# Analysis III

—

Vorlesung an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 2010/2011

Alexander Schmitt

März 2011

Freie Universität Berlin

# Inhalt


*Vorwort* 5

**1** *Das Lebesgue-Integral* 7
- 1.1 Treppenfunktionen . . . 7
- 1.2 Die $\mathcal{L}^1$-Halbnorm . . . 11
- 1.3 Fortsetzung linearer Funktionale . . . 17
- 1.4 Definition des Lebesgue-Integrals . . . 22
- 1.5 Nullmengen . . . 24
- 1.6 Der Satz von Riesz–Fischer . . . 31

**2** *Konvergenzsätze* 35
- 2.1 Der Satz von Beppo Levi . . . 35
- 2.2 Der Konvergenzsatz von Lebesgue . . . 38

**3** *Der Satz von Fubini* 43
- 3.1 Der Satz von Fubini . . . 43
- 3.2 Integrabilitätskriterien I . . . 47
- 3.3 Messbare Mengen und das Prinzip von Cavalieri . . . 51
- 3.4 Integrabilitätskriterien II: Der Satz von Tonelli . . . 57
- Anhang. Nicht messbare Mengen und das Auswahlaxiom . . . 60

**4** *Die Transformationsformel* 83
- 4.1 Formulierung der Transformationsformel . . . 83
- 4.2 Die spezielle Transformationsformel . . . 86
- 4.3 Der Beweis der speziellen Transformationsformel . . . 88
- 4.4 Beispiele . . . 92

**5** *Differentialformen und der Satz von Stokes* 97
- 5.1 Etwas multilineare Algebra . . . 97
- 5.2 Differentialformen . . . 104
- 5.3 Orientierte Untermannigfaltigkeiten . . . 112
- 5.4 Teilungen der Eins . . . 118
- 5.5 Integration von Differentialformen über Untermannigfaltigkeiten . . . 121
- 5.6 Untermannigfaltigkeiten mit Rand . . . 124
- 5.7 Der Satz von Stokes . . . 128
- 5.8 Das Volumen einer kompakten Hyperfläche . . . 133
- 5.9 Der Igelkämmungssatz . . . 135

*Die Aufgabenblätter* 139

*Literaturhinweise* 151

# Vorwort

Das vorliegende Skript enthält den Stoff der Vorlesung „Analysis III" aus dem Wintersemester 2010/2011 zur mehrdimensionalen Integrationstheorie. Es basiert größtenteils auf den Lehrbüchern (11), (7) und (1) und soll diese nicht ersetzen.

Das Skript stellt die Grundzüge der Integrationstheorie nach Lebesgue vor. Der Ansatz ist zunächst einmal ähnlich dem der Integrationstheorie nach Riemann. Es wird nämlich mit der Einführung des Integrals für Treppenfunktionen begonnen. Man erhält die integrierbaren Funktionen als solche, die sich „gut" durch Treppenfunktionen annähern lassen. Das Maß für die Güte der Annäherung ist eine gewisse Halbnorm mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Beim Riemann-Integral vergleicht man für diese Halbnorm Funktionen mit endlichen Linearkombination von charakteristischen Funktionen von Quadern. Beim Lebesgue-Integral ersetzt man die endlichen Linearkombinationen durch unendliche, sogenannte *Hüllreihen*.

Das Lebesgue-Integral zeichnet sich durch gute Konvergenzeigenschaften aus, denen wir im Skript in Form der Sätze von Riesz–Fischer, von Beppo Levi und von Lebesgue begegnen werden. Diese wiederum werden bei den Beweisen der zentralen Integrationstechniken, und zwar des Satzes von Fubini und der Transformationsformel, eingesetzt.

Die Lebesguesche Integrationstheorie beinhaltet den Begriff des Lebesgue-Maßes. Die Frage, welche Mengen Lebesgue-messbar sind, führt zu fundamentalen Problemen der Mengenlehre. Die genaue Diskussion dieser Probleme hätte zwar den Rahmen der Vorlesung gesprengt, im Skript wird jedoch ein kurzer Überblick versucht.

In der Riemannschen Integrationstheorie spielte der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine zentrale Rolle. Auch er hat eine Verallgemeinerung in der Theorie der reellwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher, und zwar den Satz von Stokes. Um ihn angemessen zu behandeln, wird die Theorie der Differentialformen und die Integration über Untermannigfaltigkeiten entwickelt. Das Skript schließt mit einer anschaulichen Anwendung des Satzes von Stokes, die als *Igelkämmungssatz* bekannt ist.

Die Aufgabenblätter zur Vorlesung befinden sich am Ende des Textes.

Ich danke Herrn Nikolai Beck und Herrn Dr. habil. Norbert Hoffmann für das Korrekturlesen.

Alexander Schmitt
Berlin 2011

# Kapitel 1

# Das Lebesgue-Integral

## 1.1 Treppenfunktionen

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ wollen wir das Integral

$$\int f \mathrm{d}\mu_n$$

erklären.

Die Integration ist eng mit der Berechnung von Volumina verbunden: Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{array}{rcl} \chi_A\colon \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

die *charakteristische Funktion von A*. Dann soll

$$\mathrm{Vol}_n(A) := \int \chi_A \mathrm{d}\mu_n$$

das *Volumen von A* sein.

Wie im Fall des Riemann-Integrals (17), Kapitel 5, bauen wir die Integrationstheorie auf, indem wir die Volumina für gewisse Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ festlegen. Z.B. ist für reelle Zahlen $a < b$ und

$$I = (a,b), \quad (a,b], \quad [a,b) \quad \text{oder} \quad [a,b].$$

die charakteristische Funktion $\chi_I$ eine Treppenfunktion im Sinne von (17), Definition 5.1.1. Für $\alpha \leq a < b \leq \beta$ erhalten wir

$$\int_\alpha^\beta \chi_I \mathrm{d}x = b - a$$

und daher auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_I \mathrm{d}x = b - a.$$

Wir nennen $L(I) := b - a$ die *Länge* des Intervalls $I$.

**1.1.1 Definition.** a) Eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist ein (*beschränkter, achsenparalleler*) *Quader*, wenn es **beschränkte** Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n.$$

Dabei darf $I_j$ offen, halboffen oder abgeschlossen sein, $j = 1, \ldots, n$.

b) Die Zahl

$$\mathrm{Vol}_n(Q) := L(I_1) \cdot \cdots \cdot L(I_n)$$

ist das (*n-dimensionale*) *Volumen* von $Q$.

*1.1.2 Bemerkung.* Für $j \in \{1,\dots,n\}$ ist auch $I_j = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ erlaubt. In diesem Fall gilt $L(I_j) = 0$ und $\mathrm{Vol}_n(Q) = 0$.

**1.1.3 Definition.** a) Ein *unbeschränkter* (*achsenparalleler*) *Quader* ist eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^n$, zu der es Intervalle $I_1,\dots,I_n \subset \mathbb{R}$ gibt, von denen mindestens eines unbeschränkt ist, so dass

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n.$$

Wie zuvor darf $I_j$ offen, halboffen oder abgeschlossen sein, $j = 1,\dots,n$.

b) Für $a \in \mathbb{R}$ und ein Intervall $I$ aus der Liste $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(a,\infty)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ sei

$$L(I) := \infty.$$

c) Das (*n-dimensionale*) *Volumen* eines **unbeschränkten**, achsenparallelen Quaders $Q$ ist

$$\mathrm{Vol}_n(Q) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } L(I_j) > 0,\ j = 1,\dots,n, \\ 0, & \text{falls ein } j \in \{1,\dots,n\} \text{ mit } L(I_j) = 0 \text{ existiert} \end{cases}.$$

*1.1.4 Bemerkung.* Teil c) der Definition beruht auf der Rechenregel $0 \cdot \infty = 0$. In der Grenzwertrechnung ist diese Rechenregel sinnlos, in der Integralrechnung wird sie uns noch einige Male begegnen.

Wir geben uns nun $l_i \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen

$$-\infty =: a_{i0} < a_{i1} < \cdots < a_{il_i} < a_{il_i+1} := \infty, \quad i = 1,\dots,n, \tag{1.1}$$

vor. Zu $i \in \{1,\dots,n\}$ und $j \in \{1,\dots,l_i\}$ definieren wir die **Hyperebene**

$$H_{ij} := \left\{ x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_i = a_{ij} \right\}.$$

Weiter sei

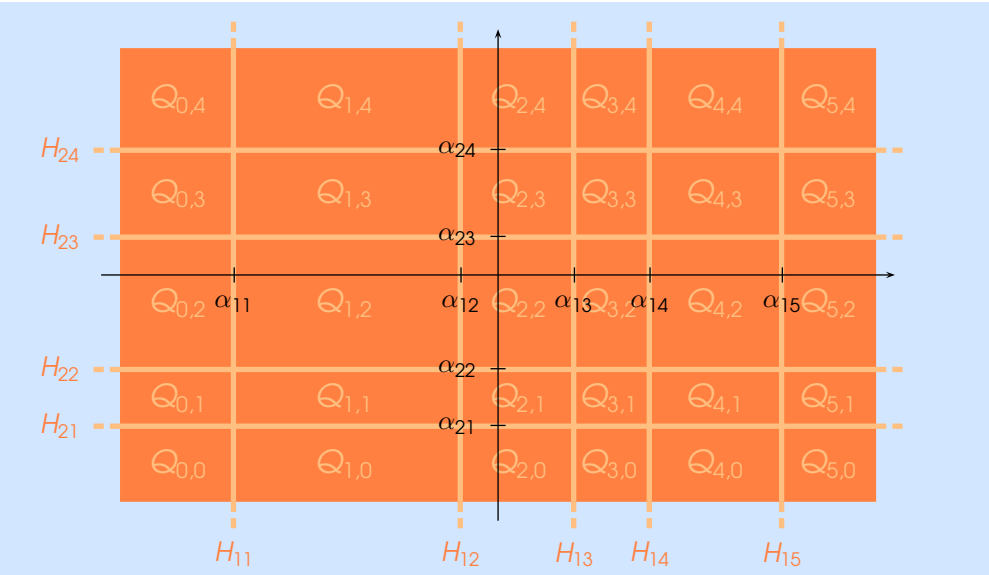
$$J = \left\{ \underline{j} = (j_1,\dots,j_n) \in \mathbb{N}^n \,\middle|\, j_i \in \{0,\dots,l_i\},\ i = 1,\dots,n \right\}.$$

Für $\underline{j} = (j_1,\dots,j_n) \in J$ definieren wir den Quader

$$Q_{\underline{j}} := (a_{1j_1}, a_{1j_1+1}) \times \cdots \times (a_{nj_n}, a_{nj_n+1}).$$

Damit gilt

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,l_i}} H_{ij} = \bigsqcup_{\underline{j} \in J} Q_{\underline{j}}.$$



*1.1.5 Bemerkung.* i) Wie in (18), Definition 1.6.4, bezeichne $\overline{A}$ den Abschluss der Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Es gilt dann

$$\bigcup_{\underline{j} \in J} \overline{Q}_{\underline{j}} = \mathbb{R}^n.$$

ii) Für ein Indextupel $\underline{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in J$ mit $j_i \in \{1, \ldots, l_i - 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, gilt

$$\overline{Q}_{\underline{j}} = [a_{1j_1}, a_{1j_1+1}] \times \cdots \times [a_{nj_n}, a_{nj_n+1}].$$

(Übung: Wie sieht der Abschluss für unbeschränkte Quader aus?)

**1.1.6 Definition.** a) Ein Datum $\underline{Z} = (a_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, l_i)$ wie in (1.1) nennt man eine *Zerlegung* von $\mathbb{R}^n$.

b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine *Treppenfunktion*, falls es eine Zerlegung $\underline{Z}$ von $\mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $c_{\underline{j}}$, $\underline{j} \in J$, gibt, so dass

- $c_{\underline{j}} = 0$, falls $Q_{\underline{j}}$ unbeschränkt ist,
- $f(x) = c_{\underline{j}}$ für alle $x \in Q_{\underline{j}}$ und $\underline{j} \in J$

gilt.

*1.1.7 Bemerkung.* Wir können die zweite Bedingung umschreiben zu

$$f_{|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,l_i}} H_{ij}} = \sum_{\underline{j} \in J} c_{\underline{j}} \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}}.$$

**1.1.8 Definition.** a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Eine Zerlegung $\underline{Z}$ von $\mathbb{R}^n$ ist *an f angepasst*, wenn es reelle Zahlen $c_{\underline{j}}$, $\underline{j} \in J$, gibt, so dass $c_{\underline{j}} = 0$, falls $Q_{\underline{j}}$ unbeschränkt ist, $\underline{j} \in J$, und

$$f_{|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,l_i}} H_{ij}} = \sum_{\underline{j} \in J} c_{\underline{j}} \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}}.$$

b) Für eine Treppenfunktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine an $f$ angepasste Zerlegung $\underline{Z}$ setzen wir[1]

$$I(f, \underline{Z}) := \sum_{\underline{j} \in J} c_{\underline{j}} \cdot \mathrm{Vol}_n(Q_{\underline{j}}).$$

Bevor wir von Integralen sprechen, müssen wir uns der Abhängigkeit von der Zerlegung entledigen.

**1.1.9 Definition.** Es seien

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \left(a_{i0} < a_{i1} < \cdots < a_{il_i} < a_{il_i+1},\ i = 1, \ldots, n\right) \\ \underline{Z}' &= \left(a'_{i0} < a'_{i1} < \cdots < a'_{il'_i} < a'_{il'_i+1},\ i = 1, \ldots, n\right) \end{aligned}$$

zwei Zerlegungen von $\mathbb{R}^n$. Man sagt, dass $\underline{Z}'$ eine *Verfeinerung* von $\underline{Z}$ ist, wenn es zu Indizes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, l_i\}$ einen Index $j' \in \{1, \ldots, l'_i\}$ mit

$$a_{ij} = a'_{ij'},$$

gibt.
**Schreibweise.** $\underline{Z}' \preceq \underline{Z}$.

[1] Die angegebene Summe ist endlich, da $c_{\underline{j}} = 0$ für jeden unbeschränkten Quader $Q_{\underline{j}}$, $\underline{j} \in J$, und nur endlich viele beschränkte Quader vorkommen.

**1.1.10 Lemma.** *Es seien $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ zwei Zerlegungen von $\mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Zerlegung $\underline{Z}_3$ von $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\underline{Z}_3 \preceq \underline{Z}_1 \quad \text{und} \quad \underline{Z}_3 \preceq \underline{Z}_2.$$

*Beweis.* Der einfache Beweis wird der Leserin bzw. dem Leser überlassen. □

**1.1.11 Lemma.** *Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ zwei an $f$ angepasste Zerlegungen von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$I(f, \underline{Z}_1) = I(f, \underline{Z}_2).$$

*Beweis.* Die Aussage ist leicht zu sehen, wenn $\underline{Z}_1 \preceq \underline{Z}_2$ (s. Aufgabe A.1.3). Im Allgemeinen können wir nach Lemma 1.1.10 eine Zerlegung $\underline{Z}_3$ von $\mathbb{R}^n$ mit $\underline{Z}_3 \preceq \underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_3 \preceq \underline{Z}_2$ finden. Diese Zerlegung ist ebenfalls an $f$ angepasst. Da nach der Vorüberlegung

$$I(f, \underline{Z}_1) = I(f, \underline{Z}_3) = I(f, \underline{Z}_2),$$

ist die Behauptung überprüft. □

**1.1.12 Definition.** Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $\underline{Z}$ eine an $f$ angepasste Zerlegung von $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\int f \mathrm{d}\mu_n := I(f) := I(f, \underline{Z})$$

das *Integral von $f$*.

**1.1.13 Lemma.** i) *Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen. Dann ist auch $f + g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, und man hat*

$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

ii) *Es seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Dann ist $\lambda \cdot f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls eine Treppenfunktion, und es gilt*

$$I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f).$$

iii) *Für eine Treppenfunktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$, d.h. $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, gilt*

$$I(f) \geq 0.$$

iv) *Wenn $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion ist, dann ist auch $|f|\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine.*

v) *Für zwei Treppenfunktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sind auch $\max\{f, g\}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \max\{f(x), g(x)\}$, und $\min\{f, g\}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \min\{f(x), g(x)\}$ welche.*

*Beweis.* Die Eigenschaften ii) - iv) ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen. Um i) und v) einzusehen, wähle man eine Zerlegung $\underline{Z}$ von $\mathbb{R}^n$, die sowohl an $f$ als auch an $g$ angepasst ist (s. Lemma 1.1.10). Dann existieren reelle Zahlen $c_{\underline{j}}$ und $d_{\underline{j}}$, $\underline{j} \in J$, die verschwinden, falls $Q_{\underline{j}}$ unbeschränkt ist, $\underline{j} \in J$, und

$$f_{|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,J_i}} H_{ij}} = \sum_{\underline{j} \in J} c_{\underline{j}} \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}},$$

$$g_{|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,J_i}} H_{ij}} = \sum_{\underline{j} \in J} d_{\underline{j}} \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}}$$

erfüllen. Daraus ergibt sich

$$(f+g)_{|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,l_i}} H_{ij}} = \sum_{\underline{j} \in J} (c_{\underline{j}} + d_{\underline{j}}) \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}},$$

$$\max\{f,g\}_{|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,l_i}} H_{ij}} = \sum_{\underline{j} \in J} \max\{c_{\underline{j}}, d_{\underline{j}}\} \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}}$$

$$\text{und} \quad \min\{f,g\}_{|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,l_i}} H_{ij}} = \sum_{\underline{j} \in J} \min\{c_{\underline{j}}, d_{\underline{j}}\} \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}}.$$

Die Behauptungen folgen nun direkt. □

Das Lemma zeigt insbesondere, dass

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \left\{ f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ ist Treppenfunktion} \right\}$$

ein reeller Vektoraum ist und

$$\begin{aligned} I \colon \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto I(f) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

*1.1.14 Beispiel.* Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränkter Quader. Die charakteristische Funktion $\chi_Q$ von $Q$ ist offenbar eine Treppenfunktion. Für reelle Zahlen $c_1,\dots,c_k$ und beschränkte Quader $Q_1,\dots,Q_k$ ist auch

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \chi_{Q_i}$$

eine Treppenfunktion.

## 1.2 Die $\mathcal{L}^1$-Halbnorm

Wir erinnern zunächst an das Riemann-Integral für Funktionen in einer Veränderlichen. Dazu wählen wir reelle Zahlen $a < b$ und betrachten eine beschränkte Funktion $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Das *Ober-* bzw. *Unterintegral* von $f$ wird als

$$\begin{aligned} I^\star(f) &:= \inf\left\{ I(h) \,\middle|\, h \text{ Treppenfunktion mit } f \le h \right\} \\ \text{bzw.} \quad I_\star(f) &:= \sup\left\{ I(g) \,\middle|\, g \text{ Treppenfunktion mit } f \ge g \right\} \end{aligned}$$

eingeführt. Die Funktion $f$ darf sich *Riemann-integrierbar* nennen, falls

$$I^\star(f) = I_\star(f).$$

Das Integral von $f$ erhält man, indem man $f$ durch Treppenfunktionen annähert. In der Analysis 2 haben wir gelernt, dass man solche „Annäherungen" oder „Konvergenz" am besten mit Hilfe von Normen beschreibt. Um das im Kontext des Riemann-Integrals zu tun, beobachten wir, dass wir Folgen von Treppenfunktionen $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$g_k \le f \le h_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

und

$$\lim_{k\to\infty} I(h_k - g_k) = 0$$

wählen können. Für eine beschränkte Funktion $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$|||\varphi||| := I^\star\big(|\varphi|\big) := \inf\Big\{\, I(h) \;\big|\; h \text{ Treppenfunktion mit } |\varphi| \le h \,\Big\}. \tag{1.2}$$

Wegen

$$0 \le f - g_k \le h_k - g_k$$

folgt

$$\lim_{k\to\infty} |||f - g_k||| = 0.$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x)\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

Man überlegt sich, dass man die Definition von Riemann-Integrierbarkeit auch wie folgt fassen kann: Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *Riemann-integrierbar*, wenn es eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ gibt, so dass[2]

$$\lim_{k\to\infty} |||f - g_k||| = 0.$$

In diesem Fall ist das *Riemann-Integral* durch (1.3) gegeben (vgl. Satz 1.3.7 und 1.4.4).

Es ist hier zu beachten, dass $|||\cdot|||$ keine Norm auf dem Vektorraum der beschränkten Funktionen auf $[a,b]$ ist, sondern nur eine sogenannte *Halbnorm* (s. Definition 1.3.1, a). Das reicht aber für die Fragen der Konvergenz im Rahmen der Integrationstheorie.

Die Lebesgue-Integrationstheorie verfolgt eine ähnliche Strategie, allerdings mit einigen feinen aber sehr nützlichen Veränderungen: Zunächst arbeiten wir direkt mit Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und nicht auf einer beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Damit ersparen wir uns z.B., einen Formalismus uneigentlicher Integrale gesondert einführen zu müssen. Zweitens rechnen wir in geeigneter Weise mit dem Wert $\infty$. (Die Notwendigkeit dazu wird bereits durch den Wunsch, mit Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^n$ zu arbeiten, bedingt.) Der entscheidende Unterschied besteht aber darin, dass wir die Halbnorm $|||\cdot|||$ durch die $\mathcal{L}^1$-Halbnorm $\|\cdot\|_1$ ersetzen. Für $|||\cdot|||$ haben wir lediglich Treppenfunktionen, also **endliche** Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von „Quadern" herangezogen. Für $\|\cdot\|_1$ erlauben wir auch **unendliche** Linearkombinationen.

Der Vorteil, den man aus der letzten Modifikation zieht, besteht zum einen darin, dass man mehr integrierbare Funktionen erhält, und zum anderen darin, dass das aus der Definition resultierende Lebesgue-Integral sehr gute Konvergenzeigenschaften aufweist.

Wie bereits angekündigt fügen wir den Wert $\infty$ unserem Zahlbereich hinzu, d.h. wir arbeiten in

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Wir vereinbaren die folgenden

**1.2.1 Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$.**

i) $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}: \quad \infty + c = \infty = c + \infty.$
ii) $\forall c \in \mathbb{R}^\star: \quad \infty \cdot c = \infty = c \cdot \infty.$
iii) $\infty \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \infty.$
iv) $|\infty| = \infty.$
v) $\forall c \in \mathbb{R}: \quad c < \infty.$

**1.2.2 Vorsicht.** Die Menge $\overline{\mathbb{R}}$ ist mit diesen Operationen **kein** $\mathbb{R}$-Vektorraum. Denn wir haben

$$\big(1+(-1)\big)\cdot\infty = 0\cdot\infty = 0 \ne \infty = \infty + \infty = 1\cdot\infty + (-1)\cdot\infty.$$

[2] Es wird nicht mehr $f \ge g_k$, $k \in \mathbb{N}$, gefordert.

*1.2.3 Bemerkung.* i) Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ besitzt ein Infimum, nämlich

$$\inf(A) = \begin{cases} \inf(A \cap \mathbb{R}), & \text{falls } A \cap \mathbb{R} \neq \varnothing \\ \infty, & \text{falls } A \cap \mathbb{R} = \varnothing \end{cases}.$$

ii) Für jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von **nichtnegativen** reellen Zahlen ist der Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$$

erklärt.

Wir arbeiten im Folgenden mit Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Sind reelle Zahlen $c_k \geq 0$ und Funktionen $f_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, gegeben, dann ist damit auch die Funktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot f_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

definiert.

**1.2.4 Definition.** a) Es sei $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Eine *Hüllreihe für g* ist eine Folge $\Phi = (c_k, Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$. so dass

- $c_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$,
- $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ ein offener, beschränkter Quader ist, $k \in \mathbb{N}$,
- $|g(x)| \leq F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, mit $F := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k}$.

b) Für eine Folge $\Phi = (c_k, Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus nichtnegativen reellen Zahlen $c_k$, $k \in \mathbb{N}$, und offenen, beschränkten Quadern $Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, setzen wir

$$I(\Phi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{Vol}_n(Q_k).$$

*1.2.5 Bemerkung.* In der Literatur wird eine Hüllreihe oftmals einfach in der Form

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{Q_k}$$

geschrieben. Dies ist im Sinne der Konvention aus (17), Bemerkung 2.6.5, i), zu verstehen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sowohl für die Folge $(\sum_{k=0}^{l} a_k)_{l\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen als auch für deren etwaigen Grenzwert steht.

