gehandhabt (z.B. weil nicht immer Fettdruck oder Kursivdruck als Möglichkeit der Abhebung zur Verfügung steht).
In diesem Abschnitt 1.3 sind die Definitionen und Konventionen, die als allgemein verbindlich zu betrachten sind, durch *Kursivdruck* hervorgehoben.

<u>Unterscheidung von Skalaren, Vektoren und Matrizen</u>: Soweit nicht im jeweiligen Kontext anders festgelegt, werden Skalare durch nicht-fette Kleinbuchstaben, Vektoren durch fette Kleinbuchstaben und Matrizen durch fette Großbuchstaben gekennzeichnet. Die Buchstaben a, **b** und **X** stehen also (in dieser Reihenfolge) für einen Skalar, einen Vektor und eine Matrix. - Meistens werden lateinische Buchstaben verwendet, gelegentlich aber auch griechische.

> Anmerkung: Da ein Vektor auch als Matrix (mit nur einer Spalte bzw. Zeile) betrachtet werden kann, gilt genauer: Fette Großbuchstaben können auch für Vektoren stehen. Fette Kleinbuchstaben für Vektoren werden verwendet, wenn eine Aussage (vorläufig oder endgültig) nur für Vektoren gelten soll. - Soweit im jeweiligen Kontext nichts anderes festgelegt wird, bezeichnet ein fetter Kleinbuchstabe einen Spaltenvektor; Zeilenvektoren haben hinter dem Buchstaben einen hochgestellten Strich (vgl. dazu Abschnitt 2.1).

Als <u>Multiplikationszeichen</u> wird in der vorliegenden Darstellung der Stern ("*") verwendet.

Definition: *Die <u>Dimension eines Vektors</u> ist die Zahl seiner Elemente.*

> Begründung: Vektoren werden u.a. verwendet, um Punkte in einem mehrdimensionalen Raum zu beschreiben; die einzelnen Elemente sind dann die Werte auf den Achsen eines "cartesischen Koordinatensystems". In einem 2-dimensionalen Raum (einer Ebene) braucht man dazu 2 Koordinaten, in einem 3-dimensionalen 3 Koordinaten; und für die Mathematik ist es - anders als

für unsere Anschauung - kein Problem, auch in noch höher-dimensionalen Räumen zu denken. Immer braucht man für jede Dimension eine Koordinate.

Die Elemente eines Vektors werden durch einen einfachen Index voneinander unterschieden. Da in der vorliegenden Darstellung davon ausgegangen wird, daß die Elemente von Vektoren Zahlen (Skalare) sind, werden die Elemente eines Vektors (z.B. des Vektors **x**) mit nicht-fetten Kleinbuchstaben mit einfachem Index, also als x_1, x_2 usw. bezeichnet. *In aller Regel wird also für das Element derselbe Buchstabe wie für den Vektor verwendet, jedoch mit Index* und nicht-fett.

Definition: *Der Typ oder die Ordnung einer Matrix* ist die Angabe der Zeilen- und Spalten-Zahl, die (in dieser Reihenfolge!) mit einem "Multiplikations-Kreuz" × verbunden werden.

Hat eine Matrix also n Zeilen und m Spalten, dann ist ihr Typ bzw. ihre Ordnung n×m.

Die Elemente einer Matrix werden durch einen doppelten Index voneinander unterschieden. Der erste Index bezeichnet die Zeile, der zweite die Spalte. Beispiel: x_{32} *ist das Element der 3. Zeile und der 2. Spalte.*

Da in der vorliegenden Darstellung davon ausgegangen wird, daß die Elemente der Matrix Zahlen (Skalare) sind, *wird bei der Angabe eines Elements derselbe Buchstabe wie für die Matrix verwendet*, jedoch klein, *mit Doppel-Index* und nicht-fett.

Eine quadratische Matrix liegt vor, wenn Zeilenzahl und Spaltenzahl übereinstimmen.

Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix ist die Diagonale, in der Spalten- und Zeilenindex übereinstimmen, also die Diagonale von links oben nach rechts unten.

Wenn man einfach von "der Diagonalen" einer quadratischen Matrix spricht, ist ebenfalls die Hauptdiagonale gemeint.

Eine quadratische Matrix heißt nur dann symmetrisch, wenn sie symmetrisch zur Hauptdiagonalen ist, wenn also für jedes i und j $x_{ij}=x_{ji}$ ist.

Eine Diagonalmatrix ist eine quadratische Matrix, in der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen 0 sind, wie z.B. die folgende:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Wie man an diesem Beispiel sieht, können bei einer Diagonalmatrix auch Elemente der Hauptdiagonalen 0 sein. Worauf es ankommt, ist, daß alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen 0 sind.

Dimension/Ordnung und Indices für Versuchspersonen und Variablen

Da es in der vorliegenden Darstellung vor allem um Matrixalgebra für multivariate Statistik geht, sollen weitere Konventionen für die Bezugnahme auf Vpn (allgemein: "Fälle", "Beobachtungseinheiten")

eingeführt werden.
Um mit den obigen Regeln konsistent zu sein, wird die Stichprobengröße (die ja ein Skalar ist) mit dem Kleinbuchstaben n gekennzeichnet. Werden mehrere Variablen pro Vp erhoben, dann ist m die Zahl der Variablen.
Als "laufender Index" über Vpn wird i verwendet; als "laufender Index" über Variablen j. $\sum_i$ steht also für "Summe über alle Vpn" (wobei i von 1 bis n läuft), und bei $\sum_j$ (der Summe über alle Variablen) läuft j von 1 bis m.

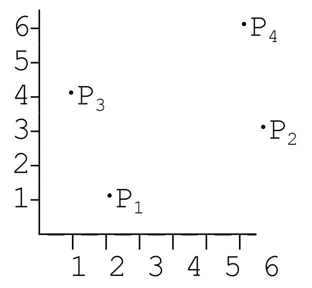
Daten-Matrizen werden so wie in dem Beispiel aus Abschnitt 1.2.2 dargestellt: Die Zeilen sind Vpn, die Spalten Variablen. x_{ij} ist also der Meßwert der Vp i in Variable j.

Die Indices i und j für Zeilen und Spalten sowie die Buchstaben n und m für die Zahl der Zeilen und der Spalten werden aber auch sonst verwendet, wenn allgemein von Matrizen die Rede ist.

In Situationen, in denen in einem Doppelindex beide Indices für Variablen stehen (z.B. bei der Korrelation zweier Variablen), wird für die eine j und für die andere das Symbol j' verwendet. $r_{jj'}$ ist also die Korrelation der Variablen j mit der Variablen j'.

1.4 Geometrische Interpretation von Vektoren und Matrizen

Wie bereits bei der Definition der Dimension eines Vektors in Abschnitt 1.3 erwähnt wurde, werden Vektoren u.a. verwendet, um Punkte in einem mehrdimensionalen Raum zu beschreiben; die einzelnen Elemente sind dann die Werte auf den Achsen eines "cartesischen Koordinatensystems".
Es gibt aber auch einen allgemeineren Begriff des Vektors in der Geometrie des mehrdimensionalen Raums: Ein (geometrischer) Vektor ist eine Verbindunglinie von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 (die häufig als Pfeil dargestellt wird). Dann gibt der (algebraische) Vektor (also die 'Ansammlung von Zahlen') an, welche Werte man zu den einzelnen Koordinaten von P_1 addieren muß, um zum Punkt P_2 zu kommen.
Noch genauer ist ein solcher "geometrischer Vektor" nur durch Länge und Richtung der Verbindungslinie definiert. In der folgenden Abbildung haben z.B. die Verbindungslinien von P_1 nach P_2 und die von P_3 nach P_4 dieselbe Länge und dieselbe Richtung; also stellen beide Verbindunglinien denselben Vektor dar:



In Zahlen drückt sich das so aus, daß in beiden Fällen bei der Abszisse die Zahl 4 und bei der Ordinate die Zahl 2 addiert wird, um vom einen Punkt zum anderen zu kommen. Daher sind beide Verbindungslinien Darstellungen des Vektors

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7)}$$

Bei der geometrischen Interpretation von Matrizen kann man beispielsweise die Spalten als verschiedene Vektoren auffassen, die aus irgendeinem Grund zusammengehören.

