

Brückenkurs Mathematik für Studierende der Chemie

Lösungen zu Übung 10

Lineare Algebra

1.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B + A$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = DC$$

2. (a) Inhomogenes LGS (bestehend aus 4 Gleichungen für 4 Unbekannte) als Matrix-Vektor-Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und als erweitertes Koeffizientenschema $(A|\mathbf{b})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right) \right\}$$

- (b) Anwendung des (einfachen) Gauss-Algorithmus zur Lösung des LGS:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ \color{red}{0} & -1 & -2 & -7 & 6 \\ \color{red}{0} & -2 & -8 & -10 & 8 \\ \color{red}{0} & -7 & -10 & -13 & 6 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ (2') = (2) - 2(1) \\ (3') = (3) - 3(1) \\ (4') = (4) - 4(1) \end{matrix} \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 6 \\ 0 & \color{red}{0} & -4 & 4 & -4 \\ 0 & \color{red}{0} & 4 & 36 & -36 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') - 2(2') \\ (4'') = (4') - 7(2') \end{matrix} \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} (1) \\ (2''') = -(2') \\ (3''') = -(3'')/4 \\ (4''') = ((4'') + (3''))/40 \end{matrix} \end{aligned}$$

Sowohl die (transformierte) Matrix $\tilde{A}$ wie das (transformierte) erweiterte Koeffizientenschema $(\tilde{A}|\tilde{\mathbf{b}})$ haben Rang 4 $\Rightarrow$ das LGS hat eine eindeutige Lösung.

Lösen der Gleichungen von unten nach oben (sogenanntes „Rückwärtseinsetzen“):

$(4''')$ heisst $x_4 = -1$;

$(3''')$ ergibt $x_3 = 1 + x_4 = 0$;

$(2''')$ ergibt $x_2 = -6 - 2x_3 - 7x_4 = +1$;

(1) ergibt schliesslich $x_1 = -2 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0$.

Probe: Der Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0, 1, 0, -1)^T$ erfüllt (tatsächlich / selbstverständlich) das zu Anfang gegebene LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Anmerkung: Der Gauss-Algorithmus kann fortgesetzt werden, um Nullen nicht nur *unterhalb* der Diagonalen des Matrixteils des erweiterten Koeffizientenschemas (s. o.), sondern auch *oberhalb* davon zu erzeugen. Bei dem hier behandelten LGS wäre der nächste Schritt dazu der Ersatz von Gl. $(3''')$ durch $(3''') + (4''')$. Dadurch wird aus dem Matrixteil des erweiterten Koeffizientenschemas schliesslich die Einheitsmatrix E , und an der Stelle, wo sich ursprünglich der Vektor $\mathbf{b}$ befand, lässt sich der gesuchte Lösungsvektor $\mathbf{x}$ direkt ablesen ($A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightsquigarrow E\mathbf{x} = \mathbf{x}$).

3. (a) Drehmatrizen $R_z(\phi)$ für Drehungen um die z -Achse mit Drehwinkeln $\phi = \pi$ und $\phi = \pi/2$:

$$R_z(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_z(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Drehung des Vektors $\underline{r} = (2, 1, 0)^\top$ um die z -Achse mit Drehwinkel ...

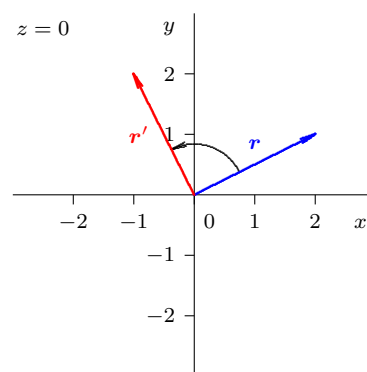
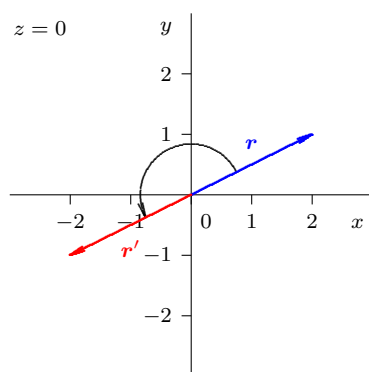
... $\phi = \pi$:

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

... $\phi = \pi/2$:

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Graphische Lösung (Drehung um $\phi > 0$ erfolgt natürlich in mathematisch positiver Richtung, d. h., **gegen** den Uhrzeigersinn):



Es lässt sich nun leicht aus den beiden Abbildungen ablesen, dass in beiden Fällen die Koordinaten der Endpunkte der Ortsvektoren $\underline{r}'$ mit den in (b) erhaltenen, an den Spaltenvektoren $\underline{r}'$ direkt ablesbaren Koordinaten übereinstimmen.