In manchen Fällen (z.B. in Beispiel 1.2.10) werden wir diese Notation auch benutzen, insbesondere, wenn die Reihe endlich ist.

*1.2.6 Beispiel.* Es seien $c_k := 1$ und

$$Q_k := (-k, k) \times \cdots \times (-k, k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $F(x) = \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, für die Funktion $F := \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{Q_k}$. Insbesondere hat jede Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Hüllreihe.

**1.2.7 Definition.** Für eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist

$$\|g\|_1 := \inf\Big\{ I(\Phi) \;\Big|\; \Phi \text{ eine Hüllreihe für } g \Big\}.$$

**1.2.8 Satz.** *Die Zuordnung*

$$(g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}) \quad \longmapsto \quad \|g\|_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

*hat folgende Eigenschaften:*

i) *Für jede Funktion* $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *gilt*

$$\|g\|_1 \geq 0.$$

ii) *Für eine Zahl* $c \in \mathbb{R}$ *und eine Funktion* $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *gilt*

$$\|c \cdot g\|_1 = |c| \cdot \|g\|_1.$$

iii) *Für zwei Funktionen* $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *gilt*

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

iv) *Für zwei Funktionen* $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *hat man:*

$$|f| \leq |g| \quad \Rightarrow \quad \|f\|_1 \leq \|g\|_1.$$

v) *Für Funktionen* $g_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *mit* $g_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, *gilt*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} g_k \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_1.$$

*Beweis.* Die Eigenschaften i), ii) und iv) sind leicht zu überprüfen und werden der Leserin bzw. dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Ferner impliziert Teil v) offenbar Teil iii).

Teil v) ist ebenfalls trivial, wenn die rechte Seite unendlich ist. Falls sie nicht unendlich ist, können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ Hüllreihen $\Phi_k$ für $g_k$ aussuchen, die

$$I(\Phi_k) \leq \|g_k\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

erfüllen. Wir schreiben

$$\Phi_k = (c_{kl}, Q_{kl})_{l \in \mathbb{N}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und wählen eine Bijektion

$$\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Damit ist

$$\Phi := (c_{\alpha(k)}, Q_{\alpha(k)})_{k \in \mathbb{N}}$$

definiert. Da in dieser Summe nur nichtnegative Zahlen vorkommen, gilt

$$I(\Phi) = \sum_{k=0}^{\infty} I(\Phi_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \|g_k\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_1 \right) + 2\varepsilon.$$

Auf der anderen Seite ist $\Phi$ eine Hüllreihe für $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$. Daher ist die Behauptung richtig. □

*1.2.9 Bemerkungen.* i) Im Beweis von Teil v) haben wir wesentlichen Gebrauch davon gemacht, dass wir Hüllreihen anstatt endlicher Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von Quadern verwendet haben.

ii) In Teil i) des Satzes gilt nicht, dass aus $\|g\|_1 = 0$ die Gleichung $g = 0$ folgt.

iii) Nach dem obigen Satz hat $\|\cdot\|_1$ zu einer Halbnorm auf einem Vektorraum (s. Definition 1.3.1, a) analoge Eigenschaften. Wir erinnern daran, dass die Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\overline{\mathbb{R}}$ **keinen** $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden (s. Bemerkung 1.2.2).

*1.2.10 Wichtiges Beispiel.* Wir betrachten die charakteristische Funktion der Teilmenge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} . \end{aligned}$$

Diese Funktion ist über kein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Allerdings haben wir $\|\chi_{\mathbb{Q}}\|_1 = 0$. Um das einzusehen, wählen wir eine Abzählung $\alpha \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Wir finden

- $\chi_{\mathbb{Q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{\{\alpha(k)\}}$,
- $0 \leq \|\chi_{\mathbb{Q}}\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_{\{\alpha(k)\}}\|_1$.

Schließlich beachte man, dass $\|\chi_{\{a\}}\|_1 = 0$ für jeden Punkt $a \in \mathbb{R}$ gilt: In der Tat ist $\chi_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine Hüllreihe für $\chi_{\{a\}}$ mit

$$I(\chi_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}) = 2\varepsilon.$$

**1.2.11 Satz.** *Für jede Treppenfunktion $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt*[3]

$$\int |f| \mathrm{d}\mu_n = \|f\|_1.$$

*Beweis.* **Fall 1.** Wir nehmen an, dass $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader ist und $f = \chi_Q$ gilt.

i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen **offenen** Quader $P \subset \mathbb{R}^n$ mit

- $Q \subset P$,
- $\mathrm{Vol}_n(P) \leq \mathrm{Vol}_n(Q) + \varepsilon$.

Damit ist $\chi_P$ eine Hüllreihe für $\chi_Q$, so dass

$$\|f\|_1 \leq \mathrm{Vol}_n(P) \leq \mathrm{Vol}_n(Q) + \varepsilon,$$

und wir sehen

$$\|f\|_1 \leq \mathrm{Vol}_n(Q) = \int f \mathrm{d}\mu_n.$$

ii) Es sei

$$\Phi = (c_k, P_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

eine Hüllreihe von $f$. Wir fixieren $\varepsilon > 0$. Zu jedem $x \in Q$ existiert ein $K(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x) - \varepsilon = 1 - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{K(x)} c_k \cdot \chi_{P_k}.$$

Man beachte, dass für jede offene Umgebung $U$ von $x$ und $y \in U$ die Ungleichung $f(y) \leq 1 = f(x)$ gilt. Nun sei $P$ ein **offener** Quader. Wenn $x \in P$, gibt es eine offene Umgebung $U$ von $x$, so dass $U \subset P$ und folglich $\chi_P(y) = 1 = \chi_P(x)$, $y \in U$. Wenn $x \notin P$, dann gilt für jede Umgebung $U$ von $x$ und jeden Punkt

[3] Man beachte, dass $|f|$ nach Lemma 1.1.13, iv), eine Treppenfunktion ist.

$y \in U$, dass $\chi_P(y) \geq 0 = \chi_P(x)$. Anhand dieser Überlegungen sehen wir, dass wir eine offene Umgebung $U(x)$ von $x$ finden können, so dass

$$\forall y \in U(x): \quad f(y) - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{K(x)} c_k \cdot \chi_{P_k}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$Q \subset \bigcup_{x \in Q} U(x).$$

Da $Q$ kompakt ist ((18), Satz 2.2.4), existieren Punkte $x_1, \ldots, x_s \in Q$, so dass

$$Q \subset U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_s).$$

Mit

$$K := \max\Big\{ K(x_i) \,\Big|\, i = 1, \ldots, s \Big\}$$

gilt

$$(1 - \varepsilon) \cdot f \leq \sum_{k=0}^{K} c_k \cdot \chi_{P_k}$$

und folglich

$$(1 - \varepsilon) \cdot \mathrm{Vol}_n(Q) \leq \sum_{k=0}^{K} c_k \cdot \mathrm{Vol}_n(P_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \mathrm{Vol}_n(P_k).$$

Wir schließen

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \mathrm{Vol}_n(Q) \leq \|f\|_1.$$

Damit ist Fall 1 abgeschlossen.

**Fall 2.** Jetzt darf $f$ eine beliebige Treppenfunktion sein. Indem wir $f$ durch $|f|$ ersetzen, können wir $f \geq 0$ erreichen.

i) Es gibt eine Zerlegung $\underline{Z} = (a_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, l_i)$ von $\mathbb{R}^n$, zu der die Hyperebenen

$$H_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, l_i,$$

und die offenen Quader

$$Q_{\underline{j}} = (a_{1j_1}, a_{1j_1+1}) \times \cdots \times (a_{nj_n}, a_{nj_n+1}), \quad \underline{j} \in J := \Big\{ (j_1, \ldots, j_n) \,\Big|\, 0 \leq j_i \leq l_i, \; i = 1, \ldots, n \Big\}$$

gehören, und nichtnegative reelle Zahlen $c_{\underline{j}}$, $\underline{j} \in J$, so dass

- $c_{\underline{j}} = 0$, falls $Q_{\underline{j}}$ unbeschränkt ist,
- $f_{\mathbb{R}^n \setminus H} = \sum_{\underline{j} \in J} c_{\underline{j}} \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}}$, $H := \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,l_i}} H_{ij}$.

Wir definieren

$$\begin{aligned} f_0 &:= \sum_{\underline{j} \in J} c_{\underline{j}} \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}}, \\ f_H &:= \sum_{k=0}^{\infty} \chi_H, \\ f_+ &:= f_0 + f_H. \end{aligned}$$

Nach Definition 1.1.8, b), gilt

$$\int f_0 \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\mu_n.$$

Weiter haben wir

$$0 \leq f_0 \leq f \leq f_+$$

und daher nach Satz 1.2.8

$$\|f_0\|_1 \leq \|f\|_1 \leq \|f_0\|_1 + \|f_H\|_1.$$

Es gilt ebenfalls nach Satz 1.2.8, dass

$$\|f_H\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_H\|_1 = 0.$$

Dabei wird die Tatsache $\|\chi_H\|_1 = 0$ in Aufgabe A.3.3 überprüft. Wir sehen

$$\|f_0\|_1 = \|f\|_1.$$

Da wir $f_0$ als Hüllreihe für sich selbst ansehen können, erhalten wir sofort

$$\|f\|_1 = \|f_0\| \leq \int f_0 \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\mu_n.$$

ii) Wir arbeiten mit $f_0$ weiter. Diese Funktion ist beschränkt und verschwindet außerhalb einer kompakten Teilmenge. Somit können wir einen Quader $Q$ und eine positive reelle Zahl $M$ so wählen, dass

- $f_0(x) = 0$ für $x \notin Q$,
- $f_0(x) \leq M$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Die Funktion $g := M \cdot \chi_Q - f_0$ ist eine Treppenfunktion, die nur nichtnegative Werte annimmt, und Satz 1.2.8, iii), Fall 1 und Fall 2, i), liefern

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \int f_0 \mathrm{d}\mu_n = M \cdot \int \chi_Q \mathrm{d}\mu_n - \int g \mathrm{d}\mu_n \leq \|M \cdot \chi_Q\|_1 - \|g\|_1 \leq \|f_0\|_1 = \|f\|_1.$$

Damit ist der Beweis der Behauptung vollendet. □

## 1.3 Fortsetzung linearer Funktionale

Es ist bereits klar, wie wir zum Lebesgue-Integral gelangen: Mit Hilfe der $\mathcal{L}^1$-Halbnorm können wir ausdrücken, wann eine Funktion[4] $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen ist. Für eine solche Funktion legen wir das Integral als Grenzwert der bereits definierten Integrale von Treppenfunktionen aus einer approximierenden Folge fest.

Es bedarf verschiedener Routine-Überprüfungen, um sicherzustellen, dass alles wohldefiniert ist. Diese Überprüfungen kann man elegant im Rahmen der topologischen Vektorräume durchführen.

**1.3.1 Definition.** Es sei $V$ ein möglicherweise unendlichdimensionaler reeller Vektorraum.

a) Eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine *Halbnorm* auf $V$, wenn gilt:

[4] Wir arbeiten jetzt wieder mit „endlichen" Werten.

i) $\|0\| = 0$.

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall v \in V: \quad \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.

iii) $\forall v, w \in V: \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

b) Es seien $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $V$ und $I\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Man sagt, dass $I$ *beschränkt* ist, wenn eine positive reelle Zahl $C$, eine sogenannte *Schranke*, existiert, so dass

$$\forall v \in V: \quad |I(v)| \leq C \cdot \|v\|.$$

c) Es seien $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $V$, $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist

$$B(a, r) := \Big\{ v \in V \,\Big|\, \|v - a\| < r \Big\}.$$

d) Es sei $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $V$. Eine Teilmenge $U \subset V$ ist *offen*, wenn es zu jedem Punkt $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B(a, \varepsilon) \subset U$.

*1.3.2 Bemerkung.* i) Es seien $V$ ein reeller Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $V$. Dann folgt aus

$$0 = \|0\| = \|v - v\| \leq \|v\| + |-1| \cdot \|v\| = 2 \cdot \|v\|, \quad v \in V,$$

dass $\|\cdot\|$ nur nichtnegative Werte annimmt. Es ist allerdings erlaubt, dass ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\|v\| = 0$ existiert.

ii) Man überprüft, dass

$$N := \Big\{ v \in V \,\Big|\, \|v\| = 0 \Big\}$$

ein Untervektorraum ist und dass durch $\|\cdot\|$ eine **Norm** auf $V/N$ induziert wird (vgl. Seite 30).

**1.3.3 Lemma.** *Es seien $V$ ein reeller Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $V$. Dann ist*

$$\mathcal{T} := \Big\{ U \subset V \,\Big|\, U \text{ ist offen} \Big\}$$

*eine Topologie auf $V$.*

*Beweis.* Übung für den Leser bzw. die Leserin. □

*1.3.4 Bemerkung.* Wenn $\|\cdot\|$ **keine** Norm ist, dann ist die Topologie auf $V$, die von $\|\cdot\|$ induziert wird, **nicht** hausdorffsch. Denn in diesem Fall gibt es einen Vektor $v \neq 0$ in $V$ mit $\|v\| = 0$. Das Hausdorff-Axiom ((18), Abschnitt 1.5) ist für 0 und $v$ verletzt (s. Aufgabe A.1.4).

**1.3.5 Lemma.** *Es seien $V$ ein reeller Vektorraum, $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $V$ und $I\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Dann ist $I$ genau dann stetig, wenn $I$ beschränkt ist.*

*Beweis.* Der Beweis für normierte Vektorräume ((18), Satz 3.7.1) lässt sich ohne große Mühe übertragen: Wir nehmen zunächst an, dass $I$ stetig ist.

**Behauptung.** *Für einen Vektor $v \in V$ gilt:*

$$\|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad I(v) = 0.$$

Um diese Aussage zu verstehen, wählen wir einen Vektor $v \in V$ mit $\|v\| = 0$ und $l(v) \neq 0$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $l(v) \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wegen der Stetigkeit von $l$ ist $U := l^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$ eine offene Umgebung von 0, die $v$ nicht enthält. Nach Aufgabe A.1.4 ist das unmöglich. $\surd$

Auf Grund der Stetigkeit ist das Urbild des offenen Intervalls $(-1, 1)$ unter $l$ eine offene Teilmenge von $V$. Es existiert weiter ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall v \in V: \quad \|v\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |l(v)| < 1.$$

Sei

$$C := \frac{2}{\delta}.$$

Für einen Vektor $v \in V$ mit $\|v\| = 0$ ist die Aussage des Lemmas nach der obigen Behauptung richtig. Falls $\|v\| \neq 0$, setzen wir

$$\lambda_v := \frac{1}{C \cdot \|v\|} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Wegen

$$\|\lambda_v \cdot v\| = \lambda_v \cdot \|v\| = \frac{1}{C} = \frac{\delta}{2} < \delta$$

können wir

$$\lambda_v \cdot |l(v)| = |l(\lambda_v \cdot v)| < 1 = \lambda_v \cdot C \cdot \|v\|$$

und damit

$$|l(v)| \leq C \cdot \|v\|$$

schließen. Damit ist gezeigt, dass $l$ beschränkt ist.

Nun setzen wir voraus, dass $l$ beschränkt ist, und wählen eine Schranke $C$. Es ist zu zeigen, dass $U := l^{-1}(J)$ für jede offene Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$ offen ist. Sei $v_0 \in U$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $(l(v_0) - \varepsilon, l(v_0) + \varepsilon) \subset J$. Wir setzen $\delta := \varepsilon / C$ und beobachten

$$\forall v \in V: \quad \|v - v_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |l(v) - l(v_0)| = |l(v - v_0)| \leq C \cdot \delta = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l(v) \in J.$$

Damit gilt $B(v_0, \delta) \subset U$. Da $v_0 \in U$ beliebig gewählt werden kann, folgt, dass $U$ offen ist. $\square$

**1.3.6 Satz.** *Es seien $V$ ein reeller Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $V$. Für eine Teilmenge $A \subset V$ ist der Abschluss durch*

$$\overline{A} = \left\{ v \in V \,\middle|\, \exists \text{ Folge } (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_k \in A,\ k \in \mathbb{N}, \text{ und } \lim_{k \to \infty} \|v - a_k\| = 0 \right\}$$

*gegeben.*

*Beweis.* **Schritt 1.** Wir beweisen als erstes, dass

$$B := \left\{ v \in V \,\middle|\, \exists \text{ Folge } (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_k \in A,\ k \in \mathbb{N}, \text{ und } \lim_{k \to \infty} \|v - a_k\| = 0 \right\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge ist, indem wir nachweisen, dass das Komplement $Z := V \setminus B$ offen ist. Wenn $Z$ nicht offen wäre, dann existierte $v_0 \in Z$, so dass

$$\forall \varepsilon > 0: \quad B\left(v_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B \neq \varnothing.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein Element $v \in B$ mit

$$\|v - v_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und weiter eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{k\to\infty} \|v - a_k\| = 0.$$

Wir wählen einen Index $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\|v - a_K\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und beobachten sodann

$$\|v_0 - a_K\| \leq \|v - v_0\| + \|v - a_K\| < \varepsilon,$$

d.h.

$$B(v_0, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

Wenn $Z$ nicht offen wäre, könnten wir eine Folge $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\alpha_k \in B\left(v_0, \frac{1}{k+1}\right) \cap A, \quad k \in \mathbb{N},$$

definieren. Damit gälte

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|v_0 - \alpha_k\| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Es folgte $v_0 \in B$, ein Widerspruch zu unserer Wahl von $v_0$.

**Schritt 2.** Da der Abschluss $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $V$ ist, die $A$ enthält, und $B$ nach Schritt 1 eine abgeschlossene Teilmenge ist, die $A$ enthält, bleibt zu zeigen, dass jede abgeschlossene Teilmenge von $V$, die $A$ enthält, auch $B$ enthält. Sei also $C$ eine abgeschlossene Teilmenge von $V$, so dass $A \subset C$. Wir nehmen $B \not\subset C$ an und wählen $v_0 \in B \setminus C$. Da $C$ abgeschlossen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(v_0, \varepsilon) \cap C = \varnothing$. Wegen $A \subset C$ und $v_0 \in B$ existiert eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $c_k \in C$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{k\to\infty} \|v_0 - c_k\| = 0.$$

Die Existenz dieser Folge verträgt sich nicht mit der Gleichung $B(v_0, \varepsilon) \cap C = \varnothing$. □

**1.3.7 Satz.** *Es seien $V$ ein reeller Vektorraum, $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $V$, $W \subset V$ ein Untervektorraum und $l\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ eine* ***beschränkte*** *lineare Abbildung.*

i) *Der Abschluss $\overline{W} \subset V$ von $W$ ist ebenfalls ein Untervektorraum von $V$.*

ii) *Es gibt genau eine beschränkte lineare Abbildung $\overline{l}\colon \overline{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\overline{l}_{|W} = l$.*

*Beweis.* i) Es seien $v \in \overline{W}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gibt eine Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $w_k \in W$, $k \in \mathbb{N}$, und $\lim_{k\to\infty} \|w_k - v\| = 0$. Für die Folge $(\lambda \cdot w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt $\lambda \cdot w_k \in W$, $k \in \mathbb{N}$, weil $W$ ein Untervektorraum ist, und

$$\lim_{k\to\infty} \|\lambda \cdot w_k - \lambda \cdot v\| = \lambda \cdot \lim_{k\to\infty} \|w_k - v\| = 0.$$

Es folgt $\lambda \cdot v \in \overline{W}$.

Es seien $v, v' \in \overline{W}$. Dann gibt es Folgen $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $v_k, v'_k \in W$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k - v\| = 0 = \lim_{k\to\infty} \|v'_k - v'\|.$$

Wir bilden die Folge $(v_k + v'_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Da $W$ ein Untervektorraum ist, gilt $v_k + v'_k \in W$, $k \in \mathbb{N}$. Weiter haben wir

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|(v_k + v'_k) - (v + v')\| \leq \lim_{k\to\infty} \|v_k - v\| + \lim_{k\to\infty} \|v'_k - v'\| = 0.$$

Damit erkennen wir $v + v' \in \overline{W}$.

ii) Wir überzeugen uns zunächst von der Eindeutigkeit. Für einen Vektor $v \in \overline{W}$ wählen wir eine Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $w_k \in W$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k - v\| = 0.$$

Auf Grund der Beschränktheit von $\overline{l}$ gilt

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |\overline{l}(w_k) - \overline{l}(v)| = \lim_{k\to\infty} |\overline{l}(w_k - v)| \leq C \cdot \lim_{k\to\infty} \|w_k - v\| = 0.$$

Dabei sei $C$ eine Schranke für $\overline{l}$. Daraus folgt

$$\overline{l}(v) = \lim_{k\to\infty} \overline{l}(w_k) = \lim_{k\to\infty} l(w_k),$$

und wir sehen, dass $\overline{l}$ durch $l$ festgelegt ist.

Im nächsten Schritt wählen wir zu $v \in \overline{W}$ eine Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $w_k \in W$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k - v\| = 0.$$

**Behauptung.** *Die Folge $(l(w_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

Es genügt zu zeigen, dass $(l(w_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen einen Index $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\|w_k - v\| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot C}, \quad k \geq K.$$

Für $k, l \geq K$ gilt dann

$$|l(w_k) - l(w_l)| = |l(w_k - w_l)| \leq C \cdot \|w_k - w_l\| \leq C \cdot \big(\|w_k - v\| + \|w_l - v\|\big) < \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung überprüft. $\surd$

Wir versuchen es also mit der Definition

$$\overline{l}(w) := \lim_{k\to\infty} l(w_k).$$

Wir müssen uns vergewissern, dass dies wohldefiniert ist. Für Folgen $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(w'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $w_k, w'_k \in W$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k - v\| = 0 = \lim_{k\to\infty} \|w'_k - v\|$$

sieht man

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} |l(w_k) - l(w'_k)| &= \lim_{k\to\infty} |l(w_k - w'_k)| \\
&\leq C \cdot \lim_{k\to\infty} \|w_k - w'_k\| \\
&\leq C \cdot \Big(\lim_{k\to\infty} \|w_k - v\| + \lim_{k\to\infty} \|w'_k - v\|\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Anders gesagt gilt

$$\lim_{k\to\infty} l(w_k) = \lim_{k\to\infty} l(w'_k).$$

Es wird der Leserin bzw. dem Leser überlassen, die Linearität von $\bar{I}$ nachzuweisen.

Zum Schluss zeigen wir, dass $\bar{I}$ beschränkt ist. Für einen Vektor $v \in \overline{W}$ und eine Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $w_k \in W$, $k \in \mathbb{N}$, und $\lim_{k\to\infty} \|w_k - v\| = 0$ gilt wegen

$$\big|\|w_k\| - \|v\|\big| \leq \|w_k - v\|, \quad k \in \mathbb{N},$$

dass

$$\|v\| = \lim_{k\to\infty} \|w_k\| \tag{1.4}$$

und daher

$$|\bar{I}(v)| = \lim_{k\to\infty} |I(w_k)| \leq C \cdot \lim_{k\to\infty} \|w_k\| = C \cdot \|v\|.$$

Man beachte, dass wir die Schranke $C$ von $I$ übernehmen konnten. □

## 1.4 Definition des Lebesgue-Integrals

Wir wenden die Ergebnisse des letzten Abschnitts an, um Lebesgue-integrierbare Funktionen und ihr Lebesgue-Integral zu definieren.