Beispiel: Im 3-dimensionalen Raum spannen 2 Vektoren meistens eine Ebene auf. (Genauer: Dann, wenn sie "linear unabhängig" sind; vgl. zu diesem Begriff Abschnitt 2.3.3). Die Spalten der Beispielmatrix aus Gleichung **(3)** könnten 2 solche Vektoren sein, die eine Ebene aufspannen.

2 Vektor- und Matrix-Operationen

2.1 Transposition

Definition: Die Transposition einer Matrix besteht darin, daß aus den Zeilen Spalten und aus den Spalten Zeilen werden. ("Spiegelung" an der von links oben nach rechts unten verlaufenden "Winkelhalbierenden").

Die Matrix, die sich durch Transposition ergibt, wird durch Anfügen eines hochgestellten Strichs an das Symbol der Ausgangs-Matrix bezeichnet.

Beispiel:

$$\mathit{Für} \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 8 & 17 \\ 5 & 23 \\ 2 & 15 \end{bmatrix} \quad \mathit{ist} \quad \boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 17 & 23 & 15 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8)}$$

Insbesondere entsteht also durch Transposition eines Spaltenvektors **x** der Zeilenvektor **x'**.

2.2 Matrizen-Addition und -Subtraktion

Definition: Matrizen werden elementweise addiert und substrahiert.

Beispiel für Addition:

$$\begin{bmatrix} 8 & 17 \\ 5 & 23 \\ 2 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 12 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 17 & 30 \\ -2 & 21 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9)}$$

Beispiel für Subtraktion:

$$\begin{bmatrix} 8 & 17 \\ 5 & 23 \\ 2 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 12 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 \\ -7 & 16 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(10)}$$

Aus der Definition geht auch hervor, daß nur Matrizen gleichen Typs (also mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl) addiert oder subtrahiert werden können.

2.3 Matrizen-Multiplikation

Hinweis: Als Multiplikationszeichen wird im folgenden der Stern ('*') verwendet.
Das Multiplikationszeichen kann (wie üblich) auch weggelassen werden.

2.3.1 Multiplikation mit einem Skalar

Definition: Eine Matrix wird mit einem Skalar multiliziert, indem jedes Element mit dem Skalar multipliziert wird. Die Reihenfolge beider Faktoren ist beliebig.

Beispiel:

$$2 * \begin{bmatrix} 8 & 17 \\ 5 & 23 \\ 2 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 17 \\ 5 & 23 \\ 2 & 15 \end{bmatrix} * 2 = \begin{bmatrix} 16 & 34 \\ 10 & 46 \\ 4 & 30 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(11)}$$

2.3.2 Multiplikation zweier Matrizen

2.3.2.1 Demonstration anhand von Linearkombinationen in Datenmatrizen

Ein einfacher Fall der Multiplikation zweier Matrizen, an dem man sich den Sinn veranschaulichen kann, ist die <u>Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor</u>.
Beispiel: Die Meßwerte von 4 Vpn sind die Punktzahlen aus Fragebögen zum Neurotizismus (1. Spalte), Introversion (2. Spalte) und Angst (3. Spalte):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(12)}$$

Da (zumindest nach bestimmten Persönlichkeitstheorien, z.B. Eysenck) Depressivität positive Korrelationen mit Neurotizismus, Introversion und Angst hat, könnte man für jede Vp i aus ihren Meßwerten in den beiden Fragebögen einen Schätzwert für Depressivität etwa nach folgender Formel ermitteln:

$$\hat{Y}_i = x_{i1}*5 + x_{i2}*2 + x_{i3}*4 \tag{13}$$

In Matrix- und Vektoren-Schreibweise kann man die Anwendung dieser "Linearkombination" auf die Daten aller Vpn als eine einzige Operation darstellen, und zwar folgendermaßen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 58 \\ 59 \\ 91 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor erfolgt nämlich in der Weise, daß die Elemente jeder Zeile der Matrix mit dem entsprechenden Element des Spaltenvektors multipliziert und die Produkte aufsummiert werden, also z.B. für die 1. Zeile (= 1. Vp):

$$2 * 5 + 1 * 2 + 3 * 4 = 24 \tag{15}$$

Die Nummer der "Zeile" im Ergebnis-Vektor stimmt natürlich überein mit derjenigen Zeile der Datenmatrix, deren Elemente mit denen des Spaltenvektors multipliziert und aufsummiert wurde (und das war hier die erste).

Ähnlich kann man die gesamte Multiplikation der Matrix mit dem Spaltenvektor auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} *5 + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} *2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} *4 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 25 \\ 45 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 28 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 58 \\ 59 \\ 91 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Bezeichnet man in Gleichung **(14)** die Datenmatrix als **X** und den Spaltenvektor als **b** dann kann man auch sagen: Es wird eine Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix **X** gebildet; die Elemente des Spaltenvektors **b** sind die Gewichte, mit denen die verschiedenen Spalten der Matrix **X** multipliziert werden.
Offenbar funktioniert das Ganze nur, wenn der Spaltenvektor, mit dem die Matrix multipliziert wird, genau so viele Elemente hat, wie die Matrix Spalten hat (in unserem Fall also 3).

Für weitere Abschnitte wichtig ist eine präzise Definition des dabei verwendeten Begriffs einer Linearkombination:

Definition: Eine Linearkombination ist eine endliche (!) Summe, deren Summanden jeweils das Produkt eines Skalars und eines Vektors sind.

Natürlich müssen dazu alle Vektoren den gleichen Typ (Spalten- bzw. Zeilenvektor) und die gleiche Zahl von Elementen haben.

Um Regeln für Linearkombinationen richtig anzuwenden, die im folgenden behandelt werden, ist zu beachten, daß in der obigen Definition eine Summe mit nur einem Summanden ebenfalls mitgemeint ist. Das Produkt einems Skalars und eines Vektors ist also ebenfalls eine Linearkombination.

