Freie Universität Berlin

Albrecht Iseler

Beispiele zur Demonstration des Strukturalismus

1. Das Wippschaukelbesipiel

Archimedes hat drei Kinder, deren Gewicht "wir" kennen, Archimedes aber nicht:

Xenophon	30
Yperia	40
Zacharias	50

A = Menge der auf der Wippschaukel sitzenden Kinder

Seine Theorie lautet: Es gibt für jedes Kind i einen Gewichtswert g(i), und es herrscht Gleichgewicht g.d.w.

$$\sum_{i \in A} d(i) \cdot g(i) = 0 \qquad \text{("Fundamentalgesetz")}$$

Dabei ist d(i) der Abstand von Kind i vom Drehpunkt der Wippschaukel, mit Vorzeichen: Negatives Vorzeichen links vom Drehpunkt, positives rechts (jeweils aus der Perspektive der Bank, auf der üblicherweise die Eltern sitzen).

<u>Meßergebnisse</u>:

<u>Situation 1</u>: A = {x, y}

d(x) = - 200
d(y) = 150

Unter der Annahme der Gültigkeit des Fundamentalgesetzes (!) ergibt sich daraus

$-200 \cdot g(x) + 150 \cdot g(y) = 0$

Wenn man diese Gleichung nach g(x) auflöst, erhält man

$g(x) = 0.75\, g(y)$

Situation 2: $A = \{x, z\}$

$d(x) = -300$
$d(z) = 180$

Unter Annahme der Gültigkeit des Fundamentalgesetzes ergibt sich:

$-300 \cdot g(x) + 180 \cdot g(z) = 0$

Auflösen nach g(x):

$g(x) = 0.6\ g(z)$

Situation 3: $A = \{y, z\}$

$d(y) = -300$
$d(z) = 240$

also lt. Fundamentalgesetz:

$-300 \cdot g(y) + 240 \cdot g(z) = 0$

aufgelöst nach g(y)

$g(y) = 0.8 \cdot g(z)$

Aus den drei Messungen ergeben sich für die drei Unbekannten g(x), g(y) und g(z) drei Gleichungen. Sie lassen sich aber nicht einfach nach den drei Unbekannten auflösen da sie nicht unabhängig sind: Das Ergebnis von Situation 3 hätte sich auch ohne neue Messung ergeben, indem man die Gleichungen $g(x) = 0.75\ g(y)$ aus Situation 1 und $g(x) = 0.6\ g(z)$ kombiniert zu

$0.75\ g(y) = 0.6\ g(z)$

Wenn man das nach g(y) auflöst, ergibt sich ebenfalls $g(y) = 0.8 \cdot g(z)$.
Immerhin ist aber das Verhältnis der drei Gewichtszahlen g(x), g(y) und g(z) festgelegt. Die obigen Zahlen 30, 40 und 50 erfüllen alles, was sich aus den drei Meßsituationen ergibt. Und umgekehrt läßt sich leicht überprüfen, daß mit diesen Zahlen das angenommene "Fundamentalgesetz" in allen drei Meßsituationen erfüllt wird. Und wenn alle drei Gewichtszahlen mit derselben Konstante muliplipliziert werden, ergibt sich ein neuer Satz von

Gewichtszahlen, mit dem das Fundamentalgesetz ebenfalls erfüllt wird.

Daß solche nach dem Fundamentalgesetz "passenden" Zahlen existieren, wird üblicherweise als "Beleg" für die Gültigkeit des Gesetzes betrachtet.

Frage: Ist das nicht ein Zirkelschluß? Zur Herleitung der Zahlen wurde ja bereits vorausgesetzt, daß das Fundamentalgesetz gilt. Dann ist es kein Wunder, daß zum Schluß seine Gültigkeit herauskommt.
Ist diese Kritik berechtigt?

Wichtig ist die Frage, was wäre, wenn es die obigen Ergebnisse für Situationen 1 und 2 gegeben hätte, statt Situation 3 aber folgendes:

<u>Situation 3'</u>: A = {y, z}

d(y) = -300
d(z) = 200

Dann könnte es keine g(i)-Werte geben, mit denen das Fundamentalgesetz für die drei Situationen 1, 2 und 3' gilt.

Mit den obigen drei Situationen und den daraus hergeleiteten g(i)-Werten und mit dem Fundamentalgesetz vereinbar wäre dagegen eine Situation, bei der alle drei Kinder auf der Wippschaukel sitzen, etwa die folgende:

<u>Situation 4</u>: A = {x, y, z}

d(x) = -100
d(y) = -300
d(z) = 300

Wie leicht nachzurechnen ist, gilt das Fundamentalgesetz mit obigen g(i)-Werten:

$(-100) \cdot 30 + (-300) \cdot 40 + 300 \cdot 50 = 0$

Formalisierung der Modelle des Theorie-Elements AST

AST steht für "Archimedische Statik".

Formelle Definition ist nur das, was zwischen den senkrechten Linien steht!