Wir setzen

$$V := \Big\{ f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \,\Big|\, \|f\|_1 < \infty \Big\}.$$

Nach Satz 1.2.8 ist

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1\colon V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\|_1 \end{aligned}$$

eine Halbnorm auf $V$. Es sei weiter

$$W := \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Auf Grund von Lemma 1.1.13 ist

$$\begin{aligned} I\colon W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \int \varphi \mathrm{d}\mu_n = I(\varphi) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

*1.4.1 Bemerkung.* Es gilt $-|\varphi| \leq \varphi \leq |\varphi|$ und deshalb nach Lemma 1.1.13 und Satz 1.2.11

$$-\|\varphi\|_1 = -\int |\varphi| \mathrm{d}\mu_n \leq \int \varphi \mathrm{d}\mu_n \leq \int |\varphi| \mathrm{d}\mu_n = \|\varphi\|_1.$$

Damit erkennen wir, dass $I$ beschränkt ist und wir $C = 1$ in Definition 1.3.1, b), wählen können.

**1.4.2 Definition.** a) Der *Vektorraum der Lebesgue-integrierbaren Funktion* ist

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \overline{W}.$$

b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *Lebesgue-integrierbar*, wenn sie dem Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ angehört.

c) Das *Lebesgue-Integral* einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\int f \mathrm{d}\mu_n := \bar{I}(f).$$

*1.4.3 Bemerkung.* Auf Grund der Konstruktionen und Ergebnisse aus Abschnitt 1.3 ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $\|f\|_1 < \infty$ und es eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0.$$

Es gilt dann weiter

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \mathrm{d}\mu_n.$$

**1.4.4 Satz.** i) *Das Lebesgue-Integral*

$$\begin{aligned} \int : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int f \mathrm{d}\mu_n \end{aligned}$$

*ist eine beschränkte lineare Abbildung, so dass*

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n): \quad \left| \int f \mathrm{d}\mu_n \right| \leq \|f\|_1.$$

ii) *Es seien* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, *eine Folge und* $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *so dass* $\|f\|_1 < \infty$ *und*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = 0.$$

*Dann ist auch* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

iii) *Für* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\int |f| \mathrm{d}\mu_n = \|f\|_1.$$

*Beweis.* Teil i) und ii) sind in Satz 1.3.6 und 1.3.7 enthalten. Für iii) wählen wir eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0.$$

Dann ist $(|\varphi_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen (Lemma 1.1.13, iv), für die wegen

$$\big||f| - |\varphi_k|\big| \leq |f - \varphi_k|, \quad k \in \mathbb{N},$$

auch

$$\lim_{k\to\infty} \big\||f| - |\varphi_k|\big\|_1 = 0$$

gilt. Das zeigt $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Weiter sehen wir mit Satz 1.2.11 und (1.4)

$$\int |f| \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int |\varphi_k| \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_1 = \|f\|_1$$

und beenden damit den Beweis. □

*1.4.5 Bemerkung.* Die Definition des Lebesgue-Integrals ist sehr abstrakt. Bei den Beweisen muss man deshalb sehr sorgfältig vorgehen, und es verbergen sich einige Feinheiten hinter dem Begriff. Mit Satz 3.A.10 wird sich z.B. die Eigenschaft

$$|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \not\Rightarrow \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n).$$

ergeben.[5]

**1.4.6 Definition.** Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}\colon \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases} \end{array}.$$

a) Die Funktion $f$ ist *über $A$ integrierbar*, wenn $\overline{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Falls $f$ über $A$ integrierbar ist, definiert man

$$\int_A f \mathrm{d}\mu_n := \int \overline{f} \mathrm{d}\mu_n.$$

b) Es ist

$$\mathcal{L}^1(A) := \left\{ f\colon A \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ ist über } A \text{ integrierbar} \right\}.$$

*1.4.7 Beispiele.* i) Die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1$, ist über $\mathbb{Q}$ integrierbar.

ii) Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist $f$ über $[a,b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{[a,b]} f \mathrm{d}\mu_1 = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

(Die Details überlassen wir dem Leser bzw. der Leserin. Die Diskussion zu Beginn von Abschnitt 1.2 zeigt alles Wesentliche.)

**1.4.8 Vorsicht.** Die Existenz des **uneigentlichen** Riemann-Integrals beinhaltet nicht automatisch die Existenz des entsprechenden Lebesgue-Integrals (s. Beispiel 2.2.4, iii).

## 1.5 Nullmengen

Wir haben bereits gesehen, dass für die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

die Formel

$$\int f \mathrm{d}\mu_1 = 0$$

gilt. Allgemeiner überlegt man sich, dass

$$\int f \mathrm{d}\mu_1 = \int g \mathrm{d}\mu_1$$

für zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt. Die Teilmenge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist also in Hinblick auf die Lebesguesche Integrationstheorie uninteressant.

[5] Für ein Gegenbeispiel in der Riemann-Integration betrachte man die Abbildung $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1$, falls $x \in \mathbb{Q}$, und $x \longmapsto -1$, falls $x \notin \mathbb{Q}$. Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar. Die Funktion $|f|$ ist die Zuordnung $x \longmapsto 1$ und damit Riemann-integrierbar. In der Lebesgue-Integration findet man ein Beispiel, das von der Idee her ähnlich ist, dessen Rechtfertigung allerdings sehr aufwändig ist (Satz 3.A.10).

Bereits in der Definition des Volumens eines Quaders haben die Seitenflächen keine Rolle gespielt.

Wir wollen uns nun mit solchen für die Integrationstheorie unerheblichen Mengen beschäftigen.

Schließlich werden wir erklären, wie wir von dem Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Halbnorm $\|\cdot\|_1$ zu dem normierten Vektorraum $(\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ übergehen (vgl. Bemerkung 1.3.2, ii).

**1.5.1 Definition.** Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, wenn

$$\|\chi_N\|_1 = 0$$

gilt.

**1.5.2 Lemma** (Neue Nullmengen aus alten)**.** i) *Es seien $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $M \subset N$ eine Teilmenge. Dann ist auch $M$ eine Nullmenge.*

ii) *Es seien $I$ eine* ***abzählbare*** *Indexmenge und $N_i$, $i \in I$, eine Familie von Nullmengen. Dann ist*

$$\bigcup_{i \in I} N_i$$

*ebenfalls eine Nullmenge.*

*Beweis.* i) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$0 \leq \chi_M(x) \leq \chi_N(x).$$

Daraus folgt nach Satz 1.2.8, iv),

$$0 \leq \|\chi_M\|_1 \leq \|\chi_N\|_1 = 0,$$

so dass $\|\chi_M\|_1 = 0$.

ii) Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $I = \mathbb{N}$. Für $M = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$ gilt

$$0 \leq \chi_M \leq \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{N_k}.$$

Aus Satz 1.2.8, v), folgt jetzt

$$0 \leq \|\chi_M\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{N_k} \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_{N_k}\|_1 = 0.$$

Daher ist $M$ eine Nullmenge. □

*1.5.3 Beispiel.* i) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\{x\}$ eine Nullmenge (s. Beispiel 1.2.10). Aus Teil ii) des obigen Lemmas ergibt sich, dass jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Nullmenge ist. Es gibt allerdings auch Nullmengen in $\mathbb{R}$, die nicht abzählbar sind (s. Aufgabe A.2.4).

ii) Für beschränkte Intervalle $I_2, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ ist

$$Q = \{0\} \times I_2 \times \cdots \times I_n$$

eine Nullmenge. Damit ist auch

$$H := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1 = 0 \right\}$$

eine Nullmenge, denn

$$H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{0\} \times [-k, k]^{\times(n-1)}.$$

iii) Die Teilmenge $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist keine Nullmenge.

**1.5.4 Satz** (Charakterisierung von Nullmengen). *Für eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

i) *Die Menge $N$ ist eine Nullmenge.*

ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren* ***offene*** *Quader $Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, so dass*

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_k) < \varepsilon$,
- $\displaystyle N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$.

iii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren Quader $Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, so dass*

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_k) < \varepsilon$,
- $\displaystyle N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$.

*Beweis.* Der Implikation „ii)⇒iii)" ist trivial. Wir fahren mit „iii)⇒i)" fort. Wegen $N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ gilt nach Satz 1.2.8, v),

$$0 \le \|\chi_N\|_1 \le \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_{Q_k}\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_k).$$

Die Voraussetzung sagt also

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \|\chi_N\|_1 < \varepsilon, \quad \text{d.h.} \quad \|\chi_N\|_1 = 0$$

aus.

„i)⇒ii)". Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Hüllreihe $\Phi = (c_k, P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\chi_N \le \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \chi_{P_k} \quad \text{und} \quad I(\Phi) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sei

$$h_m := \sum_{k=0}^{m} c_k \cdot \chi_{P_k}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \le h_m \le h_{m+1}.$$

Da $h_m$ eine Treppenfunktion ist, existiert eine an $h_m$ angepasste Zerlegung $\underline{Z}_m$ von $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$. Dazu gehört die endliche Familie

$$\mathcal{H}_m := \left\{ H_{ij}^m \,\middle|\, i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, l_i^m \right\}$$

von Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$, die Indexmenge $J_m$ und die Quader $Q_{\underline{j}}^m$, $\underline{j} \in J_m$. Wir können voraussetzen, dass

$$\forall m \in \mathbb{N}: \quad \underline{Z}_{m+1} \preceq \underline{Z}_m. \tag{1.5}$$

Seien

$$M_m = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,l_i^m}} H_{ij}^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad M = \bigcup_{m=0}^{\infty} M_m.$$

Die Menge $M$ ist eine Nullmenge. Weiter ist $M \cap N$ nach Lemma 1.5.2, i), eine Nullmenge. Die Menge $M$ kann mit Quadern überdeckt werden, deren Volumen sich zu einem Wert $<(\varepsilon/2)$ aufaddieren (Aufgabe A.3.3). Es bleibt zu zeigen, dass dies auch für $N \setminus M$ funktioniert. Wir schreiben

$$h_{m|\mathbb{R}^n \setminus M_m} = \sum_{\underline{j} \in J_m} \alpha_{\underline{j}}^m \cdot \chi_{Q_{\underline{j}}^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

**Schritt 1.** Sei

$$\widehat{J}_1 := \left\{ \underline{j} \in J_1 \,\middle|\, \alpha_{\underline{j}}^1 \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Mit

$$\frac{\varepsilon}{4} > I(\Phi) \geq I(h_1) \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{\underline{j} \in \widehat{J}_1} \mathrm{Vol}_n(Q_{\underline{j}}^1)$$

ergibt sich

$$\sum_{\underline{j} \in \widehat{J}_1} \mathrm{Vol}_n(Q_{\underline{j}}^1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

**Schritt 2.** Wir erinnern an (1.5). Wenn $\underline{j} \in J_2$ ein Index ist, zu dem ein Index $\underline{j}' \in \widehat{J}_1$ mit $Q_{\underline{j}}^2 \subset Q_{\underline{j}'}^1$ existiert, dann gilt

$$\alpha_{\underline{j}}^2 \geq \alpha_{\underline{j}'}^1 \geq \frac{1}{2}$$

wegen $h_2 \geq h_1$. Wir setzen[6]

$$\widehat{J}_2 := \left\{ \underline{j} \in J_2 \,\middle|\, \alpha_{\underline{j}}^2 \geq \frac{1}{2} \wedge \forall \underline{j}' \in \widehat{J}_1 : Q_{\underline{j}}^2 \not\subset Q_{\underline{j}'}^1 \right\}.$$

Es gilt[7]

$$\frac{\varepsilon}{4} > I(\Phi) \geq I(h_2) \geq \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{\underline{j} \in \widehat{J}_1} \mathrm{Vol}_n(Q_{\underline{j}}^1) + \sum_{\underline{j} \in \widehat{J}_2} \mathrm{Vol}_n(Q_{\underline{j}}^2) \right).$$

Wir schließen

$$\sum_{\underline{j} \in \widehat{J}_1} \mathrm{Vol}_n(Q_{\underline{j}}^1) + \sum_{\underline{j} \in \widehat{J}_2} \mathrm{Vol}_n(Q_{\underline{j}}^2) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

**Schritt 3.** Die obige Konstruktion lässt sich iterieren. Wir erhalten die Menge

$$\widehat{J} := \bigsqcup_{m \geq 1} \widehat{J}_m.$$

Für $\underline{j} \in \widehat{J}_m$ setzen wir

$$Q_{\underline{j}} := Q_{\underline{j}}^m, \quad m \geq 1.$$

Durch eine Abzählung von $\widehat{J}$ gelangen wir zu den Quadern $Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

[6] Da $\underline{Z}_2$ eine Verfeinerung von $\underline{Z}_1$ ist, impliziert $Q_{\underline{j}}^2 \not\subset Q_{\underline{j}'}^1$, dass $Q_{\underline{j}}^2 \cap Q_{\underline{j}'}^1 = \varnothing$.

[7] Man beachte, dass die auftretenden Quader disjunkt sind.

Wir müssen uns noch davon überzeugen, dass

$$N \setminus M \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k.$$

Das folgt aus der Formel

$$\forall x \in N: \quad \lim_{m\to\infty} h_m(x) \geq 1,$$

die nach der Definition einer Hüllreihe gilt. □

*1.5.5 Bemerkung.* Die Unterteilung in $N \cap M$ und $N \setminus M$ ist notwendig, weil wir für die Volumenabschärzung im zweiten Teil (z.B. in (1.6)) Quader benötigen, die sich nur am Rand überlappen. Da wir offene Quader wollen, müssen sie disjunkt sein und die Hyperebenen „bleiben übrig".

**1.5.6 Lemma.** *Es sei $f\colon \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Dann ist der Graph*

$$\Gamma_f := \Big\{ \big(x, f(x)\big) \,\big|\, x \in \mathbb{R}^{n-1} \Big\}$$

*eine Nullmenge.*

*1.5.7 Bemerkung.* Wenn man die Voraussetzung der Stetigkeit weglässt, dann ist die Aussage falsch. Es gibt nicht stetige Funktionen, deren Graph nicht messbar ist. Ihre Konstruktion ist aber sehr aufwändig und benutzt Hilfsmittel aus der Mengenlehre (Satz 3.A.43).

*Beweis.* Für $k \geq 1$ sei

$$W_k := [-k, k]^{\times(n-1)}.$$

Da eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist, genügt es nachzuweisen, dass

$$\Gamma_f \cap (W_k \times \mathbb{R})$$

für jedes $k \geq 1$ eine Nullmenge ist. Da $W_k$ kompakt ist, ist die Funktion $f$ auf $W_k$ gleichmäßig stetig (s. (18), Satz 3.5.4). Zu $\varepsilon > 0$ findet man ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\forall x, y \in W_k: \quad \|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1}}, \quad k \geq 1.$$

Für $k \geq 1$ fixieren wir eine natürliche Zahl

$$l > \frac{\sqrt{n-1} \cdot 2k}{\delta}$$

und unterteilen $W_k$ in $l^{n-1}$ Würfel $V_1, \ldots, V_{l^{n-1}}$ der Kantenlänge $2k/l$. Für $i \in \{1, \ldots, l^{n-1}\}$ und $x, y \in V_i$ gilt

$$\|x - y\| \leq \sqrt{n-1} \cdot \max\Big\{ |x_i - y_i| \,\Big|\, i = 1, \ldots, n-1 \Big\} < \frac{\sqrt{n-1} \cdot 2k}{l} < \delta.$$

Wir schließen

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1}}.$$

Das Bild von $V_i$ unter $f$ ist ein kompaktes Intervall der Länge $< \varepsilon/(2k)^{n-1}$, und $\Gamma_f \cap (V_i \times \mathbb{R})$ liegt in einem Quader, dessen Volumen kleiner als

$$\left(\frac{2k}{l}\right)^{n-1} \cdot \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{l^{n-1}}$$

ist, $i = 1, \ldots, l^{n-1}$. Wir sehen, dass $\Gamma_f \cap (W_k \times \mathbb{R})$ in einer Vereinigung von Quadern enthalten ist, deren Volumen sich zu einem Wert $< \varepsilon$ aufaddieren. □

**1.5.8 Sprechweise.** Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, die Punkte aus $M$ haben können. Wir sagen, $\mathcal{E}$ gilt für *fast alle* $x \in M$ oder *fast überall auf* $M$, wenn es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\mathcal{E}$ für alle $x \in M \setminus N$ gilt.

**1.5.9 Satz.** i) *Es seien* $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *eine Funktion und*

$$\operatorname{supp}(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(x) \neq 0 \right\}.$$

*Dann sind äquivalent:*

- $\|f\|_1 = 0$.
- $\operatorname{supp}(f)$ *ist eine Nullmenge,*

ii) *Es seien* $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei Funktionen. Es gelte* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, *und*

$$N := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(x) \neq g(x) \right\}$$

*sei eine Nullmenge. Dann folgt* $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \int g \mathrm{d}\mu_n.$$

*1.5.10 Bemerkung.* Wenn $\|f - g\|_1 = 0$, dann hat man $\|f\|_1 = \|g\|_1$.

*Beweis.* i) Wir beginnen mit der Implikation „$\Rightarrow$": Wegen

$$\|f\|_1 = \big\||f|\big\|_1$$

können wir $f \geq 0$ voraussetzen. Mit

$$S_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(x) \geq \frac{1}{k} \right\}, \quad k \geq 1,$$

gilt

$$S := \operatorname{supp}(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Wir haben $k \cdot f \geq \chi_{S_k}$ und somit

$$0 = \|k \cdot f\|_1 \geq \|\chi_{S_k}\|_1 \geq 0, \quad k \geq 1.$$

Damit ist $S_k$ für alle $k \geq 1$ eine Nullmenge und daher auch $S$.

„$\Leftarrow$": Wie zuvor sei $S := \operatorname{supp}(f)$. Offensichtlich gilt

$$f \leq \sum_{k=0}^{\infty} \chi_S.$$

Eine Anwendung von Satz 1.2.8, v), zeigt[8]

$$0 \leq \|f\|_1 \leq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \chi_S \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_S\|_1 = 0.$$

[8] Dieses Argument illustriert, wieso es günstig ist, den Wert $\infty$ als Funktionswert zuzulassen. Außerdem erkennen wir wieder die Regel „$0 \cdot \infty = 0$".

ii) Wir wählen eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}\|f-\varphi_k\|_1 = 0$. Aus der Voraussetzung und Teil i) folgt $\|f-g\|_1 = 0$. Zusammen mit Bemerkung 1.5.10 ergibt sich $\|g\|_1 = \|f\|_1 < \infty$ und

$$\|f-\varphi_k\|_1 = \|g-\varphi_k\|_1, \quad k \geq 1,$$

so dass auch

$$\lim_{k\to\infty}\|g-\varphi_k\|_1 = 0.$$

Dies beinhaltet $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int g\mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty}\int \varphi_k \mathrm{d}\mu_n = \int f\mathrm{d}\mu_n.$$

Jetzt ist alles gezeigt. □

Wir können jetzt das in Bemerkung 1.3.2, ii), erwähnte Verfahren anwenden. Dazu seien

$$N := \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|f\|_1 = 0 \right\}$$

und

$$\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/N.$$

Nach Bemerkung 1.5.10 ist

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 \colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\longmapsto \|f\|_1 \end{aligned}$$

wohldefiniert. Es ist klar, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist, die sogenannte $\mathrm{L}^1$-*Norm*. Weiter ist

$$\begin{aligned} \int \colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [f] &\longmapsto \int f\mathrm{d}\mu_n \end{aligned}$$

nach Teil ii) des Satzes eine wohldefinierte lineare Abbildung.

**1.5.11 Konvention.** a) Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion und $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, so dass $\|f-g\|_1 = 0$. Wir schreiben dann etwas missbräuchlich $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und setzen

$$\int f\mathrm{d}\mu_n := \int g\mathrm{d}\mu_n.$$

Nach dem Satz ist dies unabhängig von der Auswahl von $g$.

b) Es seien $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $f\colon \mathbb{R}^n \setminus N \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über $\mathbb{R}^n \setminus N$ integrierbar ist. Dann schreiben wir auch $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int f\mathrm{d}\mu_n := \int_{\mathbb{R}^n\setminus N} f\mathrm{d}\mu_n.$$

Diese Schreibweise erhält ihre Berechtigung ebenfalls aus dem vorangegangenen Satz.

## 1.6 Der Satz von Riesz–Fischer

Wir zeigen, dass der Vektorraum $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Norm $\|\cdot\|_1$ vollständig ist.

**1.6.1 Satz** (Der Satz von Riesz–Fischer[9]). *Der normierte Vektorraum* $(\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ *ist ein Banach-Raum.*

*Beweis.* Wir müssen beweisen, dass jede Cauchy-Folge in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Sei also $([f_k])_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, so dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_k - f_l\|_1 < \varepsilon, \quad k, l \geq K,$$

gibt. Wir definieren die Auswahlfolge $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ durch $k_0 := 0$ und

$$k_l := \min\left\{ K \in \mathbb{N} \,\middle|\, K > k_{l-1} \wedge \forall k, m \geq K : \ \|f_k - f_l\|_1 < \frac{1}{2^l} \right\}, \quad l \geq 1,$$

und setzen

$$g_l := f_{k_{l+1}} - f_{k_l}, \quad l \geq 1,$$

sowie

$$g := \sum_{l=1}^{\infty} |g_l|.$$

Wir schätzen

$$\|g\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_l\|_1 \leq 1$$

ab. Die Menge

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, g(x) = \infty \right\}$$

ist eine Nullmenge, denn es gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad 0 \leq k \cdot \chi_A \leq g \quad \text{und} \quad 0 \leq k \cdot \|\chi_A\|_1 = \|k \cdot \chi_A\|_1 \overset{\text{Satz 1.2.8, iv)}}{\leq} \|g\|_1.$$

Weiter erklären wir die Funktion[10]

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f_{k_1}(x) + \sum_{l=1}^{\infty} g_l(x) = \lim_{l\to\infty} f_{k_l}(x), & \text{falls } g(x) < \infty \\ 0, & \text{falls } g(x) = \infty \end{cases} . \end{aligned}$$

Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &\leq \|f - f_{k_1}\|_1 + \|f_{k_1}\|_1 \\ &= \left\| \sum_{l=1}^{\infty} g_l \right\|_1 + \|f_{k_1}\|_1 \\ &\leq 1 + \|f_{k_1}\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen im Raum der Funktionen $h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\|h\|_1 < \infty$ ist, müssen wir noch zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0$$

gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Index $\lambda \in \mathbb{N}$, so dass

[9] Ernst Sigismund Fischer (1875 - 1954), österreichischer Mathematiker.

[10] Man benutzt, dass absolute Konvergenz Konvergenz impliziert ((17), Lemma 2.8.2).

- $\forall k \geq k_\lambda : \quad \|f_k - f_{k_\lambda}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$,
- $\|f - f_{k_\lambda}\|_1 = \left\| \sum_{l=\lambda}^{\infty} g_l \right\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Somit finden wir für $k \geq k_\lambda$

$$\|f - f_k\|_1 = \|f - f_{k_\lambda}\|_1 + \|f_k - f_{k_\lambda}\|_1 < \varepsilon$$

und haben damit den Satz bewiesen. □

*1.6.2 Bemerkung.* Es gilt

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n,$$

denn

$$\left| \int f \mathrm{d}\mu_n - \int f_k \mathrm{d}\mu_n \right| = \left| \int (f - f_k) \mathrm{d}\mu_n \right| \leq \|f - f_k\|_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

*1.6.3 Bemerkung* (Vergleich von $L^1$-Konvergenz und punktweiser Konvergenz).
i) Wir betrachten eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0.$$

Es folgt **nicht**, dass

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(Allerdings zeigt der Beweis des Satzes von Riesz–Fischer, dass es eine Teilfolge $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass

$$\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n$$

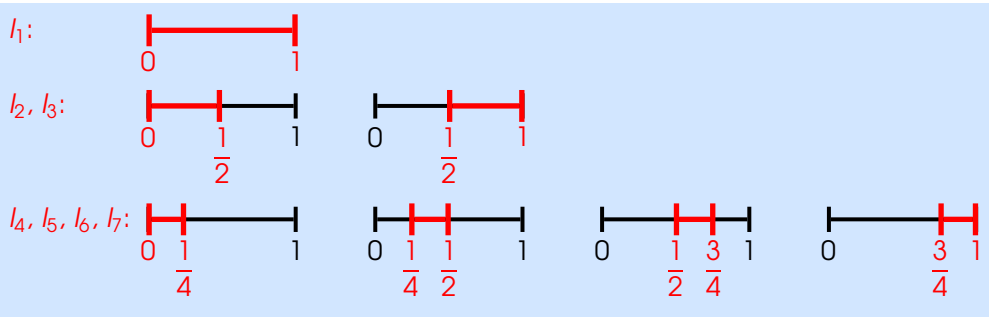
gilt.)