Den Übergang zur Multiplikation zweier Matrizen kann man sich am ehesten in der Weise veranschaulichen, daß aus den 3 Meßwerten jeder Vp noch eine weitere Linearkombination gebildet wird, z.B. mit den Gewichtszahlen 3, -1 und 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 11 \\ 58 & 14 \\ 59 & 26 \\ 91 & 36 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Man sieht an diesem Beispiel:
- Die beiden Sätze von Gewichtszahlen bilden die Spalten der zweiten Matrix, und in derselben Reihenfolge tauchen die Linearkombinationen als Spalten der Ergebnismatrix auf.
- Voraussetzung für die Möglichkeit einer Mutiplikation ist es, daß die 2. Matrix genau so viele Zeilen hat, wie die 1. Matrix Spalten hat.
- Im Unterschied zur Multiplikation von Skalaren ist die Reihenfolge der Matrizen, die miteinander zu multiplizieren sind, wichtig: In unserem Fall könnte nach Vertauschung der beiden Matrizen gar kein Produkt mehr gebildet werden; denn dann hätte die 1. Matrix 2 Spalten, die 2. aber 4 Zeilen. (Und auch wenn es vom Typ der Matrizen her keine Probleme gibt, ist nur in speziellen Fällen **A*B=B*A**

Bisher wurde die Matrizenmultiplikation so betrachtet, daß die Spalten der 2. Matrix Vektoren von Gewichtszahlen sind, mit denen Linearkombinationen der Spalten der 1. Matrix gebildet werden. Man kann die Betrachtungsweise aber auch umdrehen und die Zeilen der 1. Matrix als Gewichtszahlen ansehen, mit denen Linearkombinationen der Zeilen der 2. Matrix gebildet werden.
Wenn man etwa die 1. Zeile der 1. Matrix in Gleichung **(17)** als einen Zeilenvektor von Gewichtszahlen auffaßt, mit denen eine Linearkombination der Zeilen der 2. Matrix gebildet wird, dann kann man das - analog zu Gleichung **(16)** - auch folgendermaßen schreiben:

$$2*\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} + 1*\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} + 3*\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 11 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Das hiesige Ergebnis ist also die 1. Zeile der Ergebnismatrix von Gleichung **(17)**. Entsprechend kann man mit allen Zeilen der 1. Matrix von Gleichung **(17)** verfahren und kommt so jeweils zu einer Zeile der Ergebnismatrix.
Eine solche Betrachtungsweise macht bei unserer bisherigen Interpretation der Demonstrations-Matrizen keinen unmittelbaren Sinn, wohl aber in anderen Zusammenhängen.

Die Multiplikation von Matrizen wird zwar nicht nur zur Bildung von Linearkombinationen in Datenmatrizen verwendet; sie verläuft aber in anderen Fällen geanu so, wie an den Beispielen dieses Abschnitts demonstriert. Eine formale Definition erfolgt in den folgenden Abschnitten über den Begriff des inneren Produkts von Vektoren.

2.3.2.2 Das innere Produkt von Vektoren

Definition: Haben 2 Vektoren die gleiche Dimension, dann wird das <u>innere Produkt</u> dieser Vektoren gebildet, indem die zueinander gehörenden Elemente (also die Elemente mit gleichem Index) miteinander multipliziert und diese Produkte addiert werden.
Man spricht daher auch vom <u>Skalarprodukt</u> der Vektoren; denn offenbar ist das Ergebnis ein Skalar.

Das innere Produkt von Vektoren mit ungleicher Dimension ist nicht definiert.

Eine Annäherung an die Bildung eines inneren Produkts ergibt sich bei der Bildung der 1. "Linearkombination" für die 1. Vp:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

> Eine "Feinheit": Das Ergebnis dieser Multiplikation ist eine 1×1-Matrix und kein Skalar (was ja ein Unterschied ist, s.o. Abschnitt 1.2.3). Rechnerisch wird das innere Produkt aber genau so gebildet, als ob man eine Matrix mit nur einer Zeile mit einer anderen Matrix multipliziert, die nur eine Spalte hat.
>
> Neben dem "inneren Produkt" gibt es auch das "äußere Produkt" zweier Vektoren, das aber erst später definiert wird (Abschnitt 2.3.2.4.2).

2.3.2.3 Definition der Multiplikation zweier Matrizen

*Definition: Bei der Multiplikation zweier Matrizen (z.B. **X*Y**) muß die Spaltenzahl der ersten mit der Zeilenzahl der zweiten übereinstimmen. Die Ergebnismatrix hat so viel Zeilen wie die erste und soviel Spalten wie die zweite der multiplizierten Matrizen. Das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte ist das innere Produkt des i-ten Zeilenvektors der ersten multiplizierten Matrix und des j-ten Spaltenvektors der zweiten.*

Aus der Definition ergibt sich, daß bei der Matrizenmultiplikation - anders als bei Skalaren - die Reihenfolge der Faktoren von Bedeutung ist: Die Multiplikation **X*Y** führt meistens zu einem anderen Ergebnis, als **Y*X** (vgl. auch das Beispiel in Abschnitt 2.3.2.1 und die dortigen Hinweise). Die Matrizenmultiplikation ist also nicht "kommutativ".

Da somit derselbe Faktor (die Matrix **Y**) unterschiedliche Auswirkungen hat, je nachdem er vor oder hinter **X** steht, sagt man auch: Die Matrix **X** wird mit **Y** <u>postmultipliziert</u> (beim Produkt **X*Y**) bzw. <u>prämultipliziert</u> (bei **Y*X**).

2.3.2.4 Wichtige Spezialfälle

2.3.2.4.1 Orthogonalität und Länge von Vektoren

Definition: Zwei Vektoren sind zueinander othogonal, wenn ihr inneres Produkt 0 ist.

Begründung: Interpretieren wir die Vektoren als geometrische Vektoren (vgl. Abschnitt 1.4), dann ist das innere Produkt zweier Vektoren, die - im geometrischen Sinn - senkrecht ("orthogonal") aufeinander stehen, 0.

Definition: Die Länge eines Vektors erhält man, indem man die Summe seiner quadrierten Elemente (also sein inneres Produkt mit sich selbst) bildet und daraus die Quadratwurzel zieht.

Als Symbol für die Länge eines Vektors **a** wird üblicherweise $|\mathbf{a}|$ verwendet. Dann lautet die Definition der Länge als Formel:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots} \qquad \textbf{(20)}$$

Hinweis: Bei geometrischer Interpretation von Vektoren ergibt sich diese Formel für die Länge aus dem Satz des "Pythagoras" (den man auf mehr als 2 Dimensionen verallgemeinern kann).

2.3.2.4.2 Das äußere Produkt zweier Vektoren

Definition: Das äußere Produkt zweier Vektoren ergibt sich, indem eine Matrizenmultiplikation durchgeführt wird, bei der der erste Vektor als Spaltenvektor und der zweite als Zeilenvektor behandelt wird:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & -7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -35 & 45 \\ -6 & 21 & -27 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(21)}$$

Man sieht an diesem Beispiel: Im Unterschied zum inneren Produkt brauchen beim äußeren Produkt die Dimensionen der Vektoren nicht übereinzustimmen.

2.3.2.4.3 Selektions-Vektoren, Einheitsmatrizen und Diagonalmatrizen

Meistens ist das Ergebnis einer Matrizenmultiplikation nur mit einiger Rechnerei zu ermitteln. Es gibt aber einige Sonderfälle, bei denen das Ergebnis sofort vorhersehbar ist; und diese zu kennen, ist nicht nur zur Rechen-Vereinfachung hilfreich, sondern auch, um weitere Definitionen und Gesetze zu verstehen.

Am ehesten sind diese Sonderfälle zu verstehen, wenn man im Sinne von Abschnitt 2.3.2.1, Gleichung **(16)** die Postmultiplikation einer (Daten-)Matrix **X** mit einem Spaltenvektor **b** so betrachtet, daß eine Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix **X** gebildet wird, wobei die Elemente des Vektors **b** die Gewichte für die einzelnen Spaltenvektoren sind. Bilden wir beispielsweise das Produkt

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(22)}$$

D.h.: Die ersten beiden Spalten erhalten das Gewicht 0 und die letzte das Gewicht 1; es wird also die 3. Spalte herausgezogen.

Bei der Postmultiplikation einer Matrix **X** mit einem solchen Spaltenvektor **b**, bei dem ein Element 1 ist und alle übrigen 0 sind, wird also die Spalte von **X** "selegiert", die zu dem Element gehört, das den Wert 1 hat. Ein solcher Vektor wird daher im folgenden auch <u>Selektionsvektor</u> genannt. (Keine allgemein eingeführte Bezeichnung!)