	M(AST) := { <A, d, g>:	
A1:	A: n.l.M;	z.B.: Menge der Kinder auf der Wippschaukel*
A2:	d:A→$\mathbb{R}$;	d(i) := Abstand von Kind i vom Drehpunkt
A3:	g:A→$\mathbb{R}$ mit g(i) > 0;	g(i) := Gewicht von Kind i
A4:	$\sum_{i \in A} d(i) \cdot g(i) = 0$ }	"Fundamentalgesetz"

* n.l.M. := nicht-leere Menge

2. Die Guttmanskala

Grundbegriffe

Bei der Guttmanskala wird angenommen, daß alle Items ein bestimmtes Merkmal messen. Für die Theorie der Guttmanskala werden Begriffe wie "Item lösen", "Fähigkeit" und "Schwierigkeit" verwendet, die umgangssprachlich nur bei Leistungstests verwendet werden. Für die Theorie der Guttmanskala (und auch für andere Verfahren) sind diese Begriffe aber in einer Weise definiert, welche die Theorie auch für andere Bereiche brauchbar macht.

Ausgangspunkt ist die Annahme, daß es zu jedem Item zwei Antwortmöglichkeiten gibt, von denen eine für eine höhere Ausprägung des zu messenden Merkmals spricht und die andere für eine niedrigere. Davon ausgehend folgende Begriffe:

Ein Item *lösen* := diejenige Antwortmöglichkeit wählen, die für eine hohe Ausprägung des zu messenden Merkmals spricht.

Fähigkeit einer Person := die Ausprägung des zu messenden Merkmals bei der Person.

Schwierigkeit eines Items := diejenige "Fähigkeit", die mindestens vorliegen muß, damit das Item gelöst wird.

ICC (Synonym: Itemcharakteristik) := eine Kurve, welche die (auf der y-Achse eingetragene) Lösungswahrscheinlichkeit eines bestimmten items in Abhängigkeit von der (auf der x-Achse eingetragenen) Fähigkeit der Person darstellt. Solche ICCs gibt es auch für andere Modelle. Typisch für die Guttmanskala: Die ICC verläuft zunächst auf Lösungswahrscheinlichkeit 0 und springt an einer bestimmten Stelle auf 1. Dieser Punkt - also die Fähigkeit, ab der das Item gelöst wird, - ist definitionsgemäß die Schwierigkeit des Items.

Ein *Skalogramm* ist eine Tabelle, in der jede Spalte einem Item und jede Zeile einer Person entspricht und in der 0 (oder -) für "Item nicht gelöst" und 1 (oder +) für "Item gelöst" steht. Ein *perfektes Skalogramm* liegt vor, wenn die Items in aufsteigender Schwierigkeit und die Personen in aufsteigender Fähigkeit sortiert sind und wenn man durch das Skalogramm eine (von oben links nach unten rechts) fallende Treppenlinie einzeichnen kann, so daß oberhalb der Treppenlinie nur Nullen und unterhalb der Treppenlinie nur Einsen stehen.

Manche Autoren reservieren den Begriff "Skalogramm" für solche "perfekte" Skalogramme.

Der *Reproduktionskoeffizient* für ein Skalogramm beruht auf dem Versuch, durch Veränderung von möglichst wenigen Tabelleneintragungen (Nullen oder Einsen) ein Skalogramm zu erhalten, welches nach geeigneter Vertauschung von Zeilen und Spalten ein perfektes Skalogramm wird. Mit den Bezeichnungen F für diese "Zahl der "Fehleintragungen", n für "Zahl der Personen" und m für "Zahl der Items ist dann

$$\mathit{Reproduktionskoeffizient} := 1 - \frac{F}{n \cdot m}$$

Zum Begriff: Der Reproduktionskoeffizient gibt an, wie gut der ursprüngliche Datensatz durch geeignete Wahl von Fähigkeits- und Schwierigkeitswerten reproduziert werden kann.

Modellwidrige Quadrupel: Bei der Guttman-Skalierung liegt ein "modellwidriges Quadrupel" vor, wenn es zwei Personen i' und i" sowie zwei Items j' und j" mit dem Lösungsmuster

	j'	j"
i'	1	0
i"	0	1

gibt.

Hinweis: Die im Zusammenhang des Reproduktionskoeffizienten definierte "Fehlerzahl" F ist nicht dasselbe wie die Zahl der modellwidrigen Quadrupel! Manchmal können durch Änderung einer einzigen Skalogrammeintragung gleich mehrere modellwidrige Quadrupel beseitigt werden!

Formalisierung der Modelle des Theorie-Elements GUT

GUT steht für "Guttmanskala".

Formelle Definition ist auch hier nur das, was zwischen den senkrechten Linien steht!

	$M(GUT) := \{ \langle I, J, w, f, s \rangle :$	
A1:	I: n.l.M;	z.B. Personen
A2:	J: n.l.M;	z.B. Items
A3:	$w:(I \times J) \to \mathbb{R};$	w(i, j) := Lösungs-Wk von Person i bei Item j
A4:	$f: I \to \mathbb{R};$	f(i) := "Fähigkeit" von Person i
A5:	$s: J \to \mathbb{R};$	s(j) := "Schwierigkeit" von Item j
A6:	$\forall (i, j) \in (I \times J):$ $(\; f(i) \geq s(j) \Rightarrow w(i, j) = 1;$ $f(i) < s(j) \Rightarrow w(i, j) = 0 \;) \}$	"Fundamentalgesetz"