Ein Beispiel liefert der sogenannte *wandernde Buckel*: Zu $k \geq 1$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $v(k)$ und $r(k) < 2^{v(k)}$, so dass

$$k = 2^{v(k)} + r(k).$$

Damit definieren wir

$$\begin{aligned} I_k &:= \left[ r(k) \cdot 2^{-v(k)}, (r(k)+1) \cdot 2^{-v(k)} \right], \\ f_k &:= \chi_{I_k}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$



Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = 0.$$

Es gibt aber keinen Punkt $x \in [0,1]$, so dass $(f_k(x))_{k\geq 1}$ konvergiert. Das liegt daran, dass es für jedes $v \geq 1$ ein bis zwei Intervalle der Länge $2^{-v}$ unter den $I_k$, $k \geq 1$, gibt, die $x$ enthalten.

Auf der anderen Seite gilt für die Teilfolge $(f_{2^v})_{v\in\mathbb{N}}$ und $x \in (0,1]$, dass

$$\lim_{v\to\infty} f_{2^v}(x) = 0.$$

Die Folge $(f_{2^v})_{v\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,1]$ fast überall punktweise gegen die Nullfunktion.

ii) Eine andere wichtige Tatsache ist, dass punktweise Konvergenz einer Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ nicht die Konvergenz in der $L^1$-Norm impliziert. Genauer gesagt können wir aus

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n$$

**nicht** folgern, dass

- $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0,$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\mu_n.$

Als Beispiel betrachten wir

$$I_k := \left[0, \frac{1}{k}\right]$$

und

$$f_k := k \cdot \chi_{I_k}, \quad k \geq 1.$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0.$$

Auf der anderen Seite findet man

$$\|f_k\|_1 = \int f_k \mathrm{d}\mu_1 = 1, \quad k \geq 1.$$

# Kapitel 2

# Konvergenzsätze

## 2.1 Der Satz von Beppo Levi

Der Hauptvorteil des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral ist die gute Verträglichkeit mit Grenzübergängen. In diesem Abschnitt beweisen wir den ersten von zwei berühmten Konvergenzsätzen über das Lebesgue-Integral. Auf ihm beruhen viele der folgenden Integrationsregeln.

**2.1.1 Satz** (Der Satz von Beppo Levi[1] zur monotonen Konvergenz)**.** *Es sei* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$*, so dass*

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad f_k \leq f_{k+1} \text{ fast überall.} \tag{2.1}$$

*Wenn die Folge*

$$\left(\int f_k \mathrm{d}\mu_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

*nach oben beschränkt ist, dann existiert eine Funktion* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- *Für fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$.
- $\displaystyle\int f \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n$.

Für den Beweis müssen wir zunächst Satz 1.2.11 über Treppenfunktionen und Satz 1.4.4, iii), verallgemeinern:

**2.1.2 Hilfssatz.** *Eine Funktion* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$*, für die fast überall* $f \geq 0$ *gilt, erfüllt*

$$\|f\|_1 = \int f \mathrm{d}\mu_n.$$

*Beweis.* Wir führen die Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{falls } f(x) < 0 \end{cases} \end{array}$$

ein.

[1] Beppo Levi (1875 - 1961), italienischer Mathematiker.

Es gilt $g \geq 0$ und fast überall $f = g$. Nach Satz 1.5.9 ist $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_1 = \|g\|_1$ und

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \int g \mathrm{d}\mu_n.$$

Wegen $g \geq 0$ gilt

$$\|g\|_1 = \int g \mathrm{d}\nu_n$$

nach Satz 1.4.4, iii), so dass die behauptete Gleichheit folgt. □

*Beweis von Satz 2.1.1.* Wir zeigen zunächst, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Nach (2.1) und Hilfssatz 2.1.2 gilt

$$0 \leq \|f_l - f_k\|_1 = \int (f_l - f_k) \mathrm{d}\mu_n = \int f_l \mathrm{d}\mu_n - \int f_k \mathrm{d}\mu_n, \quad k \leq l. \tag{2.2}$$

Daher ist

$$\left( \int f_k \mathrm{d}\mu_n \right)_{k\in\mathbb{N}}$$

eine monoton wachsende Folge. Da sie nach Voraussetzung nach oben beschränkt ist, konvergiert sie ((17), Satz 2.3.2). Nach (17), Lemma 2.3.11, ist sie eine Cauchy-Folge. Aus (2.2) folgt, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_1$ ist.

Aus dem Beweis des Satzes von Riesz–Fischer 1.6.1 folgt die Existenz einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, einer Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und einer Nullmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{k_l}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus M,$$

und

$$[f] = \lim_{k\to\infty} [f_k] \quad \text{in } \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n).$$

Nach Voraussetzung gibt es Nullmengen $N_k$ mit

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus N_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Die Menge

$$N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$$

ist nach Lemma 1.5.2, ii), eine Nullmenge, und für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ ist $(f_k(x))$ eine monoton wachsende Folge. Für ein Element $x \in \mathbb{R}^n$, das nicht in der Nullmenge $M \cup N$ liegt, besitzt diese Folge die konvergente Teilfolge $(f_{k_l}(x))_{l\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ist somit beschränkt und deshalb wegen ihrer Monotonie konvergent, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{l\to\infty} f_{k_l}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus (M \cup N).$$

Damit ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die bzgl. $\|\cdot\|_1$ gegen $f$ konvergiert, so dass

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Nach Bemerkung 1.6.2 gilt auch

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n.$$

Damit sind alle Behauptungen überprüft. □

*2.1.3 Bemerkung.* i) Es gibt natürlich auch eine Version des Satzes von Beppo Levi für monoton fallende Funktionenfolgen, die die Leserin oder der Leser selbstständig formulieren und beweisen möge.

ii) Seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad f_k \leq f_{k+1} \text{ fast überall}$$

und $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad f_k \leq f \quad \text{fast überall}$$

und damit auch

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \int f_k \mathrm{d}\mu_n \leq \int f \mathrm{d}\mu_n.$$

Die monoton wachsende Folge

$$\left(\int f_k \mathrm{d}\mu_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

ist daher nach oben beschränkt. Man beachte, dass in diesem Fall $[f]$ nach dem Satz von Beppo Levi auch der $\mathrm{L}^1$-Grenzwert der Folge $([f_k])_{k\in\mathbb{N}}$ ist.

*2.1.4 Beispiele.* i) Es sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} f_k := f\cdot\chi_{[-k,k]}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{falls } -k \leq x \leq k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Funktion $f_k$ ist integrierbar mit ((17), Beispiel 5.3.6)

$$\int f_k \mathrm{d}\mu_1 = \int_{-k}^{k} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x)\Big|_{-k}^{k} = \arctan(k) - \arctan(-k) = 2\cdot\arctan(k),$$

$k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\arctan(k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert streng monoton wachsend gegen $\pi/2$. Hach dem Satz von Beppo Levi ist $f$ integrierbar mit

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_1 = 2\cdot \lim_{k\to\infty} \arctan(k) = \pi.$$

ii) Es sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp\big(-|x|\big). \end{aligned}$$

Wir definieren wieder $f_k := f\cdot\chi_{[-k,k]}$, $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f_k$ ist integrierbar, und es gilt

$$\int f_k \mathrm{d}\mu_1 = \int_{-k}^{k} f(x)\mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^k \exp(-x)\mathrm{d}x = -2\cdot\exp(-x)\Big|_0^k = 2\cdot\big(1-\exp(-k)\big),$$

$k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(1 - \exp(-k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert monoton wachsend gegen 1. Nach dem Satz von Beppo Levi ist $f$ integrierbar mit

$$\int f \mathrm{d}\mu_1 = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_1 = 2 - 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \exp(-k) = 2.$$

iii) Das Integral

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{x} \mathrm{d}\mu_1$$

existiert nicht. Denn für $k \geq 1$ gilt

$$\int_{[\frac{1}{k},1]} \frac{1}{x} \mathrm{d}\mu_1 = \log(x)\Big|_{\frac{1}{k}}^{1} = -\log\left(\frac{1}{k}\right) = \log(k).$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \log(k) = \infty$ ist $x \longmapsto 1/x$ nicht über $[0,1]$ integrierbar (s. Bemerkung 2.1.3, ii).

## 2.2 Der Konvergenzsatz von Lebesgue

Der Lebesguesche Konvergenzsatz enthält ein hinreichendes Kriterium für die Integrierbarkeit einer Funktion, die fast überall punktweiser Grenzwert einer gewissen Funktionenfolge ist, die nicht monoton wachsend zu sein braucht.

**2.2.1 Definition.** Es sei $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.

a) Die Menge $\mathcal{F}$ ist *nach oben* bzw. *nach unten Lebesgue-beschränkt* (kurz: *nach oben* bzw. *nach unten L-beschränkt*), wenn es eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass

$$\forall f \in \mathcal{F}: \quad f \leq g \text{ fast überall} \quad \text{bzw.} \quad f \geq g \text{ fast überall.}$$

b) Die Menge $\mathcal{F}$ ist *Lebesgue-beschränkt* (kurz: *L-beschränkt*), wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten Lebesgue-beschränkt ist.

c) Eine Folge $(f_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ ist (*nach oben/unten*) *L-beschränkt*, wenn die Menge $\mathcal{F} := \{ f_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ dies ist.

*2.2.2 Beispiel.* Die Folge $(f_k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_{k\geq 1}$ sei durch

$$f_k(x) = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \cdot \chi_{[0,k]}, \quad x \in \mathbb{R},\ k \geq 1,$$

definiert. Für $x \in [0,1)$ gilt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \exp(x).$$

Für $k \geq 1$ und $x \in [0,k)$ folgt

$$\frac{1}{1-\frac{x}{k}} \geq \exp\left(\frac{x}{k}\right)$$

und

$$\left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \leq \exp(-x), \quad x \in [0,k],\ k \geq 1.$$

Wir fassen zusammen:

$$\forall k \geq 1 \forall x \in [0, \infty): \quad 0 \leq f_k \leq \exp(-x).$$

Die Funktion 0 ist über $[0, \infty)$ integrierbar, ebenso $x \longmapsto \exp(-x)$ (Beispiel 2.1.4, ii). Damit haben wir nachgewiesen, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine L-beschränkte Folge ist.

**2.2.3 Satz** (Lebesguescher Konvergenzsatz)**.** *Es sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine L-beschränkte Folge von Funktionen mit $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x).$$

*Dann folgt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k \to \infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n.$$

*Beweis.* **Schritt 1.** Wir beweisen zunächst die folgende Aussage:

**Behauptung.** *Es sei $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine nach oben bzw. nach unten L-beschränkte Folge von Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann liegt auch*[2]

$$\begin{aligned} g &:= \sup\{\, g_k \mid k \in \mathbb{N} \,\}, \quad x \longmapsto \sup\{\, g_k(x) \mid k \in \mathbb{N} \,\}, \\ \textit{bzw.} \quad g &:= \inf\{\, g_k \mid k \in \mathbb{N} \,\}, \quad x \longmapsto \inf\{\, g_k(x) \mid k \in \mathbb{N} \,\}, \end{aligned}$$

*im Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Wir beweisen diese Aussage für den Fall einer nach oben L-beschränkten Folge. Sei $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion, so dass $g_k \leq h$ fast überall, $k \in \mathbb{N}$. Nach Aufgabe A.4.1 gilt

$$G_k := \max\{\, g_1, \ldots, g_k \,\} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\int G_k \mathrm{d}\mu_n \leq \int h \mathrm{d}\mu_n < \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzung des Satzes von Beppo Levi 2.1.1 und konvergiert punktweise gegen $g$. $\surd$

**Schritt 2.** Wir führen für $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\begin{aligned} u_k &:= \inf\{\, f_l \mid l \geq k \,\} \quad \text{und} \\ o_k &:= \sup\{\, f_l \mid l \geq k \,\} \end{aligned}$$

ein. Nach Schritt 1 gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad u_k, o_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n).$$

Man beachte weiter, dass die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und die Folge $(o_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int u_1 \mathrm{d}\mu_n \leq \int u_k \mathrm{d}\mu_n \leq \int o_k \mathrm{d}\mu_n \leq \int o_1 \mathrm{d}\mu_n.$$

Sowohl $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ als auch $(o_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen $f$. Der Satz von Beppo Levi 2.1.1 zeigt somit

[2] Die Funktion $g$ kann unter Umständen auf einer Nullmenge den Wert $\infty$ annehmen. Dann ist Konvention 1.5.11 zu beachten.

- $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$,
- $\lim\limits_{k\to\infty} \int u_k \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\mu_n = \lim\limits_{k\to\infty} \int o_k \mathrm{d}\mu_n$.

Da

$$\int u_k \mathrm{d}\mu_n \le \int f_k \mathrm{d}\mu_n \le \int o_k \mathrm{d}\mu_n, \quad k \in \mathbb{N},$$

folgt auch

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n$$

und damit die Behauptung des Konvergenzsatzes. □

Die folgenden Beispiele illustrieren den Zusammenhang zwischen den Konvergenzsätzen der Lebesgue-Theorie und dem Formalismus der uneigentlichen Riemann-Integrale.

*2.2.4 Beispiele.* i) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Wir betrachten die Folge

$$(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad f_k := f \cdot \chi_{[a,a+k]}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sie konvergiert punktweise gegen die Funktion $f$. Ferner ist $f_k$ als stetige Funktion über $[a, a+k]$ integrierbar, $k \in \mathbb{N}$.

- Wir setzen $f \in \mathcal{L}^1([a,\infty))$ voraus. Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist durch $|f|$ nach oben L-beschränkt und durch $-|f|$ nach unten. Daher gilt

  $$\int_{[a,\infty)} f \mathrm{d}\mu_1 = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,a+k]} f_k \mathrm{d}\mu_1 = \lim_{k\to\infty} \int_a^{a+k} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

  Insbesondere existiert das uneigentliche Riemann-Integral auf der rechten Seite.[3]

- Jetzt nehmen wir die Konvergenz des uneigentlichen Riemann-Integrals $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ an und behaupten, dass $f$ über $[a,\infty)$ Lebesgue-integrierbar ist mit Integral

  $$\int_{[a,\infty)} f \mathrm{d}\mu_1 = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

  Die Folge $(|f_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Folge mit

  $$\int_{[a,\infty)} |f_k| \mathrm{d}\mu_1 = \int_a^{a+k} |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x.$$

  Nach dem Satz von Beppo Levi 2.1.1 ist $|f|$ über die Menge $[a,\infty)$ Lebesgue-integrierbar mit

  $$\int |f| \mathrm{d}\mu_1 = \lim_{k\to\infty} \int_a^{a+k} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x.$$

  Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist durch $|f|$ nach oben L-beschränkt und durch $-|f|$ nach unten. Nach Lebesgues Konvergenzsatz gilt $f \in \mathcal{L}^1([a,\infty))$ und

  $$\int_{[a,\infty)} f \mathrm{d}\mu_1 = \lim_{k\to\infty} \int_a^{a+k} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

[3] Genauer müsste man statt $(a+k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ zulassen. Offenbar funktionieren in diesem Fall dieselben Argumente, und man erhält dasselbe Ergebnis.

ii) Es sei $l \geq 1$. Wir untersuchen die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} f_k\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^l \cdot \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k, & \text{falls } x \in [0,k] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Für die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^l \cdot \exp(-x) \end{aligned}$$

gilt

$$\forall l \in \mathbb{N}: \quad \int_0^\infty x^l \cdot \exp(-x)\mathrm{d}x = l!.$$

Für $l = 0$ haben wir das in Beispiel 2.1.4 gesehen. Für $l \geq 1$ gilt nach partieller Integration ((17), Abschnitt 5.4) und Induktionsvoraussetzung:

$$\int_0^\infty x^l \cdot \exp(-x)\mathrm{d}x = -x^l \cdot \exp(-x)\Big|_0^\infty + l \cdot \int_0^\infty x^{l-1} \cdot \exp(-x)\mathrm{d}x = l\cdot(l-1)! = l!.$$

Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist durch 0 nach unten L-beschränkt und durch $f$ nach oben (Beispiel 2.2.2). Da die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f$ konvergiert (vgl. (17), Satz 4.7.4), folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k x^l \cdot \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \mathrm{d}x = l!.$$

iii) Dieses Beispiel zeigt, dass die Theorie uneigentlicher Riemann-Integrale für stetige Funktionen nicht identisch mit der Lebesgue-Theorie ist. Zur Vorbereitung erinnern wir daran, dass für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f$ auch die Betragsfunktion $|f|$ Lebesgue-integrierbar ist (Satz 1.4.4, iii). Wie wir gleich sehen werden, gibt es stetige Funktionen $f$, für die das uneigentliche Riemann-Integral konvergiert, das uneigentliche Riemann-Integral für $|f|$ aber divergiert.[4]

Wir erklären zunächst, warum das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$$

konvergiert. Wir argumentieren folgendermaßen:

- Die Funktion $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ besitzt eine stetige Fortsetzung nach 0 ((17), Beispiel 3.4.10 und Aufgabe 6.11.3).
- Mit partieller Integration folgt für $0 < \varepsilon < a$

$$\int_\varepsilon^a \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_\varepsilon^a - \int_\varepsilon^a \frac{\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

  Da

$$\forall x \neq 0: \quad \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2},$$

  existiert

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

[4] Dies entspricht bedingt konvergenten Reihen (cf. (17), Definition 2.8.4).

und deshalb auch

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Wegen der stetigen Fortsetzbarkeit von $x \longmapsto \sin(x)/x$ nach 0 konvergiert auch[5]

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Wenn $x \longmapsto \sin(x)/x$, $x \in [0, \infty)$, Lebesgue-integrierbar wäre, so auch die Funktion $x \longmapsto |\sin(x)/x|$, $x \in [0, \infty)$, und das uneigentliche Integral

$$\int_{0}^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \mathrm{d}x \tag{2.4}$$

existierte. Das tut es aber nicht:

$$\forall k \geq 1: \quad \int_{(k-1)\cdot\pi}^{k\cdot\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \mathrm{d}x \geq \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \int_{(k-1)\cdot\pi}^{k\cdot\pi} |\sin(x)| \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k}.$$

Die Divergenz von (2.4) ergibt sich daher aus der Divergenz der harmonischen Reihe ((17), Beispiel 2.3.13).

[5] Wir können (2.3) hier **nicht** bemühen, weil beide Terme auf der rechten Seite bei Annäherung an Null divergieren.

# Kapitel 3

# Der Satz von Fubini

## 3.1 Der Satz von Fubini

Bisher haben wir keine Techniken entwickelt, die über die Riemann-Integration in einer Veränderlichen hinausgehen, um Integrale explizit zu bestimmen. Ein wichtiges Hilfsmittel, mit dem wir die Auswertung eines $n$-dimensionalen Integrals auf die iterierte Auswertung eindimensionaler Integrale zurückführen können, ist der Satz von Fubini.[1] Dadurch können wir die in der Analysis I vorgestellten Techniken auch für höherdimensionale Probleme nutzbar machen.

**3.1.1 Satz** (Der Satz von Fubini)**.** *Es sei $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann existiert eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass gilt:*

i) *Für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^n \setminus N$ ist $f(\cdot, y)\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,y)$, über $\mathbb{R}^m$ integrierbar.*

ii) *Die Funktion*

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \begin{cases} \int f(\cdot,y)\mathrm{d}\mu_m(x) := \int f(\cdot,y)\mathrm{d}\mu_m, & \text{falls } y \notin N \\ 0, & \text{falls } y \in N \end{cases} \end{aligned}$$

*ist über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, und es gilt*

$$\int F\mathrm{d}\mu_n =: \int F(y)\mathrm{d}\mu_n(y) = \int f(x,y)\mathrm{d}\mu_{m+n}(x,y) := \int f\mathrm{d}\mu_{m+n}.$$

**Schreibweise:**

$$\int f(x,y)\mathrm{d}\mu_{m+n}(x,y) = \int \left( \int f(x,y)\mathrm{d}\mu_m(x) \right) \mathrm{d}\mu_n(y).$$

Wir beweisen den Satz von Fubini zunächst für die charakteristische Funktion einer Nullmenge.

**3.1.2 Hilfssatz.** *Zu jeder Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass*

$$A_y := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, (x,y) \in A \right\} = \pi_1\Big(A \cap \left(\mathbb{R}^m \times \{y\}\right)\Big)$$

*für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus N$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$ ist. Dabei ist $\pi_1\colon \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ die Projektion.*

[1] Guido Fubini (1879 - 1943), italienischer Mathematiker.

*Beweis.* Wir verwenden Satz 1.5.4. Es seien $\varepsilon > 0$ und $Q_k$, $k \in \mathbb{N}$, Quader mit

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_{m+n}(Q_k) < \varepsilon.$$

Es gibt Quader $Q'_k \subset \mathbb{R}^m$ und $Q''_k \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$Q_k = Q'_k \times Q''_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Es seien $\|\cdot\|_1^m$ bzw. $\|\cdot\|_1^n$ die $\mathcal{L}^1$-Halbnorm für Funktionen $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ y &\longmapsto \|\chi_{A_y}\|_1^m. \end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$\chi_{A_y} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{Q'_k} \cdot \chi_{Q''_k}(y)$$

für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^n$. Daraus ergibt sich für $y \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} a(y) &\leq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{Q'_k} \cdot \chi_{Q''_k}(y) \right\|_1^m \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_{Q'_k}\|_1^m \cdot \chi_{Q''_k}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_m(Q'_k) \cdot \chi_{Q''_k}(y). \end{aligned}$$

Wir folgern daraus

$$\begin{aligned} \|a\|_1^n &\leq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_m(Q'_k) \cdot \chi_{Q''_k} \right\|_1^n \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_m(Q'_k) \cdot \|\chi_{Q''_k}\|_1^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_m(Q'_k) \cdot \mathrm{Vol}_n(Q''_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_{m+n}(Q_k) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $\|a\|_1^n < \varepsilon$ gilt für alle $\varepsilon > 0$. Deshalb gibt es nach Satz 1.5.9, i), eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass $a(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus N$ gilt. Diese Aussage ist äquivalent zur Behauptung. □

*Beweis von Satz 3.1.1.* i) Der Satz von Fubini für Treppenfunktionen ist leicht einzusehen (Aufgabe A.5.2). Um ihn im Allgemeinen zu beweisen, müssen wir sorgfältig untersuchen, wie sich die Approximation einer integrierbaren Funktion durch Treppenfunktionen mit der Aufspaltung $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ verträgt.