Die Postmultiplikation einer (Daten-)Matrix **X** mit einer Matrix **B**, deren Spalten ("Gewichte der Linearkombinationen") Selektionsvektoren sind, demonstriert das folgende Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 9 & 7 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(23)}$$

Bezeichnet man die Ergebnismatrix als **Y**, dann kann man das Ganze folgendermaßen betrachten: Der erste Spaltenvektor von **B** selegiert - wie bei Gleichung **(22)** - die 3. Spalte von **X**; also ist die 1. Spalte von **Y** (die ja aufgrund der Gewichte aus der 1. Spalte von **B** gebildet wird!) identisch mit der 3. Spalte von **X**. Ähnlich selegiert die 2. Spalte von **B** die 1. Spalte von **X** usw.

Allgemein: Bei der Postmultiplikation einer Matrix **X** mit einer Matrix **B**, deren Spaltenvektoren Selektionsvektoren sind, besteht die Ergebnismatrix aus Spaltenvektoren von **X**. Insbesondere kann - wie in Gleichung **(23)** - eine Vertauschung der Spalten einer Matrix **X** durch Postmultiplikation mit einer quadratischen Matrix **B** erreicht werden, die alle Selektionsvektoren der Dimension enthält, welche durch die Spaltenzahl von **X** vorgegeben ist (im Beispiel der Gleichung **(23)** also alle Selktionsvektoren der Dimension 3).

Ein spezieller Fall entsteht, wenn sämtliche Selektionsvektoren "in aufsteigender Reihenfolge" auftauchen, wenn wir also die (Daten-) Matrix **X** mit einer Diagonalmatrix multiplizieren, die lauter Einsen in der Hauptdiagonalen hat:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(24)}$$

Hier wird die Matrix **X** exakt reproduziert, wie bei der Multiplikation eines Skalars mit der Zahl 1.

Wegen dieser besonderen Bedeutung hat eine solche Matrix einen eigenen Namen:

Definition: Als Einheitsmatrix wird eine Diagonalmatrix bezeichnet, deren Hauptdiagonale lauter Einsen enthält.

Als Symbol für eine Einheitsmatrix wird in der vorliegenden Darstellung **E** verwendet, und wenn ausdrücklich die Zeilen- und Spaltenzahl (z.B. m) angeben werden soll, erfolgt dies durch einen einfachen Index (also $\mathbf{E_m}$).

Hinweis: In manchen Büchern wird **I** bzw. $\mathbf{I_m}$ für "Identitätsmatrix" geschrieben, weil durch Multiplikation einer Matrix **X** mit einer solchen Matrix die Matrix **X** identisch reproduziert wird.

Die Postmultiplikation einer Matrix **X** mit einer Diagonalmatrix **B**, die keine Einheitsmatrix ist, veranschaulich das folgende Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 12 \\ 12 & -14 & 24 \\ 15 & -6 & 28 \\ 27 & -14 & 32 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Die 1. Spalte der Ergebnismatrix beruht auf der 1. Spalte von **B**: Der 1. Spaltenvektor von **X** wird selegiert und außerdem mit 3 multipliziert. Entsprechend bei den übrigen Spalten.

*Regel: Die Postmultiplikation einer Matrix **X** mit einer Diagonalmatrix **B** bewirkt, daß die Spalten von **X** mit den entsprechenden Elementen der Diagonalen von **B** multipliziert werden.*

Die "Sonderfälle" Selektionsvektor, Einheitsmatrix und Diagonalmatrix wurden bisher für Situationen betrachtet, in denen sie in einer Matrix **B** (oder einem Spaltenvektor **b**) auftauchen, mit der/dem eine andere Matrix postmultipliziert wird. Mit der im Zusammenhang mit Gleichung **(18)** behandelten Umkehrung der Betrachtungsweise lassen die Ergebnisse sich aber auch auf Situationen anwenden, in denen eine Matrix (z.B. **X**) mit einer Matrix **B** (oder einem Zeilenvektor **b**) prämultipliziert wird, wobei die Sonderfälle in **B** bzw. **b** vorliegen. Man muß nur konsequent von Zeilen sprechen, wo bisher von Spalten die Rede war, und umgekehrt. Übungsaufgabe: Durchführen!

2.3.2.4.4 Orthogonale Matrizen

*Definition: Eine quadratischen Matrix **A** heißt orthogonal, wenn ihre Spaltenvektoren zueinander orthogonal sind und die Länge 1 haben*, wenn also gilt:

$$A * A' = E \tag{26}$$

Hinweise:

- Zu den Begriffen der Orthogonalität und der Länge von Vektoren vgl. Abschnitt 2.3.2.4.1
- Daß die obige Gleichung genau dann erfüllt ist, wenn die Spaltenvektoren zueinander orthogonal sind und die Länge 1 haben, ist leicht zu beweisen. ("Übungsaufgabe für Interessierte".)
- Weitere Begriffe, die mit dem einer orthogonalen Matrix verwandt sind, werden bei

Moosbrugger (1978, S. 36) definiert.

2.3.2.5 Einige Regeln im Zusammenhang der Matrizenmultiplikation

Für die Multiplikation von 2 Matrizen gilt zwar nicht die sonst bekannte Vertauschbarkeit der Faktoren; andere aus der skalaren Algebra bekannte Additions- und Multiplikations-Regeln sind aber sinngemäß übertragbar. Sie werden hier nur aufgeführt; man sieht ihren Sinn am ehesten, indem man Beispiele bildet und durchrechnet.

Assoziativ-Gesetze:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$$
$$(\mathbf{A}*\mathbf{B}) * \mathbf{C} = \mathbf{A} * (\mathbf{B}*\mathbf{C}) = \mathbf{A}*\mathbf{B}*\mathbf{C}$$
$$(\mathbf{A}*c) * \mathbf{B} = \mathbf{A} * (c*\mathbf{B}) = c*\mathbf{A}*\mathbf{B}$$

Distributivgesetze ("Ausklammern"):

$$\mathbf{C}*\mathbf{A} + \mathbf{C}*\mathbf{B} = \mathbf{C} * (\mathbf{A}+\mathbf{B})$$
$$c*\mathbf{A} + c*\mathbf{B} = c * (\mathbf{A}+\mathbf{B})$$
$$\mathbf{A}*\mathbf{C} + \mathbf{B}*\mathbf{C} = (\mathbf{A}+\mathbf{B}) * \mathbf{C}$$
$$\mathbf{A}*c + \mathbf{B}*c = (\mathbf{A}+\mathbf{B}) * c$$

Für ein weiteres Gesetz gibt es keine Parallelle in der skalaren Algebra. Es geht um die Transposition eines Produkts:

$$(A*B)' = B'*A' \tag{27}$$

Was das bedeutet, sieht man z.B., wenn man die beiden Matrizen, die in Gleichung **(17)** miteinander multipliziert werden, als **A** und **B** bezeichnet. Dann besagt die obige Gleichung **(27)**: Wenn wir das Produkt **A*B** - also die Ergebnismatrix in Gleichung **(17)** - transponieren, erhalten wir dasselbe, wie wenn wir die beiden miteinander multiplizierten Matrizen **A** und **B** vertauschen <u>und</u> sie beide transponieren; also:

$$\begin{bmatrix} 24 & 58 & 59 & 91 \\ 11 & 14 & 26 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Daß dies zutrifft, erkennt man leicht, indem man es nachrechnet. Wenn man auch Gleichung **(17)** nachrechnet und beide Berechnungen miteinander vergleicht, sieht man vielleicht sogar besser als mit einem formalen mathematischen Beweis, warum Gleichung **(27)** nicht nur hier, sondern allgemein gilt.