Es gibt eine Folge $(\varphi_k\colon \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, so dass $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$. Damit ist $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_1$. Der Beweis des Satzes von Riesz–Fischer 1.6.1 zeigt, dass wir, indem wir $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch eine geeignete Teilfolge ersetzen, die wir aber nicht gesondert benennen, erreichen können, dass

(1) für fast alle $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$

$$f(x, y) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x, y)$$

gilt,

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty.$

Sei $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine Nullmenge, so dass

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} \setminus A : \quad f(x, y) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x, y).$$

Dann existiert nach Hilfssatz 3.1.2 eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus N$ gilt:

$$f(x, y) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x, y) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^m.$$

Wie bereits bemerkt ist der Satz von Fubini für Treppenfunktionen richtig. Die Funktion[2]

$$\begin{aligned} H_k \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \int |\varphi_{k+1}(x, y) - \varphi_k(x, y)| \mathrm{d}\mu_m(x) \\ &\overset{\text{Satz } 1.2.11}{=} \|\varphi_{k+1}(\cdot, y) - \varphi_k(\cdot, y)\|_1^m, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ist demnach integrierbar mit Integral

$$\int H_k \mathrm{d}\mu_n(y) = \int |\varphi_{k+1} - \varphi_k| \mathrm{d}\mu_{m+n}(x, y) \overset{\text{Satz } 1.2.11}{=} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1.$$

Gemäß Eigenschaft (2) der Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int H_k \mathrm{d}\mu_n(y) < \infty.$$

Die Folge

$$\left( \sum_{k=0}^{l} H_k \right)_{l\in\mathbb{N}}$$

genügt somit den Voraussetzungen des Satzes von Beppo Levi 2.1.1, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k$$

eine integrierbare Funktion ist. (Man beachte Konvention 1.5.11.) Insbesondere gibt es eine Nullmenge $N' \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus N' : \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_{k+1}(\cdot, y) - \varphi_k(\cdot, y)\|_1^m < \infty.$$

Dies wiederum impliziert, dass $(\varphi_k(\cdot, y))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ ist. Sie konvergiert fast überall gegen $f(\cdot, y)$. Damit ist Teil i) bewiesen.

[2] Die Funktion ist nur außerhalb einer Nullmenge definiert. Wir verwenden Konvention 1.5.11, b), um sie als Funktion auf $\mathbb{R}^n$ aufzufassen.

ii) Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus N'$ gilt:

$$F(y) = \int f(\cdot, y) \mathrm{d}\mu_m(x) = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(\cdot, y) \mathrm{d}\mu_m(x).$$

Sei[3]

$$\begin{aligned} \Phi_k \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \int \varphi_k(\cdot, y) \mathrm{d}\mu_m(x), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wir halten folgende Eigenschaften fest:

- $\Phi_k$ ist eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$.
- $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall punktweise gegen $F$.
- $\sum_{k=0}^{\infty} \|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_1^n < \infty$. Dazu beachte man

  $$|\Phi_{k+1}(y) - \Phi_k(y)| = \left| \int \varphi_{k+1}(\cdot, y) - \varphi_k(\cdot, y) \mathrm{d}\mu_m(x) \right| \leq H_k(y), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

  Daraus folgt

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_1^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|H_k\|_1^n = \sum_{k=0}^{\infty} \int H_k(y) \mathrm{d}\mu_n(y) < \infty.$$

Bei $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ handelt es sich also um eine Cauchy-Folge von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$. Der Beweis des Satzes von Riesz–Fischer zeigt wieder, dass $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned} \int F(y) \mathrm{d}\mu_n(y) &= \lim_{k\to\infty} \int \Phi_k(y) \mathrm{d}\mu_n(y) \\ \text{(Fubini für Treppenfunktionen)} &= \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x, y) \mathrm{d}\mu_{m+n}(x, y) \\ &= \int f(x, y) \mathrm{d}\mu_{m+n}(x, y). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis beendet. □

**3.1.3 Folgerung.** *Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{m+n})$ gilt*

$$\int \left( \int f(x, y) \mathrm{d}\mu_m(x) \right) \mathrm{d}\mu_n(y) = \int \left( \int f(x, y) \mathrm{d}\mu_n(y) \right) \mathrm{d}\mu_m(x).$$

**3.1.4 Vorsicht.** Für eine Funktion $f$, die nicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{m+n})$ liegt, für die aber mindestens eines der iterierten Integrale existiert, kann die Gleichung in der Folgerung falsch werden: So hat man z.B.

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

[3] Wir verweisen wieder auf Konvention 1.5.11, b).

## 3.2 Integrabilitätskriterien I

Wir wissen, dass jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann- und Lebesgue-integrierbar ist. In höheren Dimensionen können wir erwarten, dass eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ über jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Dies und etwas mehr wollen wir nun beweisen.

**3.2.1 Satz.** i) *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine **offene beschränkte** Teilmenge und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte stetige** Funktion. Dann ist $f$ über $U$ integrierbar.*

ii) *Es seien $K \subset \mathbb{R}^n$ eine **kompakte** Teilmenge und $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Dann ist $f$ über $K$ integrierbar.*

Im Beweis werden wir $f$ durch Treppenfunktionen annähern und den Satz von Beppo Levi verwenden.

**3.2.2 Hilfssatz.** *Es seien $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass*

- $K \subset U$,
- $\forall x \in K : f(x) \geq 0$.

*Dann existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) $\forall x \in K : \quad f(x) - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq f(x),$
$\qquad\qquad\qquad\quad f(x) \leq \psi(x) \leq f(x) + \varepsilon.$

ii) $\forall x \in U : \quad 0 \leq \varphi(x) \leq \psi(x).$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus U : \quad \varphi(x) = 0 = \psi(x).$

*Beweis.* Da $K$ kompakt ist, ist $f$ auf $K$ gleichmäßig stetig ((18), Satz 3.5.4). Es gibt somit zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, y \in K : \quad \|x - y\|_M \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(Hier benutzen wir die Maximum-Norm $\|\cdot\|_M$; s. (18), Beispiel 1.2.4, i).) Falls $U \neq \mathbb{R}^n$, können wir annehmen, dass

$$\delta < \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U).$$

(Die Funktion dist wird in (18), Definition 3.4.3 und Folgendem, besprochen.) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$, seien

$$W(x) := \left(x_1 - \frac{\delta}{2}, x_1 + \frac{\delta}{2}\right) \times \cdots \times \left(x_n - \frac{\delta}{2}, x_n + \frac{\delta}{2}\right)$$

und

$$\overline{W}(x) := \left[x_1 - \frac{\delta}{2}, x_1 + \frac{\delta}{2}\right] \times \cdots \times \left[x_n - \frac{\delta}{2}, x_n + \frac{\delta}{2}\right].$$

Nach Konstruktion gilt

$$K \subset \bigcup_{x \in K} W(x) \subset \bigcup_{x \in K} \overline{W}(x) \subset U.$$

Auf Grund der Kompaktheit von $K$ gibt es Punkte $x_1, \ldots, x_s \in K$ mit

$$K \subset W(x_1) \cup \cdots \cup W(x_s) \subset \overline{W}(x_1) \cup \cdots \cup \overline{W}(x_s) \subset U.$$

Wir kürzen

$$Q_i := \overline{W}(x_i), \quad i = 1, \ldots, s,$$

ab. Weiter seien

$$\begin{aligned} m_i &:= \min\Big\{ f(x) = |f(x)| \,\Big|\, x \in K \cap Q_i \Big\}. \\ M_i &:= \max\Big\{ f(x) = |f(x)| \,\Big|\, x \in K \cap Q_i \Big\}, \quad i = 1, \ldots, s. \end{aligned}$$

Da $f \geq 0$, sind dies nicht negative Zahlen. Dann sind

$$\begin{aligned} \varphi &:= \max\Big\{ m_1 \cdot \chi_{Q_1}, \ldots, m_s \cdot \chi_{Q_s} \Big\}, \\ \psi &:= \max\Big\{ M_1 \cdot \chi_{Q_1}, \ldots, M_s \cdot \chi_{Q_s} \Big\} \end{aligned}$$

Treppenfunktionen mit den gewünschten Eigenschaften. □

**3.2.3 Definition.** a) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Eine *Ausschöpfung von M* ist eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so dass

- $\forall k \in \mathbb{N} : A_k \subset A_{k+1}$,
- $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = M$.

b) Eine endliche Vereinigung

$$A = Q_1 \cup \cdots \cup Q_s$$

von **kompakten** Quadern heißt *Figur*.

**3.2.4 Hilfssatz.** *Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine Ausschöpfung $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch Figuren.*

*Beweis.* In diesem Beweis bezeichne $\|\cdot\|_M$ die Maximum-Norm ((18), Beispiel 1.2.4, i) und dist die zugehörge Abstandsfunktion ((18), Definition 3.3.2). Für $U = \mathbb{R}^n$ kann man $A_k := [-k, k]^{\times n}$, $k \in \mathbb{N}$, nehmen. Wir setzen nun voraus, dass $U$ eine echte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Für $x \in U \cap \mathbb{Q}^n$ sei[4]

$$\varepsilon(x) := \frac{1}{2} \cdot \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0.$$

Es folgt

$$Q_x := \Big\{ y \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \|y - x\|_M \leq \varepsilon(x) \Big\} \subset U.$$

Wir wählen eine Bijektion

$$\alpha \colon \mathbb{N} \longrightarrow U \cap \mathbb{Q}^n$$

und setzen

$$A_k := \bigcup_{l=0}^{k} Q_{\alpha(l)}.$$

Die Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Ausschöpfung von $U$ durch Figuren: Denn für jeden Punkt $x \in U$ gibt es einen Punkt $x' \in U \cap \mathbb{Q}^n$ mit

$$\|x - x'\|_M < \frac{1}{3} \cdot \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U).$$

Für diesen Punkt gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\frac{2}{3} \cdot \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U) < \operatorname{dist}(x', \mathbb{R}^n \setminus U)$$

und daher $x \in Q_{x'}$. □

[4] Für die Definition von $\varepsilon(x)$ benötigen wir die Voraussetzung, dass $\mathbb{R}^n \setminus U$ nichtleer ist.

**3.2.5 Hilfssatz.** *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass*

$$\forall x \in M: \quad f(x) \geq 0,$$

*und*

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in M \\ 0, & \text{falls } x \notin M \end{cases} . \end{aligned}$$

i) *Wenn $M$ offen ist, dann existiert eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die punktweise monoton wachsend gegen $\overline{f}$ konvergiert.*

ii) *Wenn $M$ kompakt ist, dann existiert eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die punktweise monoton fallend gegen $\overline{f}$ konvergiert.*

*Beweis.* i) Wir wählen eine Ausschöpfung $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $M$ durch Figuren. Da $A_k \subset M$ kompakt ist, können wir nach Hilfssatz 3.2.2 Treppenfunktionen $\psi_k$ mit

$$\begin{aligned} \forall x \in A_k: &\quad f(x) - \frac{1}{2^k} \leq \psi_k(x) \leq f(x), \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus M: &\quad \psi_k(x) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

finden. Man beachte weiter, dass $\chi_{A_k}$ eine Treppenfunktion ist, $k \in K$. Die Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\varphi_k := \max\{\, \psi_1 \cdot \chi_{A_1}, \ldots, \psi_k \cdot \chi_{A_k} \,\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

hat die gewünschten Eigenschaften (vgl. Lemma 1.1.13, v).

ii) Es sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n \setminus M$ durch Figuren. Man definiere

$$U_k := \mathbb{R}^n \setminus A_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad U_{k+1} \subset U_k$$

und

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} U_k = M.$$

Nach Hilfssatz 3.2.2 gibt es Treppenfunktion $\psi_k$, so dass

$$\begin{aligned} \forall x \in M: &\quad f(x) \leq \psi_k(x) \leq f(x) + \frac{1}{2^k}, \\ \forall x \in U_k: &\quad \psi_k(x) \geq 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus U_k: &\quad \psi_k(x) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\varphi_k := \min\{\, \psi_1, \ldots, \psi_k \,\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

leistet das Verlangte. □

*Beweis von Satz 3.2.1.* i) Mit $f$ ist auch $|f|$ eine stetige Funktion. Setzen wir $f_+ := (1/2)\cdot(|f| + f)$ und $f_- := (1/2)\cdot(|f| - f)$, dann sind $f_+$ und $f_-$ stetige Funktionen mit $f_+ \geq 0$, $f_- \geq 0$ und $f = f_+ - f_-$. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $f \geq 0$ gilt. Gemäß Hilfssatz 3.2.5 wählen wir eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die punktweise monoton wachsend gegen $\overline{f}$ konvergiert. Weiter seien $M$ eine positive reelle Zahl, so dass

$$\forall x \in U: \quad f(x) \leq M$$

und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränkter Quader mit $U \subset Q$. Es gilt

$$\varphi_k \leq \overline{f} \leq M \cdot \chi_Q$$

und folglich

$$\int \varphi_k \mathrm{d}\mu_n \leq M \cdot \mathrm{Vol}_n(Q), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit ist $(\int \varphi_k \mathrm{d}\mu_n)_{k\in\mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte Folge. Nach dem Satz von Beppo Levi 2.1.1 ist $\overline{f}$ integrierbar.

Für Teil ii) setzen wir wieder $f \geq 0$ voraus und wählen eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die punktweise monoton fallend gegen $\overline{f}$ konvergiert. Diesmal beoachten wir

$$\varphi_k \geq \overline{f} \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(\int \varphi_k \mathrm{d}\mu_n)_{k\in\mathbb{N}}$ ist durch 0 nach unten beschränkt, und wir können wie zuvor schließen. □

**3.2.6 Folgerung.** *Es seien $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie sei*

- *beschränkt,*
- *fast überall stetig, d.h. es gebe eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass $f$ auf $K \setminus N$ stetig ist.*

*Dann ist $f$ über $K$ integrierbar.*

*Beweis.* Wir können Satz 3.2.1 auf die Funktion $\chi_K$ anwenden. Damit ist $\chi_K$ integrierbar und $\|\chi_K\|_1 < \infty$. Sei $M > 0$ eine Konstante, so dass

$$\forall x \in K: \quad |f(x)| \leq M.$$

Es gilt

$$0 \leq |\overline{f}| \leq M \cdot \chi_K$$

und damit

$$\|\overline{f}\|_1 \leq M \cdot \|\chi_K\|_1 < \infty.$$

Um zu schließen reicht es, für jedes $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Treppenfunktion $\varphi$ mit $\|\overline{f} - \varphi\|_1 < \varepsilon$ nachzuweisen. Da $N \cap K$ nach Lemma 1.5.2, i), eine Nullmenge ist, finden wir eine offene Menge $U$ (z.B. eine Vereinigung von offenen Quadern wie in Satz 1.5.4), so dass

$$N \cap K \subset U \quad \text{und} \quad \|\chi_U\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}.$$

Da $K \setminus U$ kompakt ist, ist $\overline{f_{|K\setminus U}}$ integrierbar[5], und es gibt eine Treppenfunktion $\varphi$ mit

$$\|\overline{f_{|K\setminus U}} - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir schätzen

$$\|\overline{f} - \varphi\|_1 \leq \|\overline{f_{|K\setminus U}} - \varphi\|_1 + \|\overline{f_{|K\cap U}}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \|\chi_U\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ab und haben damit unsere Behauptung verifiziert. □

[5] Dies ist die Forsetzung durch Null von $f_{|K\setminus U}$ auf $\mathbb{R}^n$.

**3.2.7 Definition.** a) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *$\sigma$-kompakt*, wenn sie abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen ist.

b) Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ eine $\sigma$-kompakte Teilmenge und $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen $f$ *lokal integrierbar*, wenn $f$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ über $A \cap K$ integrierbar ist.

*3.2.8 Beispiel.* Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ beschränkt und fast überall stetig. Dann ist sie nach Folgerung 3.2.6 lokal integrierbar

**3.2.9 Satz** (Majorantenkriterium). *Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ eine $\sigma$-kompakte Teilmenge und $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokal integrierbare Funktion. Falls eine über $A$ integrierbare Funktion $F\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$|f(x)| \leq F(x) \quad \text{für fast alle } x \in A$$

*existiert, ist $f$ über $A$ integrierbar. Insbesondere ist $f$ genau dann über $A$ integrierbar, wenn $|f|$ es ist.*

*Beweis.* Es sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $A$ durch kompakte Mengen. Die Folge $f_k := (f \cdot \chi_{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von über $A$ integrierbaren Funktionen, die punktweise gegen $f$ konvergiert. Ferner gilt

$$|f_k| \leq |f| \leq F, \quad k \in \mathbb{N},$$

fast überall auf $A$. Die Aussage folgt daher aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue 2.2.3. □

## 3.3 Messbare Mengen und das Prinzip von Cavalieri

In diesem Abschnitt wollen wir u.A. die Volumen einiger bekannter Objekte bestimmen.

**3.3.1 Definition.** Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *endlich messbar*, wenn ihre charakteristische Funktion $\chi_A$ integrierbar ist. In diesem Fall ist

$$\mathrm{Vol}_n(A) := \int \chi_A \mathrm{d}\mu_n.$$

das (*n-dimensionale*) *Volumen von A*.

**3.3.2 Eigenschaften endlich messbarer Mengen.**

i) *Beschränkte, offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind endlich messbar.*

ii) *Kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind endlich messbar.*

iii) *Sind $A$ und $B$ endlich messbar, dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ endlich messbar, und es gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(A \cup B) = \mathrm{Vol}_n(A) + \mathrm{Vol}_n(B) - \mathrm{Vol}_n(A \cap B).$$

iv) *Für endlich messbare Mengen $A$ und $B$ mit $A \subset B$ gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(A) \leq \mathrm{Vol}_n(B).$$

v) *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Teilmengen. Die Menge $A$ sei endlich messbar, und $A \triangle B$ sei eine Nullmenge. Dann ist auch $B$ endlich messbar.*

*Beweis.* i) und ii) folgen aus Satz 3.2.1, angewandt auf die charakteristische Funktion der jeweiligen Menge.

iii) Aus Aufgabe A.5.1, c), folgt, dass $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ integrierbar ist. Deshalb sind auch

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$$

und

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$$

integrierbar. Die Volumenformel folgt aus der Linearität des Integrals.

iv) Diese Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der Ungleichung $\chi_A \leq \chi_B$.

v) Die Funktionen $\chi_A$ und $\chi_B$ stimmen außerhalb von $A \triangle B$ überein. Wir schließen mit Satz 1.5.9 □

Aus dem Satz von Fubini 3.1.1 ergibt sich:

**3.3.3 Satz** (Das Prinzip von Cavalieri[6]). *Es seien $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine endlich messbare Teilmenge und*

$$A_y := \pi_1\Big(A \cap \big(\mathbb{R}^m \times \{y\}\big)\Big), \quad y \in \mathbb{R}^n,\ \pi_1 \colon \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ die Projektion.}$$

*Dann gilt*

$$\mathrm{Vol}_{m+n}(A) = \int \mathrm{Vol}_m(A_y)\mathrm{d}\mu_n(y).$$

*Insbesondere gilt*

$$\mathrm{Vol}_{m+n}(A) = \mathrm{Vol}_{m+n}(B)$$

*für zwei endlich messbare Mengen A, B des $\mathbb{R}^{m+n}$, so dass*

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \quad \mathrm{Vol}_m(A_y) = \mathrm{Vol}_m(B_y).$$

*3.3.4 Literaturhinweis.* Bemerkungen zur Geschichte des Prinzips von Cavalieri findet man in (12), S. 36ff.

*3.3.5 Beispiele.* i) (Die Fläche der Kreisscheibe) Die abgeschlossene Kreisscheibe

$$\overline{B}(0,r) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq r^2 \right\}$$

vom Radius $r$ ist nach Eigenschaft 3.3.2, ii), endlich messbar. Für ihre Fläche

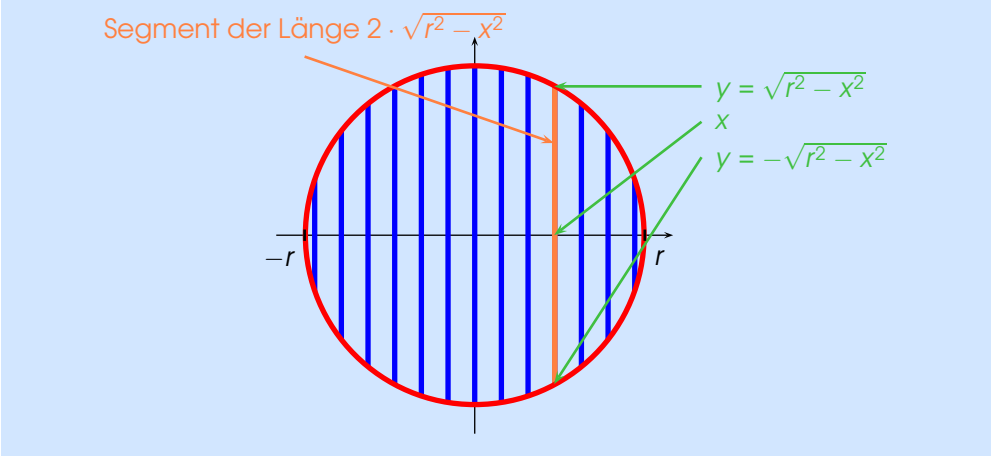
$$A := \mathrm{Vol}_2\big(\overline{B}(0,r)\big) = 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

berechnen wir mit der Substitution

$$x = r \cdot \cos(t) :$$

$$\begin{aligned} A &= -2 \cdot r^2 \cdot \int_{\pi}^{0} \sqrt{1 - \cos^2(t)} \cdot \sin(t)\mathrm{d}t \\ &= 2 \cdot r^2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t \\ &= r^2 \cdot \left[ -\cos(t) \cdot \sin(t)\Big|_0^{\pi} + t\Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \pi \cdot r^2. \end{aligned}$$

[6] Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 - 1647), italienischer Jesuat, Mathematiker und Astronom.




ii) (Das Volumen der Vollkugel) Die Vollkugel

$$\overline{B}(0,r) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \right\}$$

vom Radius $r$ ist ebenfalls endlich messbar. Mit dem Prinzip von Cavalieri ergibt sich für ihr Volumen der Wert

$$\begin{aligned} \overline{B}(0,r) &= \pi \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - z^2) \mathrm{d}z \\ &= 2 \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{\pi}{3} \cdot z^3 \Big|_{-r}^{r} \\ &= \frac{6}{3} \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3. \end{aligned}$$

Bevor wir mit den Beispielen fortfahren, halten wir folgende Eigenschaft des Integrals und Volumens fest: Für eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

gilt

$$\int g \mathrm{d}\mu_n = \lambda^n \cdot \int f \mathrm{d}\mu_n.$$

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ setzen wir

$$\lambda \cdot A := \left\{ \lambda \cdot x \,\middle|\, x \in A \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{x}{\lambda} \in A \right\}.$$

Falls $A$ endlich messbar ist, folgt

$$\mathrm{Vol}_n(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \mathrm{Vol}_n(A).$$

(Diese Formeln sind klar für Quader. Daraus kann man sie mit den Konvergenzsätzen leicht in der oben angegebenen Form ableiten. Die Details bleiben der Leserin bzw. dem Leser überlassen. Außerdem sind diese Formeln Spezialfälle der Transformationsformel 4.1.1.)

*3.3.5 Beispiele* (Fortsetzung). iii) (Volumen höherdimensionale Bälle) Wir stellen zunächst eine Rekursionsformel für

$$v_n := \mathrm{Vol}_n\big(B(0,1)\big), \quad n \geq 1,$$

auf.

*Bemerkung. Man beachte, dass für $n \geq 1$ und eine reelle Zahl $s > 0$*

$$\mathrm{Vol}_n\big(B(0,s)\big) = s^n \cdot \mathrm{Vol}_n\big(B(0,1)\big)$$

*gilt.*

Mit dem Prinzip von Cavalieri berechnet man für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{-1}^{1} \mathrm{Vol}_{n-1}\big(B(0,\sqrt{1-t^2})\big)\mathrm{d}t \\ &= v_{n-1} \cdot \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Das Integral

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}t$$

formen wir mit der Substitution

$$t = \sin(u), \quad u = \arcsin(t), \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \cos(u) :$$

um:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}t &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-\sin^2(u)}\right)^{n-1} \cdot \cos(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{\pi} \sin^n(u)\mathrm{d}u \quad =: \quad c_n. \end{aligned}$$

Nach (17), Beispiel 5.4.6, v), gilt

$$\forall n \geq 2 : \quad c_n = \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2}.$$

Ferner findet man

$$c_0 = \pi \quad \text{und} \quad c_1 = \cos(0) - \cos(\pi) = 2.$$

Auf diese Weise berechnen wir (vgl. Teil ii):

$$v_3 = v_2 \cdot c_3 = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot c_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi.$$

Die Rekursionsformel für die $c_n$, $n \in \mathbb{N}$, können wir folgendermaßen auflösen:

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \pi \cdot \prod_{l=1}^{k} \frac{2l-1}{2l}, \quad k \geq 1, \\ c_{2k+1} &= 2 \cdot \prod_{l=1}^{k} \frac{2l}{2l+1}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Man beachte insbesondere

$$\forall n \geq 1: \quad c_{n-1} \cdot c_n = \frac{2\pi}{n}.$$

Das führt zu der Rekursionsformel

$$v_n = v_{n-1} \cdot c_n = v_{n-2} \cdot c_{n-1} \cdot c_n = \frac{2\pi}{n} \cdot v_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

und diese zu den Ausdrücken

$$\begin{aligned} v_{2k} &= \frac{\pi^k}{k!}, \quad k \geq 1, \\ v_{2k+1} &= \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k+1)} \cdot \pi^k = \frac{2^{k+1}}{(2k+1)!!} \cdot \pi^k, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Mit der $\Gamma$-Funktion aus (18), Definition 5.6.12, können wir die beiden Fälle zusammenfassen. Dazu erinnern wir an die Formeln ((17), Satz 5.6.13 und Folgerung 5.6.19)

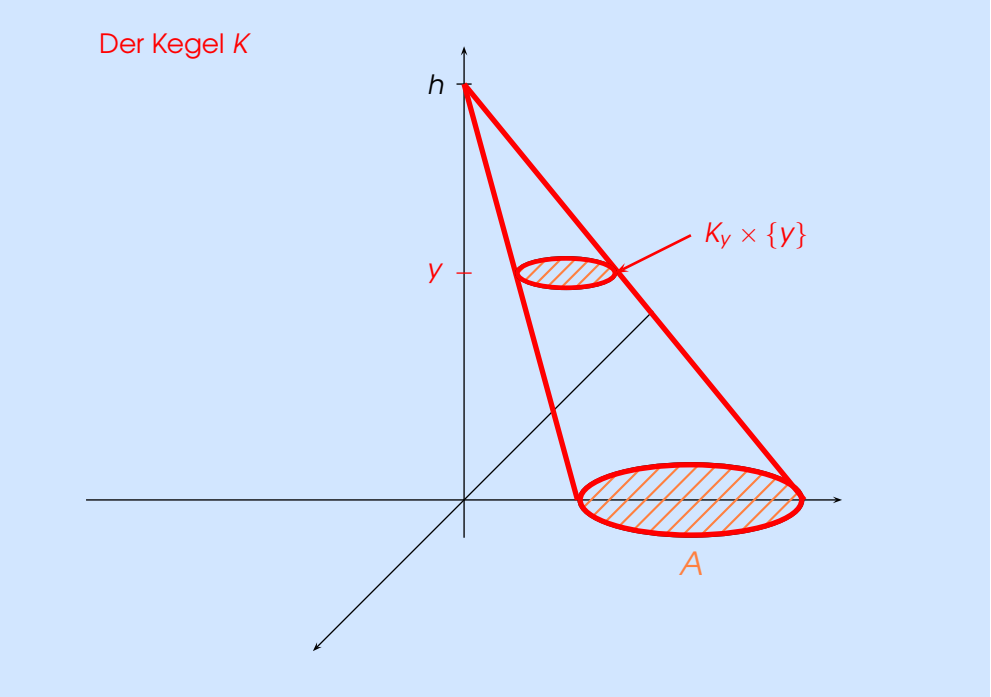
- $\Gamma(k+1) = k!$, $k \geq 1$,
- $$\begin{aligned} \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \left((k-1) + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left((k-1) + \frac{1}{2}\right) \\ &= \cdots \\ &= \left(\prod_{l=0}^{k} \frac{2l+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Schließlich berechnen wir

$$\forall n \geq 1: \quad v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

iv) Für eine endlich messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}_{>0}$ ist der *Kegel mit Basis A und Höhe h* definiert als

$$K := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, 0 \leq y \leq h,\ x \in \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot A \right\}.$$




Offenbar gilt

$$K_y = \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot A$$

und damit

$$\mathrm{Vol}_n(K_y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right)^n \cdot \mathrm{Vol}_n(A), \quad y \in [0, h].$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri berechnen wir

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(K) = \left(\int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^n \mathrm{d}y\right) \cdot \mathrm{Vol}_n(A).$$

Da

$$\int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^n \mathrm{d}y = -\frac{h}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{n+1} \Big|_0^h = \frac{h}{n+1}$$

folgt

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(K) = \frac{h}{n+1} \cdot \mathrm{Vol}_n(A).$$

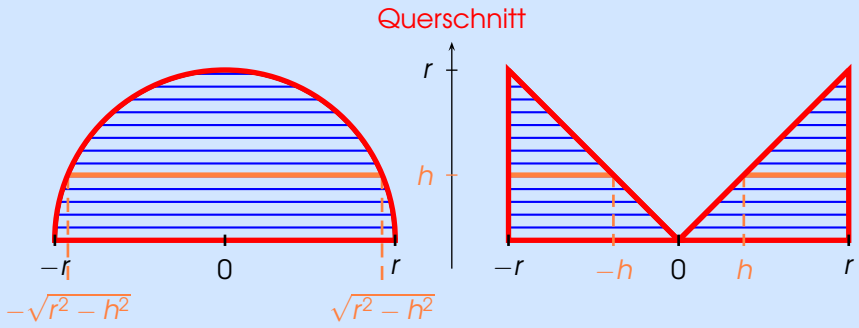
Als Beispiel zum Beispiel betrachten wir das *Standardsimplex*

$$\Delta^n := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 1 \right\}.$$

Wir sehen, dass $\Delta^1 = [0, 1]$ und dass $\Delta^n$ der Kegel mit Basis $\Delta^{n-1}$ der Höhe 1 ist. Mittels vollständiger Induktion zeigt man

$$\mathrm{Vol}_n(\Delta^n) = \frac{1}{n!}.$$

v) (Vgl. (12), S. 131) Wir betrachten den Zylinder vom Radius $r$ der Höhe $r$ und bohren einen Kegel mit Basis $\overline{B}(0, r)$ der Höhe $r$ aus. Der Rest hat dasselbe Volumen wie die Halbkugel vom Radius $r$.




Die Fläche, die zu dem orange markierten Segment gehört, beträgt in beiden Fällen $\pi\cdot(r^2-h^2)$.

## 3.4 Integrabilitätskriterien II: Der Satz von Tonelli

Der Satz von Tonelli liefert ein weiteres Integrierbarkeitskriterium für Funktionen, die als lokal integrierbar bekannt sind.

**3.4.1 Satz** (Der Satz von Tonelli[7]). *Es seien $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine $\sigma$-kompakte Teilmenge, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine* ***lokal integrierbare*** *Funktion und $\overline{f}\colon \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Fortsetzung von $f$ durch Null. Wenn eines der Integrale*

$$\int \left( \int |\overline{f}(x,y)| \mathrm{d}\mu_m(x) \right) \mathrm{d}\mu_n(y)$$

*oder*

$$\int \left( \int |\overline{f}(x,y)| \mathrm{d}\mu_n(y) \right) \mathrm{d}\mu_m(x)$$

*existiert, dann gilt*

$$f \in \mathcal{L}^1(A).$$

*Beweis.* Wegen des Majorantenkriteriums 3.2.9 reicht es zu zeigen, dass $|f|$ integrierbar ist. Es seien

- $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $A$ durch kompakte Mengen,
- $f_k := |\overline{f}| \cdot \chi_{A_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Nach Voraussetzung ist $f_k$ integrierbar, $k \in \mathbb{N}$, und die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise monoton wachsend gegen $|\overline{f}|$. Nach dem Satz von Beppo Levi 2.1.1 müssen wir zeigen, dass

$$\left( \int f_k \mathrm{d}\mu_{m+n}(x,y) \right)_{k\in\mathbb{N}}$$

nach oben beschränkt ist. Wir nehmen an, dass das erste Integral in der Voraussetzung existiert. Mit dem Satz von Fubini 3.1.1 und der Monotonie des Integrals schätzen wir

$$\begin{aligned} \int f_k \mathrm{d}\mu_{m+n}(x,y) &= \int \left( \int f_k(x,y) \mathrm{d}\mu_m(x) \right) \mathrm{d}\mu_n(y) \\ &\leq \int \left( \int |\overline{f}(x,y)| \mathrm{d}\mu_m(x) \right) \mathrm{d}\mu_n(y) \end{aligned}$$

[7] Leonida Tonelli (1885 - 1946), italienischer Mathematiker.

ab. Analog verfahren wir, wenn das zweite Integral existiert. □

*3.4.2 Beispiel.* i) Es sei

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \exp\big(-|x|-|y|\big). \end{array}$$

Diese Funktion ist stetig und damit lokal integrierbar (Beispiel 3.2.8), und es gilt $f = |f|$. Unter Verwendung von Beispiel 2.1.4, ii), berechnen wir

$$\begin{aligned} & \int \left( \int \exp\big(-|x|-|y|\big) \mathrm{d}\mu_1(x) \right) \mathrm{d}\mu_1(y) \\ = & \int \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-|x|\big) \cdot \exp\big(-|y|\big) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mu_1(y) \\ = & \int \exp\big(-|y|\big) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-|x|\big) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mu_1(y) \\ = & \; 2 \cdot \int \exp\big(-|y|\big) \cdot \left( \int_{0}^{\infty} \exp(-x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mu_1(y) \\ = & \; 2 \cdot \int \exp\big(-|y|\big) \mathrm{d}\mu_1(y) \\ = & \; 4 \cdot \int_0^{\infty} \exp(-y) \mathrm{d}y \quad = \quad 4. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $f$ integrierbar ist mit

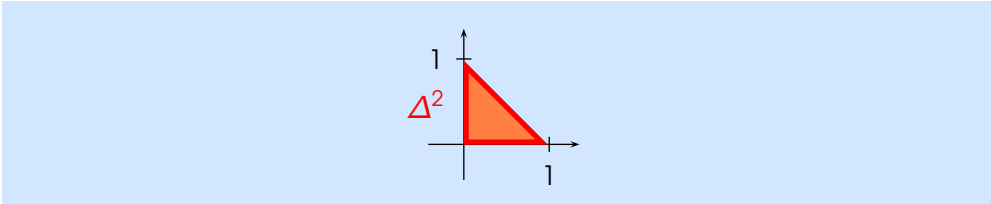
$$\int f(x,y) \mathrm{d}\mu_2(x,y) = 4.$$

ii) (Dirichlet[8]) Es seien $p > 0$ und $q > 0$ reelle Zahlen. Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^{p-1} \cdot y^{q-1}, & \text{falls } x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{array}.$$

Diese Funktion wollen wir über das zweidimensionale Simplex

$$\Delta^2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \right\}$$




integrieren. Die Funktion $f$ ist außerhalb der Nullmenge

$$N = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x \geq 0 \wedge y = 0) \vee (x = 0 \wedge y \geq 0) \right\}$$

stetig.

[8] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), deutscher Mathematiker.

Wenn $p \geq 1$ und $q \geq 1$, dann ist $f$ auf $\Delta^2$ beschränkt und damit nach Satz 3.2.1 über $\Delta^2$ integrierbar.

In den anderen Fällen überprüfen wir die Integrierbarkeit mit dem Satz von Tonelli für die offene Menge $A = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$. Da $f$ auf $A$ stetig ist, ist $f$ lokal integrierbar. Wir verwenden die *Beta-Funktion*

$$\begin{aligned} B\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Der Nachweis der Existenz dieses Integrals bei gleichzeitiger Berechnung desselben verläuft folgendermaßen: Mit der Substitution

$$u = \frac{t}{1-t}$$

gelangen wir zu der Formel

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u, \quad x > 0,\ y > 0.$$

Wir benutzen abermals die $\Gamma$-Funktion ((18), Definition 5.6.12):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1}\cdot\exp(-s)\mathrm{d}s, \quad z > 0.$$

Mit der Substitution $t = s/p$, $p \in \mathbb{R}_{>0}$, finden wir

$$\frac{\Gamma(z)}{p^z} = \int_0^\infty t^{z-1}\cdot\exp(-p\cdot t)\mathrm{d}t, \quad z > 0.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{(1+u)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)}\cdot\int_0^\infty t^{x+y-1}\cdot\exp\big(-(1+u)\cdot t\big)\mathrm{d}t$$

und weiter

$$B(x,y) = \frac{1}{\Gamma(x+y)}\cdot\int_0^\infty u^{x-1}\cdot\left(\int_0^\infty t^{x+y-1}\cdot\exp\big(-(1+u)\cdot t\big)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u.$$

Bevor wir fortfahren, bemerken wir, dass der Integrand auf $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}_{>0}$ stetig und damit lokal integrierbar ist (Beispiel 3.2.8). Ferner nimmt er nur nichtnegative Werte an. Wir tauschen zunächst die Reihenfolge der Integrale um, um mit dem Satz von Tonelli die Integrierbarkeit nachzuweisen. Folgerung 3.1.3 impliziert, dass wir damit den Wert von $B(x,y)$ berechnen. Man beachte dabei noch, dass die auftretenden uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren, nach Beispiel 2.2.4 identisch mit den Lebesgue-Integralen sind.

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(x+y)}\cdot\int_0^\infty\left(\exp(-t)\cdot t^{x+y-1}\cdot\underbrace{\int_0^\infty u^{x-1}\cdot\exp(-u\cdot t)\mathrm{d}u}_{=\frac{\Gamma(x)}{t^x}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}\cdot\int_0^\infty t^{y-1}\cdot\exp(-t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x > 0,\ y > 0. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\int\left(\int|f|\mathrm{d}\mu_1(x)\right)\mathrm{d}\mu_1(y) &= \int_0^1\left(\int_0^{1-y}x^{p-1}\cdot y^{q-1}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{p}\cdot\int_0^1 y^{q-1}\cdot(1-y)^p\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{p}\cdot B(q,p+1)\\ &= \frac{1}{p}\cdot\frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.\end{aligned}$$

Wir haben bei dieser Rechnung Folgendes benutzt: Wegen $p>0$ ist $0^p=0$ definiert und deshalb

$$\int_0^{1-y}x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\cdot x^p\Big|_0^{1-y}=\frac{1}{p}\cdot(1-y)^p.$$

Mit $\Gamma(p+1)=p\cdot\Gamma(p)$ finden wir

$$\int_{\Delta^2}x^{p-1}\cdot y^{q-1}\mathrm{d}\mu_2(x,y)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

# Anhang. Nicht messbare Mengen und das Auswahlaxiom

In diesem Anhang definieren wir den Begriff der messbaren Menge und listen seine Eigenschaften auf. Wir stellen Vitalis Beispiel einer nicht messbaren Menge vor und konstruieren damit eine Funktion $f$ auf $\mathbb{R}^n$, die nicht integrierbar ist aber für die $|f|$ integrierbar ist. Die Frage, ob es Mengen gibt, die nicht messbar sind, hat viel Grundlagenforschung angeregt, z.B. zur Rolle des Auswahlaxioms. Wir wollen in diesem Anhang auch einen kurzen Blick darauf werfen.

## Messbare Mengen

**3.A.1 Definition.** a) Eine Teilmenge $A\subset\mathbb{R}^n$ heißt *messbar*, wenn $A\cap K$ für jede kompakte Teilmenge endlich messbar ist.

b) Für eine messbare Teilmenge $A\subset\mathbb{R}^n$ ist ihr *Lebesgue-Maß* die Zahl[9]

$$\mu_n(A)=\lim_{k\to\infty}\mathrm{Vol}_n\big(A\cap[-k,k]^{\times n}\big)\in\overline{\mathbb{R}}.$$

*3.A.2 Bemerkung.* Wenn $A$ endlich messbar ist, dann ist $A\cap K$ nach 3.3.2, ii) und iii), für jede kompakte Teilmenge $K\subset\mathbb{R}^n$ endlich messbar, so dass $A$ nach Definition messbar ist. Weiter ist $(\chi_{A\cap[-k,k]^{\times n}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, die punktweise gegen $\chi_A$ konvergiert. Die zugehörige Folge der Integrale ist durch $\mathrm{Vol}_n(A)$ nach oben beschränkt. Der Satz von Beppo Levi 2.1.1 impliziert

$$\mu_n(A)=\lim_{k\to\infty}\mathrm{Vol}_n\big(A\cap[-k,k]^{\times n}\big)=\mathrm{Vol}_n(A).$$

Ebenso sieht man ein, dass eine messbare Menge, für die $\mu_n(A)<\infty$ gilt, endlich messbar ist.

[9] Man beachte, dass die Folge auf der rechten Seite nach 3.3.2, iv), monoton wachsend ist.

**3.A.3 Eigenschaften.** i) *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbare Teilmengen. Dann gilt Folgendes:*

1. *Für $A \subset B$ ist die Ungleichung $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ erfüllt.*
2. *Die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ sind messbar, und ihre Maße genügen der Gleichung*

$$\mu_n(A) + \mu_n(B) = \mu_n(A \cup B) + \mu_n(A \cap B).$$

ii) *Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Nullmenge, wenn sie messbar ist und $\mu_n(N) = 0$ gilt.*

iii) *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Teilmengen. Die Menge $A$ sei messbar, und $A \triangle B$ sei eine Nullmenge. Dann ist auch $B$ messbar.*

*Beweis.* Teil iii) folgt sofort aus 3.3.2, v). Ebenso folgen in i) Punkt 1. sowie die Messbarkeit von $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ in 2. aus 3.3.2. Bei der angegebenen Formel beachte man, dass nach 1. $\mu_n(A \cup B)$ unendlich ist, wenn $\mu_n(A)$ oder $\mu_n(B)$ es ist. In diesem Fall lautet die Formel $\infty = \infty$ und ist korrekt. Falls $\mu_n(A) < \infty$ und $\mu_n(B) < \infty$ gilt, dann sind nach Bemerkung 3.A.2 und 3.3.2 alle beteiligten Mengen endlich messbar, und wir können wieder 3.3.2 anwenden.

Teil ii). Eine Nullmenge ist endlich messbar (Aufgabe A.5.1, b). Daher ist sie nach Bemerkung 3.A.2 messbar mit $\mu_n(N) = \mathrm{Vol}_n(N) = 0$. Wenn umgekehrt $N$ messbar ist und $\mu_n(N) = 0$ gilt, dann ist $N \cap [-k, k]^{\times n}$ endlich messbar mit Volumen Null und somit eine Nullmenge, $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $N$ eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen und deshalb selbst eine Nullmenge (Lemma 1.5.2, ii). □

**3.A.4 Satz** (Die $\sigma$-Additivität)**.** *Es sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann ist auch die Menge*

$$A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$$

*messbar, und ihr Maß erfüllt die Abschätzung*

$$\mu_n(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_n(A_k). \tag{3.1}$$

*Weiter gilt:*

- *Falls $A_k$ und $A_l$ für alle natürlichen Zahlen $k \neq l$ disjunkt sind, ist die Gleichung*

$$\mu_n(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_n(A_k) \tag{3.2}$$

  *erfüllt*

- *Falls $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann folgt*

$$\mu_n(A) = \lim_{k \to \infty} \mu_n(A_k). \tag{3.3}$$

*Beweis.* Wir definieren die Folge $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch

$$B_k := A_0 \cup \cdots \cup A_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nach 3.A.3, i), ist $B_k$ messbar, $k \in \mathbb{N}$. Ferner gilt

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Für jede kompakte Teilmenge ist $(\chi_{B_k \cap K})_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von integrierbaren Funktionen, deren Integrale durch $\mathrm{Vol}_n(K)$ nach oben beschränkt sind. Nach dem Satz von Beppo Levi 2.1.1 ist $\chi_{A \cap K}$ integrierbar mit

$$\mathrm{Vol}_n(A \cap K) = \lim_{k \to \infty} \mathrm{Vol}_n(B_k \cap K).$$

Damit ist gezeigt, dass $A$ messbar ist.

Wir können jetzt Formel (3.3) begründen:[10] Ist $A$ sogar endlich messbar, dann ergibt sich die Formel wieder aus dem Satz von Beppo Levi 2.1.1. Falls $\mu_n(A) = \infty$ gilt, dann existiert wegen

$$\mu_n(A) = \lim_{l \to \infty} \mu_n(A \cap [-l, l]^{\times n})$$

zu jeder reellen Zahl $L > 0$ ein $l_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu_n(A \cap [-l_0, l_0]^{\times n}) > L + 1.$$

Dann muss es auf Grund von

$$\mu_n(A \cap [-l_0, l_0]^{\times n}) = \lim_{k \to \infty} \mu_n(A_k \cap [-l_0, l_0]^{\times n})$$

auch ein $k_0$ mit

$$\mu_n(A_{k_0}) \overset{3.A.3}{\geq} \mu_n(A_{k_0} \cap [-l_0, l_0]^{\times n}) > L$$

geben. Es folgt, dass der Grenzwert auf der rechten Seite ebenfalls unendlich ist. Damit haben wir auch gezeigt, dass

$$\mu_n(A) = \lim_{k \to \infty} \mu_n(B_k).$$

Da

$$B_k = A_0 \cup \cdots \cup A_k,$$

folgt aus 3.A.3, i), 2, dass

$$\mu_n(B_k) \leq \mu_n(A_0) + \cdots + \mu_n(A_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Daraus ergibt sich sofort die Ungleichung.

Für Gleichung (3.2) beachte man, dass unter der Voraussetzung, dass $A_k$ und $A_l$ für $k \neq l$ disjunkt sind, in (3.4) wegen 3.A.3, i), 2, Gleichheit gilt, und schließe wie zuvor. □

## Die Vitali-Menge

Wir betrachten die folgende Relation auf der Menge der reellen Zahlen:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass „$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Offensichtlich ist jede reelle Zahl zu

[10] Insbesondere wird $A_k \subset A_{k+1}$ vorausgesetzt, $k \in \mathbb{N}$.

einer Zahl im Intervall $[0,1]$ äquivalent. Wir wählen zu jeder Äquivalenzklasse $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ einen Repräsentanten $v[x] \in [0,1]$ und setzen

$$V := \Big\{ v[x] \,\Big|\, [x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \Big\}.$$

Nach Konstruktion hat diese Menge die Eigenschaft:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists! v \in V : \quad x \sim v.$$

**3.A.5 Satz** (Vitali[11]). *Die Menge $V$ ist nicht messbar.*

*Beweis.* Es sei $\alpha \colon \mathbb{N} \longrightarrow [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ eine Abzählung. Wir definieren

$$V_k := \Big\{ v + \alpha(k) \,\Big|\, v \in V \Big\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Behauptung 1.**

$$\forall k, l \in \mathbb{N} : \quad k \neq l \quad \Rightarrow \quad V_k \cap V_l = \varnothing.$$

Für $v, v' \in V$ mit $v + \alpha(k) = v' + \alpha(l)$ folgt $v - v' = \alpha(l) - \alpha(k) \neq 0$ aus $k \neq l$. Offenbar gilt $v \sim v'$. Diese Beobachtungen vertragen sich nicht mit der Definition von $V$. $\surd$

**Behauptung 2.**

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{k=0}^{\infty} V_k.$$

Für $x \in [0,1]$ gilt nach Definition $x \sim v[x]$. Da $x, v[x] \in [0,1]$, folgt $v - v[x] \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$. Für die Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $\alpha(k) = x - v[x]$ ergibt sich $x \in V_k$. $\surd$

Wir nehmen an, dass $V$ messbar ist. Aus der Konstruktion des Lebesgue-Maßes folgt leicht, dass für eine messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und einen Vektor $x$ auch die Menge

$$A + x$$

messbar ist mit Maß

$$\mu_n(A + x) = \mu_n(A).$$

Deshalb haben wir:

a) $\forall k \in \mathbb{N} : \mu_1(V_k) = \mu_1(V)$.

Nach Satz 3.A.4 gilt

b) $\mu_1 \left( \bigsqcup_{k=0}^{\infty} V_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1(V_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1(V)$.