2.3.3 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit; Rang einer Matrix

Für viele Fragen der multivariaten Statistik ist es von Wichtigkeit, ob in den Spalten (oder Zeilen) einer Matrix eine Abhängigkeit in der Weise besteht, daß eine Spalte als Linearkombination der übrigen Spalten darstellbar ist (bzw. eine Zeile als Linearkombination der übrigen Zeilen; beides läuft auf dasselbe hinaus, wie noch gezeigt wird).
Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 24 \\ 4 & 7 & 6 & 58 \\ 5 & 3 & 7 & 59 \\ 9 & 7 & 8 & 91 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(29)}$$

Bei dieser Matrix ist die 4. Spalte eine Linearkombination der 3 übrigen; sie ist nämlich in der Weise gebildet, daß die Ergebnisspalte der in Gleichung **(14)** angegebenen Linearkombination der Ausgangsmatrix als 4. Spalte hinzugefügt wurde.
An dieser Matrix kann man auch eine Regel demonstrieren (die sich natürlich auch mathematisch beweisen läßt):

Regel: Läßt sich eine Spalte einer quadratischen Matrix als Linearkombination der übrigen Spalten darstellen, dann läßt sich auch eine Zeile als Linearkombination der übrigen darstellen.

In der obigen Matrix gilt z.B. für die letze Zeile:

$$\lfloor 9 \;\; 7 \;\; 8 \;\; 91 \rfloor = (-21.8) * \lfloor 2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 24 \rfloor + (-0.6) * \lfloor 4 \;\; 7 \;\; 6 \;\; 58 \rfloor + 11.0 * \lfloor 5 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 59 \rfloor \qquad \textbf{(30)}$$

Der Begriff der linearen Abhängigkeit von Vektoren ist aber nicht nur auf die Spalten- und Zeilenvektoren einer Matrix anwendbar, sondern allgemein auf (endliche oder auch unendliche) Mengen von Vektoren. In diesem Sinn ist es auch zu verstehen, wenn in der folgenden Definition von "mehreren Vektoren" gesprochen wird.

Definition: Ist von mehreren Vektoren einer als Linearkombination der übrigen darstellbar, dann sind diese Vektoren <u>linear abhängig</u>, anderenfalls <u>linear unabhängig</u>.

Definition: Eine quadratische Matrix, bei der eine Spalte/Zeile als Linearkombination der übrigen darstellbar ist, nennt man <u>singulär</u>.

Hinweise:

- Sind an der Darstellung einer Spalte/Zeile als Linearkombination nicht alle übrigen, sondern nur einige beteiligt, kann man den übrigen das Gewicht 0 geben, und damit ist die Spalte/Zeile auch als Linearkombination der (=aller) übrigen darstellbar. Geht es allerding um lineare Abhängigkeit in einer unendlichen Menge von Vektoren, dann ist zu beachten, daß Linearkombinationen immer endliche Summen sind. Aber damit ist dann auch klar, daß es sich bei einer "Linearkombination der übrigen Vektoren" nur um eine Linearkombionation einiger der übrigen Vektoren handeln kann.
- Eine quadratische Matrix ist insbesondere auch dann singulär, wenn eine Spalte oder eine Zeile

nur Nullen als Elemente enthält; dann können wir nämlich eine Linearkombination der übrigen bilden, bei der alle Gewichtszahlen der Linearkombination 0 sind.

- In der multivariaten Statistik kommt lineare Abhängigkeit vor allem dann vor, wenn eine Variable eine Linearkombination der übrigen ist. Außerdem sind die Interkorrelationsmatrix und die Varianz-Kovarianzmatrix auch dann singulär, wenn die Zahl der Vpn nicht größer als die Zahl der Variablen ist.

In einigen Lehrbüchern findet man auch andere Definitionen, die mathematisch äquivalent, aber beachtenswert sind, weil sie in einigen Anwendungen handlicher sind. Bei der obigen Definition gab es eine Rollentrennung zwischen dem Vektor, der als Linearkombination dargestellt wird, und den anderen, die in die Linearkombination eingehen. Dies Rollentrennung ist aber willkürlich, denn die Rollen lassen sich vertauschen. Bezeichnet man in der Matrix **(29)** die Spaltenvektoren als $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ und $\mathbf{x}_4$, dann läßt sich die bisher behandelte Abhängigkeit in der Gleichung $\mathbf{x}_4 = 5\ \mathbf{x}_1 + 2\ \mathbf{x}_2 + 4\ \mathbf{x}_3$ ausdrücken. Diese Gleichung kann man aber nach jedem der anderen Vektoren auflösen und erhält eine Darstellung dieses Vektors als Linearkombination der übrigen. Eine solche künstliche Rollentrennung entfällt, wenn man denselben Sachverhalt dadurch ausdrückt, daß das Ergebnis der Linearkombination $5\ \mathbf{x}_1 + 2\ \mathbf{x}_2 + 4\ \mathbf{x}_3 + (-1)\ \mathbf{x}_4$ der Nullvektor ist (also ein Vektor, dessen sämtliche Elemente 0 sind). Auf dieser Überlegung beruht die folgende

Alternativ-Definition: Vektoren sind linear abhängig, wenn sich aus ihnen eine Linearkombination bilden läßt, deren Ergebnis der Nullvektor ist, wobei in der Linearkombination kein Vektor mehrfach auftaucht und mindestens eine Gewichtszahl von 0 verschieden ist.

Hinweis: Die Zusatzbedingungen sind erforderlich, weil man eine Linearkombination mit dem Nullvektor als Ergebnisvektor natürlich immer bilden kann, indem man nur die Gewichtszahl 0 verwendet. Oder man läßt dieselben Vektoren mehrfach in die Linearkombination eingehen und wählt die Gewichtszahlen so, daß sie sich für den gleichen Vektor jeweils zu 0 addieren.

Von Bedeutung in diesem Zusammenhang ist auch das Konzept des Rangs einer Matrix. Die Matrix aus Gleichung **(29)** hat beispielsweise den Rang 3; denn sie enthält maximal 3 linear unabhängige Vektoren.

Genauer: Betrachten wir nur den 1., 2. und 3. Spaltenvektor, dann sind diese untereinander linear unabhängig; aber auch wenn wir z.B. den 1., 2. und 4. nehmen. Und ebenso gibt es verschiedene Kombinationen von 3 Zeilen, die linear unabhängig sind.

Regel: Die größte Anzahl linear unabhängiger Spalten einer Matrix stimmt mit der größten Anzahl linear unabhängiger Zeilen überein. Diese Anzahl ist definitionsgemäß der <u>Rang</u> der Matrix.

Dies gilt auch für nicht-quadratische Matrizen.

Man kann sich die Feststellung des Rangs einer Matrix auch so vorstellen, daß man möglichst wenige Zeilen und Spalten streicht, um zu einer nicht-singulären quadratischen "Untermatrix" zu kommen. Deren Zeilen- und Spaltenzahl ist dann der Rang der Matrix. In der Beispielmatrix aus Gleichung **(29)** kommt man z.B. zu einer nicht-singulären quadratischen Matrix, wenn man die 4. Spalte und die 4. Zeile streicht (oder auch die 2. Spalte und die 3. Zeile). Es gibt also mehrere "maximale nicht-singuläre quadratische Untermatrizen"; jede davon hat 3 Zeilen und 3 Spalten; also ist der Rang der Matrix, von der wir ausgegangen sind, 3.