Aus den Definitionen und Behauptung 2 leiten wir

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{k=0}^{\infty} V_k \subset [-1,2]$$

ab und mit 3.A.3, i),

$$1 = \mu_1\big([0,1]\big) \leq \mu_1 \left( \bigsqcup_{k=0}^{\infty} V_k \right) \leq \mu_1\big([-1,2]\big) = 3.$$

Da die Reihe in der Mitte nach b) nur die Werte 0 und $\infty$ annehmen kann, sind wir zu einem Widerspruch gelangt. $\square$

[11] Giuseppe Vitali (1875 - 1932), italienischer Mathematiker.

## Eine nicht Lebesgue-integrierbare Funktion

**3.A.6 Definition.** Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *messbar*, wenn

$$f^{-1}\big((c,\infty)\big)$$

für jede reelle Zahl $c$ messbar ist.

*3.A.7 Bemerkung.* Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

i) $f$ ist messbar.

ii) Für jede reelle Zahl $d$ ist $f^{-1}((-\infty,d])$ messbar.

iii) Für jede reelle Zahl $d$ ist $f^{-1}((-\infty,d))$ messbar.

iv) Für jede reelle Zahl $c$ ist $f^{-1}([c,\infty))$ messbar.

v) Für reelle Zahlen $c<d$ ist $f^{-1}((c,d))$ messbar.

vi) Für reelle Zahlen $c<d$ ist $f^{-1}([c,d])$ messbar.

Die Äquivalenz von i) und ii) erhält man durch Bilden des Komplements (s. 3.A.3, i), 2). Ebenso folgt die Äquivalenz von iii) und iv). Für „ii)⇒iii)" beachte man Satz 3.A.4 und

$$(-\infty,d)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(-\infty,d-\frac{1}{k}\right].$$

Teil v) folgt aus iii) und iv),[12] Satz 3.A.4 und

$$(c,d)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left((-\infty,d)\cap\left[c+\frac{1}{k},\infty\right)\right).$$

Die Implikation „v)⇒vi)" ergibt sich aus 3.A.3, i), 2, Satz 3.A.4 und

$$\mathbb{R}\setminus[c,d]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\left(-\infty,c-\frac{1}{k}\right)\cup\left(d+\frac{1}{k},\infty\right)\right).$$

Für „vi)⇒i)" benutzt man ebenfalls Satz 3.A.4 sowie

$$(c,\infty)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[c+\frac{1}{k},k\right].$$

*3.A.8 Beispiel.* i) Es sei $M\subset\mathbb{R}^n$ eine messbare Menge. Dann ist $\chi_M$ eine messbare Funktion.

ii) Es seien $c_1,\dots,c_s$ nichtnegative reelle Zahlen und $M_1,\dots,M_s$ messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion

$$f:=\sum_{k=1}^{s}c_k\cdot\chi_{M_k}$$

messbar. In der Tat gilt für $c\in\mathbb{R}$

$$f^{-1}\big((c,\infty)\big)=\bigcup_{i=1}^{s}\bigcup_{\substack{1\le k_1<\dots<k_i\le s:\\ c_{k_1}+\dots+c_{k_i}>c}}(M_{k_1}\cap\dots\cap M_{k_i}),$$

[12] Diese Bedingungen sind bereits als äquivalent nachgewiesen.

falls $c \geq 0$, und $f^{-1}((c,\infty)) = \mathbb{R}$, falls $c < 0$.

iii) Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so dass $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x) \,\}$ eine Nullmenge ist. Wenn $f$ messbar ist, dann ist auch $g$ messbar. (Für jedes $c \in \mathbb{R}$ unterscheiden sich $f^{-1}((c,\infty))$ und $g^{-1}((c,\infty))$ nur um eine Nullmenge, so dass die Aussage aus Satz 1.5.9 folgt.)

iv) Da jeder beschränkte Quader (endlich) messbar ist, folgt aus ii) und iii), dass jede Treppenfunktion messbar ist.

**3.A.9 Satz.** i) *Es seien* $(\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von messbaren Funktionen und* $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion, so dass*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x).$$

*Dann ist $f$ messbar.*

ii) *Eine Lebesgue-integrierbare Funktion* $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist messbar.*

*Beweis.* i) Wir beweisen zunächst folgende Aussage:

**Behauptung.** *Es sei* $(g_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von messbaren Funktionen. Dann sind auch die Funktionen*

$$I := \inf(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \textit{und} \quad S := \sup(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

*messbar.*

Für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$S^{-1}\big((c,\infty)\big) = \bigcup_{k=0}^{\infty} g_k^{-1}\big((c,\infty)\big).$$

Für $I$ benutzt man

$$I = -\sup(-g_k)_{k\in K}$$

und Bemerkung 3.A.7. $\surd$

Da

$$f = \inf\big(\sup(\varphi_k)_{k\geq l}\big)_{l\in\mathbb{N}},$$

folgt Teil i) sofort aus der Behauptung.

ii) Es gibt eine Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktion mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \psi_k\|_1 = 0.$$

Dem Beweis des Satzes von Riesz–Fischer 1.6.1 entnimmt man, dass es eine Teilfolge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dieser Folge und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N : \quad f(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x).$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi_k'\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \varphi_k(x), & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus N \\ 0, & \text{falls } x \in N \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f'\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus N \\ 0, & \text{falls } x \in N \end{cases}. \end{aligned}$$

Nach Beispiel 3.A.8, iii) und iv), ist $\varphi'_k$ messbar, $k \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad f'(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi'_k(x).$$

Nach Teil i) ist $f'$ messbar, und Beispiel 3.A.8, iii), zeigt, dass auch $f$ messbar ist. □

**3.A.10 Satz.** *Es seien $V$ die Vitali-Menge und*

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in V \\ -1, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus V \\ 0, & \text{falls } x \notin [0,1] \end{cases} \end{array}.$$

*Die Funktion $|f|$ ist integrierbar, nicht aber die Funktion $f$.*

*Beweis.* Da $[0,1]$ eine endlich messbare Menge ist und $|f| = \chi_{[0,1]}$ gilt, ist $|f|$ integrierbar. Nach Satz 3.A.9, ii), reicht es zu zeigen, dass $f$ nicht messbar ist. Dies folgt, weil

$$f^{-1}\big((0,\infty)\big) = V$$

gilt, und die Vitali-Menge $V$ nach Satz 3.A.5 nicht messbar ist. □

## Das Auswahlaxiom

In (17), Abschnitt 1.2, haben wir die Axiome der Mengenlehre skizziert. Ein Axiom haben wir dabei bewusst ausgeklammert: Das Auswahlaxiom. Eine mögliche Formulierung lautet folgendermaßen:

**3.A.11 Das Auswahlaxiom.** *Es seien $I$ eine Indexmenge und $(A_i)_{i\in I}$ eine durch $I$ indizierte Familie von Mengen. Dann existiert eine Abbildung*

$$f\colon I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$$

*mit*

$$f(i) \in A_i, \quad i \in I.$$

Die Abbildung $f$ wählt also aus jeder Menge $A_i$, $i \in I$, ein Element aus. In dieser Formulierung ist das Auswahlaxiom gut verständlich, und wir haben im Verlauf der Vorlesung schon oft stillschweigend solche Wahlen getroffen. Die Gründe, weshalb wir bisher noch nicht auf das Auswahlaxiom eingegangen sind, sind folgende: Zum einen ist das Auswahlaxiom äquivalent zu Aussagen, die sich intuitiv weit weniger gut verstehen lassen. Zum anderen ist das Auswahlaxiom nicht „unumstritten". Es gibt Bereiche, in denen man ohne das Auswahlaxiom oder mit schwächeren Versionen desselben bessere Sätze beweisen kann. Bei der Frage nach der Existenz nicht messbarer Mengen sehen wir uns gezwungen, das Auswahlaxiom zu thematisieren. Die Konstruktion der Vitali-Menge benutzt offenbar das Auswahlaxiom: In jeder Äquivalenzklasse musste ein Repräsentant gewählt werden. Auf die Frage, ob man die Existenz nicht messbarer Mengen auch ohne das Auswahlaxiom beweisen kann, werden wir am Ende dieses Kapitels eingehen. Zunächst wollen wir weitere Aussagen vorstellen, die zum Auswahlaxiom äquivalent sind.

**3.A.12 Das Wohlordnungsprinzip.** *Auf jeder Menge $A$ existiert eine Wohlordnung „$\leq$".*

Der Begriff der Wohlordnung wurde in (17), Definition 1.3.23, eingeführt: Eine *Wohlordnung* ist eine Anordnung, bei der jede nichtleere Teilmenge $B \subset A$ ein kleinstes Element enthält. In (17), Abschnitt 1.3, haben wir eine Wohlordnung auf den natürlichen Zahlen konstruiert. Die üblichen Anordnungen auf $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ sind keine Wohlordnungen, da $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ kein kleinstes Element enthält. Das Wohlordnungsprinzip verlangt, dass wir auch die Menge der reellen Zahlen wohlordnen können. Die Existenz einer solchen Wohlordnung können wir intuitiv nicht begründen. Wir können auch keine solche Wohlordnung angeben, da die Existenz auf dem Auswahlaxiom beruht (s. Satz 3.A.15).

**3.A.13 Definition.** a) Es sei $A$ eine Menge. Eine Relation „$\leq$" heißt *partielle Ordnung*, wenn sie transitiv und antisymmetrisch ist.

b) Es seien $A$ eine Menge und „$\leq$" eine partielle Ordnung auf $A$. Eine *Kette*[13] ist eine Teilmenge $B \subset A$, so dass

$$\forall x, y \in B: \quad (x \leq y) \vee (y \leq x).$$

c) Es seien $A$ eine Menge, „$\leq$" eine partielle Ordnung auf $A$ und $B \subset A$ eine Teilmenge. Ein *obere Schranke für $B$* ist ein Element $a \in A$,[14] so dass

$$\forall x \in B: \quad x \leq a.$$

d) Es seien $A$ eine Menge und „$\leq$" eine partielle Ordnung auf $A$. Ein *maximales Element* ist ein Element $a \in A$, zu dem es kein bzgl. „$\leq$" größeres Element gibt:

$$\forall x \in A: \quad \neg(a < x).$$

Man vergleiche Definition 1.3.13 in (17). Bei einer partiellen Ordnung darf es Elemente geben, die nicht miteinander vergleichbar sind. Ein Beispiel für eine partielle Ordnung, die keine Anordnung ist, das wir in letzter Zeit des Öfteren benutzt haben, ist die Relation „$\leq$" auf Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$:

$$f \leq g \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: \quad f(x) \leq g(x).$$

**3.A.14 Axiom** (Das Zornsche[15]Lemma)**.** *Es seien $A$ eine Menge und „$\leq$" eine partielle Ordnung auf $A$, so dass jede Kette in $A$ eine obere Schranke hat. Dann existiert in $A$ mindestens ein maximales Element.*

Diese Aussage klingt zunächst sehr technisch, und man hat zunächst keine Meinung zu ihrer Gültigkeit. Mit dem Zornschen Lemma lässt sich zum Beispiel leicht nachweisen, dass jeder Vektorraum eine Basis hat (s. (6), Satz (10.1)).

**3.A.15 Satz.** *Das Auswahlaxiom, das Wohlordnungsprinzip und das Zornsche Lemma sind äquivalent.*

[13] Die angegebene Bedingung besagt, dass „$\leq$" auf $B$ eine Anordnung im üblichen Sinne induziert.

[14] $a$ muss nicht in $B$ liegen.

[15] Max August Zorn (1906 - 1993), US-amerikanischer Mathematiker. Zorn wurde in Krefeld geboren und emigrierte 1933 in die USA.

Für die Beweise verweisen wir auf das Buch (6). Man muss aufpassen, auf der Grundlage welcher Axiome man diese Äquivalenz behauptet und beweist. Ein schöner Ausspruch zu diesem Thema stammt von Jerry Bona:[16]

> *The axiom of choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?*

*3.A.16 Bemerkung.* Der Satz, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt, ist ebenfalls **äquivalent** zum Auswahlaxiom (Blass, s. (8), Theorem 4.44).

## Mächtigkeiten

Unser nächstes Ziel ist die „Konstruktion" einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Graph nicht messbar ist. Dazu benötigen wir wieder das Auswahlaxiom und eine gewisse Verschärfung des Wohlordnungsprinzips.

**3.A.17 Definition.** a) Zwei Mengen $A$ und $B$ sind *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion

$$\alpha\colon A \longrightarrow B$$

gibt.
**Schreibweise.** $A \sim B$.

b) Die Menge $A$ ist von *geringerer oder gleicher Mächtigkeit* wie die Menge $B$, wenn eine Injektion

$$\alpha\colon A \longrightarrow B$$

existiert.
**Schreibweise.** $A \preceq B$.

c) Gilt für die Mengen $A$ und $B$, dass $A \preceq B$ aber $A \not\sim B$, dann ist $A$ von *geringerer Mächtigkeit* als $B$.
**Schreibweise.** $A \prec B$.

**3.A.18 Satz.** *Es seien $A$ und $B$ zwei Mengen, so dass*

$$A \preceq B \quad \text{und} \quad B \preceq A.$$

*Dann gilt*

$$A \sim B.$$

*Beweis.* Es seien $\alpha_1\colon A \longrightarrow B$ und $\alpha_2\colon B \longrightarrow A$ injektive Abbildungen. Wir haben

$$(\alpha_2 \circ \alpha_1)(A) \subset \alpha_2(B) \subset A$$

und

$$A \sim (\alpha_2 \circ \alpha_1)(A), \quad B \sim \alpha_2(B).$$

Wir beweisen daher:

**Behauptung.** *Es seien $C \subset B \subset A$ und $C \sim A$. Dann folgt $B \sim A$.*

Sei dazu $\alpha\colon A \longrightarrow C$ eine Bijektion. Durch Rekursion definieren wir

$$\begin{aligned} A_0 &:= A, \\ A_{n+1} &:= \alpha(A_n), \quad n \in \mathbb{N}, \\ B_0 &:= B, \\ B_{n+1} &:= \alpha(B_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

[16] Jerry Lloyd Bona (geb. 1945), US-amerikanischer Mathematiker

Damit erklären wir

$$\begin{aligned} \beta\colon A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto \begin{cases} \alpha(x), & \text{falls } x \in \bigcup_{k=0}^{\infty}(A_n \setminus B_n) \\ x, & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

(Man beachte, dass aus $x \notin B$ folgt, dass $x \in A_0 \setminus B_0$. Die zweite Alternative in der Definition von $\beta$ betrifft also nur gewisse Elemente von $B$.) Seien

$$D := \bigcup_{k=0}^{\infty}(A_n \setminus B_n),$$

$x \in D$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \in A_n \setminus B_n$. Da $\alpha$ injektiv ist, folgt

$$\alpha(x) \in \alpha(A_n) \setminus \alpha(B_n) = A_{n+1} \setminus B_{n+1}, \quad \text{d.h.} \quad \alpha(x) \in D.$$

Damit bildet $\beta$ die Menge $D$ injektiv in sich selbst ab. Aus der Definition von $\beta$ folgt, dass $\beta$ injektiv ist,

Wir müssen noch nachweisen, dass $\beta$ surjektiv ist. Wir schreiben[17]

$$B = (A \setminus D) \cup (B \cap D).$$

Für $y \in A \setminus D$ gilt $y = \beta(y)$. Für $y \in B \cap D$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in A_n \setminus B_n$. Wegen $B_0 = B$ muss $n \geq 1$ gelten. Da $A_n = \alpha(A_{n-1})$, existiert ein $x \in A_{n-1}$ mit $\alpha(x) = y$. Aus $y \notin B_n$ folgt $x \notin B_{n-1}$. Damit gilt $x \in D$. □

Die Verschärfung des Wohlordnungsprinzips, die wir brauchen, ist folgende:

**3.A.19 Satz.** *Jede Menge $A$ besitzt eine Wohlordnung „$\leq$", so dass für jedes $x \in A$ die Menge*

$$S(x) := \left\{ y \in A \,\middle|\, y < x \right\}$$

*von geringerer Mächtigkeit als $A$ ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir weitere Hilfsmittel aus der Mengenlehre. Bevor wir auf diese zu sprechen kommen, wollen wir die obige Behauptung etwas motivieren. Dazu betrachten wir $\mathbb{R}$ und eine Wohlordnung „$\leq$" auf $\mathbb{R}$. Es sei

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, S(x) \text{ ist überabzählbar} \right\}.$$

Wenn die Menge $B$ nicht leer ist, dann besitzt sie ein kleinstes Element $b_0$. Die Menge $S(b_0)$ ist überabzählbar und für jedes $x \in S(b_0)$ ist $S(x)$ wegen $x < b_0$ abzählbar. Mit $A := \mathbb{R}$, falls $B = \varnothing$, bzw. $A := S(b_0)$, falls $B \neq \varnothing$, und der Einschränkung von „$\leq$" auf $A$ haben wir eine wohlgeordnete überabzählbare Menge gefunden, für die Satz 3.A.19 richtig ist. Wenn wir die Kontinuumshypothese ((17), 1.9.14) annehmen, dann gilt $S(b_0) \sim \mathbb{R}$, und der Satz ist für $\mathbb{R}$ bewiesen. Wir wollen den Satz jetzt im Allgemeinen und ohne die Kontinuumshypothese (aber natürlich mit dem Auswahlaxiom) ableiten.

[17] Wie bereits bemerkt gilt $A \setminus D \subset B$.

## Mengen und Klassen

Für diese Betrachtungen wäre es ein Ärgernis, wenn wir Mengen mit gewissen Eigenschaften nicht zu gewissen neuen Objekten zusammenfassen könnten. Um das zu tun, verwenden wir die „Mengen-Klassen-Lehre". In dieser Fassung der axiomatischen Mengenlehre gibt es Mengen, Klassen und die Elementbeziehung „$\in$". Diese werden durch Axiome charakterisiert. Wichtig dabei sind: Mengen sind spezielle Klassen, Klassen enthalten nur Mengen als Elemente. Des Weiteren gelten Axiome, die den in (17), Abschnitt 1.2, vorgestellten gleichen. In der Mengen-Klassen-Lehre darf man alle Mengen, die eine gewisse Eigenschaft $\mathcal{E}$ gemeinsam haben, zu einer Klasse zusammenfassen. So existiert zum Beispiel die *Allklasse*

$$V := \{\, x \mid x = x \,\},$$

die **alle Menge** enthält. Die Allklasse kann selbst keine Menge sein, da man sonst wieder zur Russellschen Antinomie gelangte ((17), 1.2.2). Man kann auch

$$\varnothing := \{\, x \mid x \neq x \,\}$$

bilden. Allerdings ist dies zunächst nur eine Klasse, und man muss in einem Axiom fordern, dass $\varnothing$ eine Menge ist. Viele der Begriffe und Konstruktionen, die wir für Mengen kennen, lassen sich auf Klassen übertragen. Wir werden dies jetzt ohne weiteren Kommentar tun und verweisen die Leser auf (6) für genauere Informationen.

*3.A.20 Beispiel.* Die Relation „$\sim$" aus Definition 3.A.17, a), ist eine Äquivalenzrelation auf der Allklasse $V$. Wir werden gleich ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen angeben.

## Ordinalzahlen

**3.A.21 Definition.** a) Eine Menge $A$ ist *transitiv*, wenn gilt:[18]

$$\forall x \in A: \quad x \subset A.$$

b) Eine *Ordinalzahl* ist eine Menge $A$, die transitiv und durch die Elementbeziehung „$\in$" wohlgeordnet ist.

Um ein Beispiel für eine Ordinalzahl zu erhalten, an dem wir unsere Intuition schulen können, konstruieren wir ein Modell der natürlichen Zahlen: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x \cup \{x\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $V$ die Allklasse. Mit dem Dedekindschen Rekursionssatz ((17), Satz 1.3.8; (6), Satz (3.10)) können wir eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi(0) = \varnothing$$

und

$$\varphi(n+1) = F\big(\varphi(n)\big) = \varphi(n) \cup \big\{\varphi(n)\big\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

[18] Wir erinnern daran, dass Elemente von Mengen selber Mengen sind.

konstruieren. Das Bild **N** ist eine Menge und $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ ist eine Bijektion. Damit identifizieren wir $\mathbb{N}$ und **N**. Es gilt nun

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing, \\ 1 &= \{\varnothing\}, \\ 2 &= \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}, \\ 3 &= \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\Big\} \\ &\vdots \quad . \end{aligned}$$

Ein leichter Induktionsbeweis zeigt, dass $\mathbb{N}$ transitiv ist. Ferner ist klar, dass $n \in n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Damit überprüft man, dass „$\in$" mit der Anordnung „$<$" aus (17), Definition 1.3.17, übereinstimmt. Die Menge $\mathbb{N}$ ist also eine Ordinalzahl. Ferner sieht man, dass jede natürliche Zahl selbst eine Ordinalzahl ist. Wir bilden die **Klasse**

$$\mathrm{On} := \Big\{ A \in V \,\Big|\, A \text{ ist Ordinalzahl} \Big\}.$$

**3.A.22 Lemma.** *Es seien $A$ eine Ordinalzahl und $x \in A$. Dann ist $x$ ebenfalls eine Ordinalzahl.*

Das Lemma besagt

$$\forall A \in \mathrm{On}: \quad A = \Big\{ B \in \mathrm{On} \,\Big|\, B \in A \Big\}. \tag{3.5}$$

Es folgt, dass

$$\forall A \in V: \quad A \in \mathrm{On} \quad \Rightarrow \quad A \subset \mathrm{On}.$$

Damit ist On eine **transitive Klasse**.

*Beweis des Lemmas.* Es seien $A \in \mathrm{On}$ und $x \in A$. Da $A$ transitiv ist, gilt $x \subset A$. Folglich ist $x$ durch „$\in$" wohlgeordnet. Es bleibt nachzuweisen, dass $x$ transitiv ist. Sei dazu $y \in x$. Wir müssen zeigen, dass $y \subset x$ gilt. Für $z \in y$ ist $z \in x$ zu zeigen. Da aber $z \in y \in x \in A$ und „$\in$" eine Anordnung auf $A$ ist, folgt diese Eigenschaft sofort. □

Auf On definieren wir die Relation „$\leq$" vermöge:

- $\forall A, B \in \mathrm{On}: \quad A < B \quad :\Longleftrightarrow \quad A \in B.$
- $\forall A, B \in \mathrm{On}: \quad A \leq B \quad :\Longleftrightarrow \quad (A < B) \vee (A = B).$

*3.A.23 Bemerkung.* Es gilt folgende Äquivalenz:

$$\forall A, B \in \mathrm{On}: \quad A \leq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B.$$

„$\Rightarrow$": Wenn $A = B$ gilt, dann auch $A \subset B$. Andernfalls haben wir $A \in B$ und wegen der Transitivität von $B$ auch $A \subset B$.

„$\Leftarrow$": Wenn $A \subset B$ und $A \neq B$ gilt, dann sei $x$ das kleinste Element von $B \setminus A$. Es gilt dann

$$A = \Big\{ y \in B \,\Big|\, y < x \Big\} = x,$$

so dass $A \in B$. Dabei folgt die letzte Gleichheit aus (3.5).