Bei einer quadratischen Matrix kann der Rang der Matrix natürlich nicht höher sein als die Zahl der Zeilen und Spalten; und auch dieser wird nur erreicht, wenn die Matrix nicht-singulär ist. Daher nennt man eine nicht-singuläre quadratische Matrix auch eine "Matrix mit vollem Rang".

2.4 Statt Division: Die Inversion einer Matrix

2.4.1 Definition der Inversen einer Matrix

In der skalaren Algebra gibt es den Begriff des Kehrwerts einer Zahl: Existiert zu einer Zahl x eine Zahl y, so daß für das Produkt die Gleichung $x*y=1$ gilt, dann ist y der Kehrwert von x. (Z.B. ist 0.8 der Kerhwert von 1.25.) Bekanntlich gibt es einen solchen Kehrwert zu allen reellen Zahlen außer der Zahl 0.
Im Grunde könnte man sich die Division als besondere Operation in der skalaren Algebra auch sparen: Statt durch x zu dividieren, kann man mit dem Kehrwert von x multiplizieren.
Dieser Weg wird in der Matrixalgebra gegangen: Dem Begriff des Kehrwerts entspricht die "Inverse" einer Matrix. Er ist allerdings nur für quadratische Matrizen definiert. Und da die Einheitsmatrix in der Matrizenmultiplikation eine ähnliche Funktion hat wie die Zahl 1 in der Multiplikation von Skalaren, lautet die

*Definition: Existiert zu einer quadratischen Matrix **X** eine Matrix **Y**, so daß das Produkt **X*Y** eine Einheitsmatrix ergibt, dann ist die Matrix **Y** die inverse Matrix zu **X** oder auch einfach die Inverse von **X**.*

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0.4 & 2.0 & -1.8 \\ -0.2 & 0.0 & 0.6 \\ 0.6 & -1.0 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(31)}$$

Die zweite dieser Matrizen ist also die Inverse der ersten.

Die Analogie zum Konzept des Kehrwerts in der skalaren Algebra geht noch weiter: Genau so, wie man für "Kehrwert von x" auch x^{-1} schreiben kann, schreibt man in der Matrixalgebra für die Inverse der Matrix **X** auch $\mathbf{X}^{-1}$.

> Hinweis: Die Inverse einer Matrix ist damit definiert, aber es ist noch kein Verfahren ("Algorithmus") angegeben, wie man zu einer Matrix ihre Inverse bildet. Es gibt verschiedene solche Verfahren; eines ist z.B. bei Moosbrugger (1978, S. 31) beschrieben; es setzt allerdings den Begriff der Determinanten (der hier erst in Abschnitt 2.5 eingeführt wird) sowie weitere daraus abgeleitete Begriffe voraus.

In einem weiteren Punkt besteht gleichzeitig Parallellität und Unterschiedlichkeit zum Konzept des Kehrwerts: So, wie es keinen Kehrwert für die Zahl 0 gibt, gibt es auch quadratische Matrizen, zu denen es keine Inverse gibt. Aber das sind viele, nämlich alle singulären Matrizen. Präziser können wir sagen:

Regel: Eine quadratische Matrix besitzt eine Inverse genau dann, wenn sie nicht singulär ist, wenn also die Spaltenvektoren untereinander und die Zeilenvektoren untereinander linear unabhängig sind.

Bisher wurde die Inverse von **X** als die Matrix definiert, mit der man **X** postmultiplizieren muß, um als Ergebnis eine Einheitsmatrix zu erhalten. Wir hätten aber ebenso von einer Prämultiplikation ausgehen können; es gilt nämlich die

*Regel: Ist das Produkt **X*Y** zweier quadratischer Matrizen eine Einheitsmatrix, dann ist auch **Y*X** eine Einheitsmatrix.*

2.4.2 Regeln zur Matrizeniversion

Sind **A** und **B** quadratische Matrizen (gleicher Ordnung!) und c ein Skalar, dann gilt:

$$(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$$

$$(c*\mathbf{A})^{-1} = (1/c) * \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}*\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} * \mathbf{A}^{-1}$$

2.5 Determinanten

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist ein Skalar, der sich aus einer Matrix nach verschiedenen Regeln berechnen läßt. Es ist nicht einfach, diesem Begriff eine anschauliche Bedeutung zu geben.

Am ehesten: Interpretiert man die Spalten einer quadratischen Matrix als Punkte in einem mehrdimensionalen Raum, die alle miteinander und mit dem Nullpunkt verbunden sind, dann hat die Determinante mit dem Volumen des von diesen Linien gebildeten Körpers zu tun. Genaueres z.B. bei Moosbrugger (1978, S. 30).

Für die multivariate Statistik hat die Determinante vor allem die Funktion einer "Hilfsgröße" für die Berechnung von anderem, das eine eigenständige Bedeutung hat.

Insoweit erinnert sie etwas an die Kovarianz, die ja auch weniger als eigenständige Kennziffer von Bedeutung ist, sondern um anderes daraus zu berechnen, z.B. die Produkt-Moment-Korrelation.

Zur Schreibweise: Ist **X** eine quadratische Matrix, dann wird die zugehörige Determinante mit $|\mathbf{X}|$ bezeichnet. Wird die Matrix elementweise ("als Tabelle") dargestellt (also in eckige Klammern eingeschlossen), dann werden für die Determinante die eckigen Klammern durch senkrechte Striche ersetzt.
Beispiel: Die Determinante der ersten Matrix aus Gleichung **(31)** wäre also als

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(32)}$$

zu schreiben.
An diesem Beispiel läßt sich auch eine einfache Berechnungsweise demonstrieren; die Determinante ist nämlich

$$3*5*2 + 2*4*6 + 1*7*3 \ - \ 6*5*1 - 2*7*2 - 3*4*3 = 5$$

System (nur für 3-reihige Determinanten anwendbar!): Das erste Produkt ist aus den Elementen der Hauptdiagonalen "von oben links nach unten rechts" gebildet. Für das zweite Produkt beginnen wir mit dem 1. Element der 2. Zeile und bewegen uns ebenfalls nach unten rechts - und wenn wir (nach der 4) an der unteren Grenze ankommen, fangen wir für die nächste Spalte wieder oben an (mit der 6 aus der 3. Spalte). Dasselbe wiederholen wir noch einmal entsprechend, beginnend mit dem 1. Element der letzten Zeile. Auf diese Weise entstehen die Produkte mit positivem Vorzeichen. Dann wiederholen wir dasselbe "von oben rechts nach unten links"; die Produkte erhalten aber ein negatives Vorzeichen.

Für ein allgemein anwendbares Berechnungsverfahren und einige Rechenregeln vgl. Moosbrugger (1978, S. 29f).

Es gibt noch einen wichtigen Zusammenhang: Die Determinante einer Matrix ist genau dann 0, wenn sie singulär ist, wenn also mindestens eine Spalte/Zeile sich als Linearkombination der übrigen darstellen läßt.

2.6 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

2.6.1 Definition von Eigenwert und Eigenvektor

Was Eigenvektoren und Eigenwerte sind, läßt sich am folgenden Beispiel demonstrieren:

$$\begin{bmatrix} 54 & 8 & -14 \\ 8 & 27 & -2 \\ -14 & -2 & 34 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 63 * \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 63 \\ -126 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(33)}$$

Bezeichnen wir die Matrix am Anfang mit **A**, den Vektor, mit dem sie multipliziert wird, als **x** und die Zahl (den Skalar) 63 als λ, dann können wir die Besonderheit folgendermaßen beschreiben: Zu der Matrix **A** gibt es einen Vektor **x** und einen Skalar λ mit der Eigenschaft, daß das Produkt **A*x** gleich dem Produkt λ***x** ist.
Offenbar gilt dies nur für ganz bestimmte Vektoren und Skalare, die insofern eine besondere Beziehung zu der Matrix haben. Wo es eine solche Beziehung gibt, spricht man von einem "Eigenvektor" und einem "Eigenwert" der Matrix **A.**
Es gibt noch weitere "Paare", die eine solche Beziehung erfüllen:

$$\begin{bmatrix} 54 & 8 & -14 \\ 8 & 27 & -2 \\ -14 & -2 & 34 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 28 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 56 \\ 84 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(34)}$$

$$\begin{bmatrix} 54 & 8 & -14 \\ 8 & 27 & -2 \\ -14 & -2 & 34 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 24 * \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -48 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(35)}$$

Demnach hat unsere Matrix **A** mehrere solche Eigenwert-Eigenvektor-Paare.

Es gibt noch einen trivialen Fall: Ein Vektor, der aus lauter Nullen besteht, erfüllt in Verbindung mit jedem beliebigen Skalar λ eine solche Beziehung; das ist aber bei jeder quadratischen Matrix so und hat nichts "eigenes" mit unserer Matrix **A** zu tun. Für einen solchen Vektor gelten auch einige weitere Eigenschaften von Eigenvektoren nicht; deshalb wird dieser Fall in der folgenden Definition ausgeschlossen.

Definition: Gibt es zu einer quadratischen Matrix ***A*** *einen Vektor* ***x****, dessen Elemente nicht alle 0 sind, und einen Skalar λ, so daß* **x** *und λ die Gleichung*

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{x} = \lambda * \boldsymbol{x} \qquad \textbf{(36)}$$

erfüllen, dann ist der Vektor **x** *ein <u>Eigenvektor</u> der Matrix* ***A****, und der Skalar λ der zu* **x** *gehörende <u>Eigenwert</u> von* ***A****.*

2.6.2 Regeln zu Eigenwerten und Eigenvektoren

An der in Abschnitt 2.6.1 behandelten Beispielmatrix und ihren Eigenwerten und Eigenvektoren lassen sich einige Eigenschaften aufzeigen, die verallgemeinerbar sind.

Zunächst kann man sich überzeugen, daß die Eigenvektoren zueinander orthogonal sind (zum Begriff orthogonaler Vektoren vgl. Abschnitt 2.3.2.4.1). Das gilt mit einer Einschränkung allgemein:

Regel: Haben zwei Eigenvektoren einer Matrix unterschiedliche Eigenwerte, dann sind sie zueinander orthogonal.

Weiterhin kann man überprüfen: Wenn man den in Gleichung **(33)** aufgezeigten Eigenvektor mit einem beliebigen von 0 verschiedenen Skalar multipliziert (also z.B. alle Elemente mit 2 multipliziert), entsteht wieder ein Eigenvektor, der denselben Eigenwert hat.

Regel: Multipliziert man einen Eigenvektor **x** *der (quadratischen) Matrix* ***A*** *mit einem beliebigen von 0 verschiedenen Skalar, dann ist das Produkt wieder ein Eigenvektor der Matrix* ***A****; der zugehörige Eigenwert bleibt unverändert.*

Bei unserer Matrix gehörten zu den 3 in Abschnitt 2.6.1 aufgezeigten Eigenvektoren lauter unterschiedliche Eigenwerte. Es gibt aber auch Matrizen, bei denen 2 Eigenvektoren gleiche Eigenwerte haben, ohne daß der eine (im Sinne der vorangehenden Regel) ein skalares Vielfaches des anderen wäre. Dann gilt die

Regel: Gehören zu einer Matrix ***A*** *zwei (oder mehr) Eigenvektoren mit gleichem Eigenwert, dann ergibt auch jede Linearkombination dieser Eigenvektoren einen Eigenvektor von* ***A*** *mit demselben Eigenwert, sofern das Ergebnis dieser Linearkombination nicht der Vektor* ***0*** *ist.*

Wenn man die 3 aufgezeigten Eigenvektoren zu einer Matrix X zusammenfaßt (wobei die Eigenvektoren Spalten dieser Matrix sind) und andererseits die Eigenwerte in entsprechender Reihenfolge in die Hauptdiagonale einer Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$, dann kann man auch schreiben:

$$\begin{bmatrix} 54 & 8 & -14 \\ 8 & 27 & -2 \\ -14 & -2 & 34 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 63 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Nach der Regel über die Postmultiplikation einer Matrix mit einer Diagonalmatrix (vgl. Abschnitt 2.3.2.4.3, Gleichung **(25)**) bewirkt nämlich die auf der rechten Seite der obigen Gleichung vorgenommene Multiplikation, daß jeder Eigenvektor mit seinem Eigenwert multipliziert wird.

*Verallgemeinerung: Faßt man mehrere Eigenvektoren einer Matrix **A** zu einer Matrix **X** zusammen und schreibt die zugehörigen Eigenwerte in entsprechender Reihenfolge in die Hauptdiagonale einer Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$, dann gilt die Beziehung*

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{X} * \Lambda \tag{38}$$

Was die Zahl der nicht auseinander ableitbaren Eigenwert-Eigenvektor-Paare angeht, können wir feststellen: Die Beispielmatrix hatte 3 Zeilen und 3 Spalten, und es gab auch 3 unterschiedliche, zueinander orthogonale Eigenvektoren, die sich nicht durch Multiplikation mit einem Skalar auseinander ableiten lassen. Das läßt sich in folgende Regel fassen:

*Regel: Zu jeder quadratischen Matrix **A** mit m Zeilen und m Spalten gibt es eine quadratische Matrix **X** mit m zueinander orthogonalen Spalten, die Eigenvektoren von **A** sind. Bildet man außerdem eine Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$, die in der Hauptdiagonalen die Eigenwerte von **A** in entsprechender Reihenfolge hat, wie die Eigenvektoren in **X** stehen, dann gilt für diese Matrizen Gleichung **(38)**.*

Diese Regel kann man auch folgendermaßen umkehren:

*Gilt Gleichung **(38)** und ist die Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ dabei eine Diagonalmatrix, dann sind die Spalten der Matrix **X** Eigenvektoren der Matrix **A**, und die zugehörigen Eigenwerte stehen in entsprechender Reihenfolge in der Diagonalen der Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$.*

Begründung: Die i-te Spalte der Matrix **A** * **X** ist das Produkt von **A** und der i-ten Spalte von **X**. Wenn $\boldsymbol{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix ist, dann ist die i-te Spalte der Matrix **X** * $\boldsymbol{\Lambda}$ das Produkt der i-ten Spalte von **X** und des i-ten Diagonalelements von $\boldsymbol{\Lambda}$. Gilt nun Gleichung **(38)**, dann müssen insbesondere auch die i-ten Spalten der Matrizen **A** * **X** und **X** * $\boldsymbol{\Lambda}$ übereinstimmen. Mit anderen Worten: Bezeichnen wir die i-te Spalte der Matrix **X** als **x** und das i-te Diagonalelement von $\boldsymbol{\Lambda}$ als λ, dann gilt Gleichung **(36)**.

Weitere Hinweise:

- Wie am Beispiel gezeigt, gibt es dann noch weitere Eigenvektoren; jeder davon ist aber entweder ein skalares Vielfaches eines in **X** enthaltenen Eigenvektors oder eine Linearkombination mehrerer in **X** enthaltener Eigenvektoren, die alle den gleichen Eigenwert haben.
- Natürlich kann man aus der Matrix **X** auch eine andere Matrix **Y** bilden, die ebenfalls die in der Regel aufgezeigte Eigenschaft hat. Dazu kann man entweder eine Spalte von **X** mit einem Skalar multiplizieren oder Spalten von **X** vertauschen und gleichzeitig in der Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ die entsprechenden Eigenwerte vertauschen, so daß die Reihenfolge der Eigenwerte wieder stimmt.

Beispiel: Multiplizieren wir in Gleichung **(37)** den ersten Eigenvektor mit dem Skalar -2 und vertauschen den zweiten und dritten Eigenvektor, dann entsteht (mit entsprechender Vertauschung der Eigenwerte in der Diagonalmatrix) die ebenfalls zutreffende Gleichung

$$\begin{bmatrix} 54 & 8 & -14 \\ 8 & 27 & -2 \\ -14 & -2 & 34 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -12 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 63 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(39)}$$

Insofern gibt es nicht nur eine, sondern unendlich viele solche Matrizen, deren Spalten zueinander orthogonale Eigenvektoren sind. Am wichtigsten ist aber, daß es überhaupt eine gibt; aus dieser kann man dann alle übrigen ableiten.

Da es also unendlich viele Eigenvektoren gibt, ist es unmöglich, sie alle aufzuzählen. Aber es genügt ja, wenn man so viele hat, daß daraus alle übrigen nach den obigen Regeln herleitbar sind. Daher ist folgende Ergänzung zu der im Anschluß an Gleichung **(38)** formulierten Regel wichtig:

*Regel: Sind in Gleichung **(38)** die Spalten der Matrix **X** linear unabhängig und ist die Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix, dann lassen sich alle Eigenvektoren der Matrix **A** als Linearkombinationen von Spaltenvektoren der Matrix **X** darstellen, für die in der Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ gleiche Eigenwerte stehen.*

Die Multiplikation einer Spalte der Matrix **X** mit einem Skalar ist dabei nicht gesondert aufgeführt; denn dieses Produkt ist auch eine Linearkombination (vgl. den diesbezüglichen Kommentar nach der Definition des Begriffs "Linearkombination" in Abschnitt 2.3.2.1).

Für viele Zwecke (z.B. in der Faktorenanalyse) ist von diesen möglichen Darstellungen eine besonders wichtig: Die Eigenvektoren sind (ggf. durch Multiplikation mit einem entsprechenden Skalar) auf die Länge 1 gebracht (zum Begriff der Länge eines Vektors vgl. Abschnitt 2.3.2.4.1); die Reihenfolge wird so gebildet, daß in der Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ die Eigenwerte in absteigender Größe angeordnet sind. Manchmal wird dies auch die "kanonische" Darstellung genannt.

Schließlich ist noch auf weitere Regeln hinzuweisen, die in der multivariaten Statistik eine Rolle spielen.

*Regel: Die Summe der Eigenwerte einer quadratischen Matrix **A** ist gleich der Summe der Elemente in der Hauptdiagonalen.*

Da diese Summe der Elemente in der Hauptdiagonalen einer quadratischen Matrix eine solche besondere Bedeutung hat, gibt es dafür einen eigenen Begriff:
Definition: Die <u>Spur</u> einer quadratischen Matrix ist die Summe der Elemente in der Hauptdiagonalen.
In Gleichung **(37)** ist z.B. die Spur der 1. Matrix 54+27+34=115. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist auch die Summe der (in der Diagonalmatrix am Ende dieser Gleichung zusammengefaßten) Eigenwerte 115.

Regel: Die Determinante einer quadratischen Matrix ist gleich dem Produkt ihrer Eigenwerte.

Davon kann man sich z.B. anhand von Gleichung **(37)** überzeugen, wenn man die Determinante der ersten Matrix nach dem in Abschnitt 2.5 beschriebenen Verfahren für 3-reihige Determinanten berechnet.

Regel: Die Zahl der zueinander orthogonalen Eigenvektoren einer Matrix, die einen von 0 verschiedenen Eigenwert haben, ist gleich dem Rang der Matrix.

Natürlich läßt sich diese Regel mathematisch beweisen; aber auch hier versteht man die Regel vielleicht noch besser, wenn man sich an einem Beispiel veranschaulicht, was lineare Abhängigkeit mit einem Eigenwert 0 zu tun hat.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & -2 & -7 & 3 \\ 5 & 2 & -7 & -3 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -7 & 3 \\ 5 & 2 & -7 & -3 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 5 & -6 & 7 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(40)}$$

Zunächst ist festzustellen, daß diese Gleichung (die man natürlich durch Nachrechnen überprüfen kann) die Grundform von Gleichung **(38)** hat: Die zweite Matrix links vom Gleichheitszeichen stimmt mit der ersten Matrix nach dem Gleichheitszeichen überein; wir nennen sie also **X**. Außerdem ist die letzte Matrix eine Diagonalmatrix. Wenn wir diese wieder $\boldsymbol{\Lambda}$ nennen und die erste Matrix als **A** bezeichnen, dann gilt Gleichung **(38)**. Also sind die Spalten der Matrix **X** Eigenvektoren der Matrix **A**, und die Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ enthält die zugehörigen Eigenwerte in entsprechender Reihenfolge.
Was mit Gleichung **(40)** vor allem demonstriert werden soll, ist der Zusammenhang zwischen linearer Abhängigkeit der Spalten von **A** und einem Eigenwert von 0 (dem letzten diagonalen Element von $\boldsymbol{\Lambda}$). Wie man leicht nachprüfen kann, läßt sich die vierte Spalte der Matrix **A** als Ergebnis einer Linearkombination der vorhergehenden mit den Gewichtszahlen 3, −3 und 1 darstellen. Daher ergibt die durch die vierte Spalte der Matrix **X** gebildete Linearkombination einen Nullvektor als vierte Spalte der Ergebnismatrix. Auf der rechten Seite von Gleichung **(40)** ergibt sich ebenfalls ein Nullvektor für die vierte Spalte der Egebnismatrix, aber auf andere Weise. Das letzte Element in der Hauptdiagonalen der Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ ist 0. Nach den Regeln über die Postmultiplikation einer Matrix mit einer Diagonalmatrix (vgl. Abschnitt 2.3.2.4.3, Erläuterung zu Gleichung **(25)**) bedeutet dies, daß der vierte Spaltenvektor der Matrix **X** mit 0 multipliziert wird, und das ergibt auf jedenfall einen Nullvektor.
Verallgemeinert: Lineare Abhängigkeit der Spalten einer Matrix **A** bedeutet immer, daß es einen Spaltenvektor **x** derart gibt, daß das Produkt **A** * **x** einen Nullvektor ergibt, wobei **x** mindestens ein von 0 verschiedenes Element enthält (vgl. die alternative Definition der linearen Abhängigkeit in Abschnitt 2.3.3.). Da aber das Produkt 0 * **x** ebenfalls einen Nullvektor ergibt, gilt Gleichung **(36)** mit $\lambda = 0$. Also ist jeder Spaltenvektor **x** mit dieser Eigenschaft auch ein Eigenvektor von **A** mit Eigenwert 0.

Damit ist demonstriert, was lineare Abhängigkeit mit Eigenwert 0 zu tun hat. Daß darüber hinaus (wie in der obigen Regel festgestellt) die Zahl der von 0 verschiedenen Eigenwerte genau gleich dem Rang der Matrix ist, hat ähnliche Gründe - aber das ist eine andere Geschichte, und die soll ein andermal erzählt werden.