**3.A.24 Satz.** *Die Relation „$<$" hat folgende Eigenschaften:*

- $\forall A, B, C \in \mathrm{On}: \quad (A \leq B) \wedge (B \leq C) \quad \Rightarrow \quad A \leq C.$

- $\forall A, B \in \mathrm{On}: \quad (A \leq B) \wedge (B \leq A) \quad \Rightarrow \quad A = B.$
- $\forall A, B \in \mathrm{On}: \quad (A \leq B) \vee (B \leq A).$
- *Jede Teilklasse* $A \subset \mathrm{On}$ *besitzt ein kleinstes Element.*
- *Für jede Ordinalzahl* $B$ *ist*

$$S(B) := \left\{ A \in \mathrm{On} \,\middle|\, A < B \right\} = B.$$

  *eine Menge.*

*Beweis.* S. (6), Lemma (7.4). □

**3.A.25 Folgerung.** *Die Klasse* On *ist keine Menge.*

*Beweis.* Wäre On eine Menge, so wäre sie transitiv und würde durch „$\in$" wohlgeordnet. Es folgte, dass On eine Ordinalzahl ist und daher $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$. Das wird aber durch das Fundierungsaxiom ((6), (M5), S. 9) verboten. □

Die oben eingeführte Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto x \cup \{x\}. \end{aligned}$$

bildet On in sich selbst ab:

**3.A.26 Satz.** *Für jede Ordinalzahl* $A$ *ist auch*

$$F(A) = A \cup \{A\}$$

*eine Ordinalzahl.*

*Beweis.* S. (6), Lemma (7.7). □

Eine Ordinalzahl $B$ ist eine *Nachfolgeordinalzahl*, wenn es eine Ordinalzahl $A$ gibt, so dass

$$B = F(A) = A \cup \{A\}.$$

Nicht jede Ordinalzahl ist eine Nachfolgeordinalzahl, z.B. ist $\mathbb{N}$ keine. Die Ordinalzahlen, die keine Nachfolgeordinalzahlen sind, sind sogenannte *Limesordinalzahlen*. Ihre Charakterisierung wird in (6), S. 51, gegeben.

Die Klasse der Ordinalzahlen ähnelt somit in mancher Hinsicht den natürlichen Zahlen. (Die Existenz von Limesordinalzahlen ist allerdings ein klares Unterscheidungsmerkmal.) Die wichtigen Techniken der vollständigen Induktion bzw. Dedekindschen Rekursion werden zur **transfiniten Induktion** bzw. **Rekursion** verallgemeinert ((6), Satz (7.9) und (7.10)).

Die transfinite Induktion funktioniert folgendermaßen: Es sei $\mathcal{A}$ eine Aussage, die sich auf Ordinalzahlen bezieht. Es gelte:

- $\mathcal{A}$ ist für $\varnothing$ richtig.
- Sei $B$ eine Ordinalzahl, so dass $\mathcal{A}$ für alle Ordinalzahlen $C \in B$ gilt, dann gilt $\mathcal{A}$ auch für $B$.

Dann ist $\mathcal{A}$ für alle Ordinalzahlen erfüllt.

Bei der transfiniten Rekursion definiert man eine Funktion $F\colon \mathrm{On} \longrightarrow V$, indem man

- $F(\varnothing)$ festlegt,

- für $B \in \mathrm{On}$ den Wert $F(B)$ aus den Werten $F(C)$, $C \in B$ , berechnet.

Die transfinite Rekursion kommt zum Beispiel bei der Herleitung des Wohlordnungsprinzips aus dem Auswahlaxiom zum Einsatz: Man stellt eine Bijektion zwischen einer gegebenen Menge $A$ und einer Ordinalzahl her ((6), Satz (9.1)). Ferner zeigt man mit diesem Verfahren:

**3.A.27 Satz.** *Es seien $A$ eine Menge und „$\leq$" eine Wohlordnung auf $A$. Dann gibt es genau eine Ordinalzahl $B$ und genau eine Bijektion $\alpha\colon A \longrightarrow B$, für die gilt:*

$$\forall x, y \in A: \quad x < y \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(x) \in \alpha(y).$$

*Beweis.* S. (6), Lemma (6.3). □

Wir geben noch eine interessante Anwendung der Ordinalzahlen auf die Relation „$\preceq$" aus dem Studium der Mächtigkeiten:

**3.A.28 Satz.** *Für zwei Mengen $A$ und $B$ gilt:*

$$(A \preceq B) \vee (B \preceq A).$$

*Beweis.* Man wähle Ordinalzahlen $C$ und $D$ und Bijektionen $\alpha\colon A \longrightarrow C$ und $\beta\colon B \longrightarrow D$. Dann gilt $C = D$, $C \in D$ oder $D \in C$ und damit $C \subset D$ oder $D \subset C$. Dies entspricht $A \preceq B$ oder $B \preceq A$. □

*Beweis von Satz 3.A.19.* Es sei $M$ das kleinste Element der Klasse

$$\Big\{ B \in \mathrm{On} \,\Big|\, A \sim B \Big\}.$$

Man wähle eine Bijektion $\alpha\colon A \longrightarrow M$. Die Wohlordnung von $M$ induziert über $\alpha$ eine Wohlordnung von $A$. Für $x \in A$ ist $S(\alpha(x)) \in M$ eine Ordinalzahl mit $S(\alpha(x)) < M$. Wegen $S(\alpha(x)) \preceq M$ gilt $S(\alpha(x)) \prec M$ nach Definition von $M$. Nach Definition gilt ebenfalls $S(\alpha(x)) = \alpha(S(x))$, so dass $S(x) \sim S(\alpha(x))$. □

## Der Satz von Cantor–Bendixson

**3.A.29 Satz.** *Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine überabzählbare abgeschlossene Teilmenge. Dann gilt $M \sim \mathbb{R}$.*

*3.A.30 Bemerkung.* Die Kontinuumshypothese ((17), 1.9.14) ist für **abgeschlossene** Teilmengen von $\mathbb{R}$ also ein Satz.

**3.A.31 Definition.** a) Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Ein *isolierter Punkt* von $M$ ist ein Punkt $x \in M$, zu dem es eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ mit

$$U \cap M = \{x\}$$

gibt.

b) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist *perfekt*, wenn sie abgeschlossen und nichtleer ist und keine isolierten Punkte enthält.

**3.A.32 Satz.** i) *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ hat nur abzählbar viele isolierte Punkte.*

ii) *Für jede perfekte Menge $M \subset \mathbb{R}$ gibt es eine injektive Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$. Insbesondere gilt*

$$M \sim \mathbb{R}.$$

*Beweis.* i) Wenn $x \in M$ ein isolierter Punkt ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap M = \{x\}$. Weiter gibt es ein $y$ in $(x-\varepsilon/2, x+\varepsilon/2) \cap \mathbb{Q}$. Es gilt $(y-\varepsilon/2, y+\varepsilon/2) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ und

$$\left(y-\frac{\varepsilon}{2}, y+\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap M = \{x\}.$$

Es gibt damit eine Surjektion der abzählbaren Menge

$$\left\{ (y-a, y+a) \subset \mathbb{R} \,\middle|\, y \in \mathbb{Q},\ a \in \mathbb{Q}_{>0},\ \#\big((y-a, y+a) \cap M\big) = 1 \right\}$$

auf die Menge der isolierten Punkte von $M$. Also ist $M$ abzählbar ((17), Definition 1.9.1).

ii) Da $M \subset \mathbb{R}$, gilt $M \preceq \mathbb{R}$. Nach Satz 3.A.18 ist noch $\mathbb{R} \preceq M$ zu zeigen. Wir definieren

$$\mathcal{I} := \left\{ I \subset \mathbb{R} \,\middle|\, I \cap M \neq \varnothing \text{ und } I \text{ ist offenes Intervall} \right\}.$$

Weiter fixieren wir Auswahlabbildungen

$$\xi_1 : \mathcal{I} \longrightarrow M$$

und

$$\xi_2 : \mathcal{I} \longrightarrow M,$$

die einem Intervall $I$ aus $\mathcal{I}$ ein Element $\xi_1(I) \in I \cap M$ bzw. ein Element $\xi_2 \in (I \cap M) \setminus \{\xi_1(I)\}$ zuordnen. (Dabei beachte man, dass $(I \cap M) \setminus \{\xi_1(I)\}$ nicht leer ist, weil $M$ perfekt ist.)

Wir definieren nun rekursiv eine Folge $(I_k)_{k \geq 2}$ von Intervallen in $\mathcal{I}$:

- $I_1 := \mathbb{R}$.
- Für $k \geq 2$ schreibe man $k = 2 \cdot m + \varepsilon$ mit $\varepsilon \in \{0, 1\}$.
  - Falls $\varepsilon = 0$ wähle man ein $\delta > 0$, das kleiner als $1/2^k$ ist und für das

    $$\big(\xi_1(I_m) - \delta, \xi_1(I_m) + \delta\big) \subset I_m$$

    und

    $$\big[\xi_1(I_m) - \delta, \xi_1(I_m) + \delta\big] \cap \big[\xi_2(I_m) - \delta, \xi_2(I_m) + \delta\big] = \varnothing$$

    gilt, und definiere

    $$I_k := \big(\xi_1(I_m) - \delta, \xi_1(I_m) + \delta\big).$$

  - Falls $\varepsilon = 1$ wähle man ein $\delta > 0$, das kleiner als $1/2^k$ ist und für das

    $$\big(\xi_2(I_m) - \delta, \xi_2(I_m) + \delta\big) \subset I_m$$

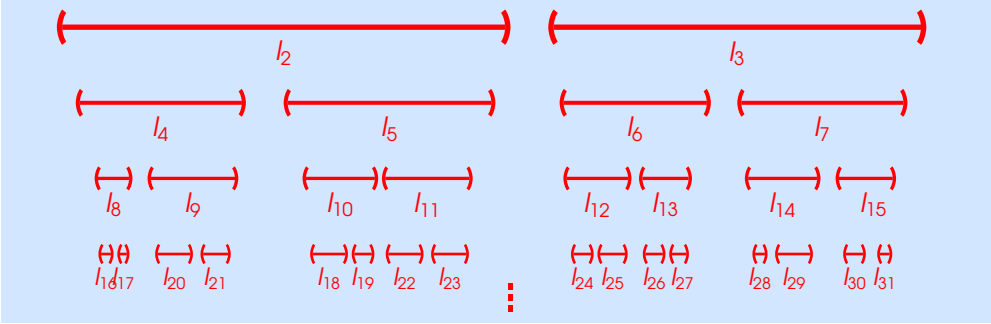
    und

    $$\overline{I_{k-1}} \cap \big[\xi_2(I_m) - \delta, \xi_2(I_m) + \delta\big] = \varnothing$$

    gilt, und definiere

    $$I_k := \big(\xi_2(I_m) - \delta, \xi_2(I_m) + \delta\big).$$

Schematisch ergibt sich folgendes Bild der Intervalle:




Jetzt definieren wir eine injektive Abbildung $\alpha\colon [0,1) \longrightarrow M$. Da $[0,1) \sim \mathbb{R}$ ((17), Satz 1.9.12 und Beweis von Folgerung 1.9.13) folgt aus der Existenz dieser Injektion die gewünschte Ungleichung $\mathbb{R} \preceq M$. Wir benutzen, dass wir jede reelle Zahl $x \in [0,1)$ in eindeutiger Weise als Dualbruch

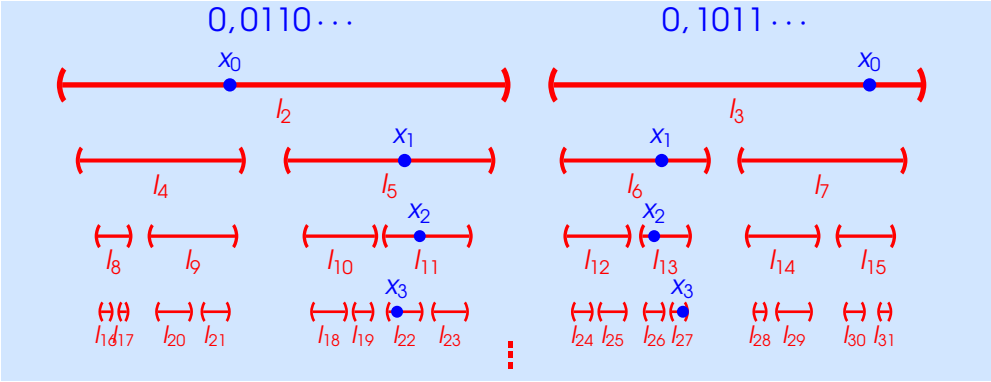
$$0, s_0 s_1 s_2 \cdots, \quad s_j \in \{0,1\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

ohne Einserperiode schreiben können. Durch Rekursion definieren wir die Auswahlfolge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$:

- $k_0 = 2 + s_0$,
- $k_{j+1} := 2 \cdot k_j + s_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$.

Dies liefert die Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_j := \xi_1(I_{k_j}), \quad j \in \mathbb{N}.$$




Nach Konstruktion der Intervalle $I_k$, $k \in \mathbb{N}$, ist dies eine Cauchy-Folge von Elementen in $M$. Sei $\alpha(x)$ ihr Grenzwert. Da $M$ als perfekte Menge abgeschlossen ist, liegt $\alpha(x)$ in $M$. Die Injektivität der Zuordnung $x \longmapsto \alpha(x)$ folgt ebenfalls leicht aus der Definition der $I_k$, $k \in \mathbb{N}$. □

Die Komplikationen im Beweis von Satz 3.A.29 werden durch die isolierten Punkte verursacht. Für eine abgeschlossene Menge $M$ seien $I(M)$ die Menge ihrer isolierten Punkte und

$$M' := M \setminus I(M).$$

Dies ist immer noch eine abgeschlossene Teilmenge und nichtleer, falls $M$ überabzählbar war. Allerdings kann $M'$, wie im folgenden Beispiel illustriert, wieder isolierte Punkte enthalten. Man kann nun

- $M^{(0)} := M$,

- $M^{(k+1)} := (M^k)'$, $k \in \mathbb{N}$,

setzen und hoffen, dass irgendwann $M^{(k)} = M^{(k+1)}$ gilt und somit $M^{(k)}$ eine nichtleere perfekte Teilmenge von $M$ ist. Dann folgte Satz 3.A.29 aus Satz 3.A.32, ii). Diese Strategie funktioniert leider nur, wenn man $M^{(A)}$ mittels transfiniter Rekursion für alle Ordinalzahlen $A$ definiert (s. (2), Abschnitt 11, (6), Satz (13.5)).

*3.A.33 Beispiel.* Es sei

$$M := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nach (18), Beispiel 2.2.3, ist $M$ kompakt. Alle Punkte außer 0 sind isoliert. Die Menge $M'$ besteht aus einem isolierten Punkt. An jeden isolierten Punkt von $M$ können wir eine Folge „anheften", die gegen diesen Punkt konvergiert, und somit eine Menge $N$ mit $N' = M$ konstruieren.

**3.A.34 Definition.** Es seien $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Kondensationspunkt*, wenn

$$M \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ überabzählbar ist. Die Menge der Kondensationspunkte von $M$ wird mit

$$\mathrm{Kond}(M)$$

bezeichnet.

*3.A.35 Beispiele.* i) Für $M = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Kond}(M) = [0, 1].$$

ii) Für eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Kond}(M) \subset M$: Für jeden Punkt $x \notin M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap M = \varnothing$, weil $\mathbb{R} \setminus M$ offen ist. Daher kann $x$ kein Kondensationspunkt sein.

**3.A.36 Satz.** i) *Für jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$ gilt:*

- $M \setminus \mathrm{Kond}(M)$ *ist abzählbar.*
- *Wenn $M$ überabzählbar ist, ist* $\mathrm{Kond}(M)$ *eine perfekte Menge.*

ii) *Für eine perfekte Menge $M \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$M = \mathrm{Kond}(M).$$

*Beweis.* i) Es sei

$$I := \left\{ (y, a) \,\middle|\, y \in \mathbb{Q},\ a \in \mathbb{Q}_{>0} : (y - a, y + a) \cap M \text{ ist abzählbar} \right\}.$$

Dies ist eine abzählbare Menge, für die

$$M \setminus \mathrm{Kond}(M) = \bigcup_{(y,a) \in I} (y - a, y + a) \cap M$$

gilt. Da $(y - a, y + a) \cap M$ für alle $(y, a) \in I$ abzählbar ist, ist $M \setminus \mathrm{Kond}(M)$ eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen und damit abzählbar ((17), Folgerung 1.9.9).

Es gilt

$$M \subset \big(M \setminus \mathrm{Kond}(M)\big) \cup \mathrm{Kond}(M). \tag{3.6}$$

Da $M \setminus \mathrm{Kond}(M)$ abzählbar ist und $M$ überabzählbar, muss $\mathrm{Kond}(M)$ überabzählbar sein und damit nicht leer. Um zu zeigen, dass $\mathrm{Kond}(M)$ abgeschlossen ist, verwenden wir (18), Satz 2.4.1. Es seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_k \in \mathrm{Kond}(M)$, $k \in \mathbb{N}$, und $x := \lim_{k\to\infty} a_k$. Für $\varepsilon > 0$ enthält $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ einen Punkt $a_{k_0}$. Da $a_{k_0}$ ein Kondensationspunkt ist, gibt es überabzählbar viele Elemente von $M$ in $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Daher ist auch $x$ ein Kondensationspunkt. Schließlich müssen wir noch zeigen, dass $\mathrm{Kond}(M)$ keine isolierten Punkte enthält. Für $x \in \mathrm{Kond}(M)$ und $\varepsilon > 0$ enthält $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ überabzählbar viele Elemente von $M$. Die Inklusion (3.6) und die Tatsache, dass $M \setminus \mathrm{Kond}(M)$ abzählbar ist, implizieren, dass überabzählbar viele dieser Punkte zu $\mathrm{Kond}(M)$ gehören. Also ist $x$ nicht isoliert.

ii) Nach Beispiel 3.A.35, ii), gilt $\mathrm{Kond}(M) \subset M$. Es sei $x \in M \setminus \mathrm{Kond}(M)$. Da $\mathrm{Kond}(M)$ abgeschlossen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathrm{Kond}(M) = \varnothing$. Die Menge

$$N := \left[x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right] \cap M$$

ist nichtleer, abgeschlossen und abzählbar. Wegen Satz 3.A.32, ii), muss sie einen isolierten Punkt enthalten. Diejenigen der beiden Randpunkte, die isoliert in $N$ liegen, können wir entfernen und erhalten eine Menge $N'$, die immer noch nichtleer, abgeschlossen und abzählbar ist. Damit erkennen wir, dass auch die Menge

$$\widetilde{N} := \left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap M$$

einen isolierten Punkt enthalten muss. Sei $x'$ ein solcher. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left(x'-\delta, x'+\delta\right) \cap \widetilde{N} = \{x'\} \quad \text{und} \quad \left(x'-\delta, x'+\delta\right) \subset \left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Es folgt

$$\left(x'-\delta, x'+\delta\right) \cap M = \{x'\}.$$

Damit ist $x'$ ein isolierter Punkt von $M$, im Widerspruch zur vorausgesetzten Perfektion von $M$. □

**3.A.37 Satz** (Die Cantor–Bendixson[19]-Zerlegung)**.** *Es seien $M \subset \mathbb{R}$ eine überabzählbare abgeschlossene Menge. Dann existieren genau eine abzählbare Menge $I$ und genau eine perfekte Menge $P$, so dass*

$$M = I \cup P \quad \textit{und} \quad I \cap P = \varnothing.$$

*Beweis.* Für eine abgeschlossene Teilmenge $M$ gilt $\mathrm{Kond}(M) \subset M$. Die Existenz der Zerlegung folgt deshalb aus Satz 3.A.36, i). Für die Eindeutigkeit seien $I$, $I'$ abzählbare und $P$, $P'$ perfekte Mengen, so dass

$$I \cup P = I' \cup P' \quad \text{und} \quad I \cap P = \varnothing = I' \cap P'.$$

Sei z.B. $x \in P' \setminus P$. Da $P$ abgeschlossen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap P = \varnothing$. Also gilt $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap P' \subset I$. Da $x$ nach Satz 3.A.36, ii), Kondensationspunkt von $P'$ ist, ist $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap P'$ überabzählbar. Die Existenz von $x$ steht somit im Widerspruch zur Abzählbarkeit von $I$. □

[19] Ivar Otto Bendixson (1861 - 1935), schwedischer Mathematiker.

## Eine Funktion mit nicht messbarem Graphen

Wir konstruieren in diesem Abschnitt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Graph $\Gamma_f$ nicht messbar ist. Die ersten Beispiele dieser Art stammen von Sierpiński[20] (20). Wir benutzen dabei eine Konstruktion aus der Arbeit (3).

**3.A.38 Satz.** *Es gibt eine* ***nicht messbare*** *Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$, so dass*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \#A_x \leq 1, \quad A_x := \Big\{ y \in \mathbb{R} \,\Big|\, (x,y) \in A \Big\}.$$

**3.A.39 Hilfssatz.** *Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist, dann existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$K \cap A = \varnothing \quad \textit{und} \quad \mu_n(K) > 0.$$

*Beweis.* Es gibt eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset U$ und $\mu_n(U) < 1/2$ (Satz 1.5.4). Das Komplement $Z := \mathbb{R}^n \setminus U$ ist abgeschlossen und messbar (3.A.3, i), 2) mit

$$\mu_n(Z) = \infty.$$

Es gibt also ein $k > 0$ mit

$$\mu_n\big(Z \cap [-k,k]^{\times n}\big) > 0.$$

Die Menge $K := Z \cap [-k,k]^{\times n}$ ist kompakt und disjunkt von $A$. □

**3.A.40 Hilfssatz.** *Für die Menge*

$$\mathcal{P} := \Big\{ K \subset \mathbb{R}^n \,\Big|\, K \textit{ ist kompakt und } \mu_n(K) > 0 \Big\}$$

*gilt*

$$\mathcal{P} \preceq \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Da

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{A} := \Big\{ Z \subset \mathbb{R}^n \,\Big|\, Z \text{ ist abgeschlossen} \Big\},$$

genügt es, $\mathcal{A} \preceq \mathbb{R}$ nachzuweisen. Es sei

$$\mathcal{O} := \Big\{ U \subset \mathbb{R}^n \,\Big|\, Z \text{ ist offen} \Big\}.$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ U & \longmapsto & \mathbb{R}^n \setminus U \end{array}$$

ist bijektiv. Es reicht also zu beweisen, dass $\mathcal{O} \preceq \mathbb{R}$. Die Menge

$$\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_{>0}$$

ist abzählbar unendlich. Damit gilt ((17), Satz 1.9.12 und Beweis von Folgerung 1.9.13)

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_{>0}) \sim \mathbb{R}.$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon \mathcal{O} & \longmapsto & \mathcal{P}(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_{>0}) \\ U & \longmapsto & \Big\{ (x,a) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_{>0} \,\Big|\, B(x,a) \subset U \Big\} \end{array}$$

[20] Wacław Franciszek Sierpiński (1882 - 1969), polnischer Mathematiker.

ist injektiv, weil

$$U = \bigcup_{(x,a)\in\alpha(U)} B(x,a).$$

Dies beendet unsere Argumentation. □

**3.A.41 Bemerkung.** *Da $\mathbb{R}^n \subset \mathcal{A}$ vermöge $x \longmapsto \{x\}$, gilt insbesondere $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$.*

**3.A.42 Hilfssatz.** *Es seien $n = 2$ und $\mathcal{P}$ wie in Hilfssatz 3.A.40. Für $K \in \mathcal{P}$ gilt*

$$C_K := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, K_x = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x,y) \in K \right\} \neq \varnothing \right\} \sim \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Die Menge $C_K$ ist das Bild der kompakten Menge $K$ unter der Projektion $\pi_1 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x$. Damit ist $C_K$ kompakt ((18), Satz 3.4.1) und insbesondere abgeschlossen. Nach Satz 3.A.29 genügt es zu beweisen, dass $C_K$ überabzählbar ist. Wäre $C_K$ abzählbar, dann wäre $C_K \times \mathbb{R}$ eine Nullmenge. Das widerspräche der Tatsache $K \subset C_K \times \mathbb{R}$. □

*Beweis von Satz 3.A.38.* Es sei „$\leq$" eine Wohlordnung von $\mathcal{P}$ wie in Satz 3.A.19. Die Menge $A$ wird von der Gestalt

$$A = \left\{ a_K = (x_K, y_K) \in K \,\middle|\, K \in \mathcal{P} \right\}$$

sein und durch eine Art transfinite Rekursion definiert: Es sei $L_0$ das kleinste Element von $\mathcal{P}$, und man wähle $x_{L_0} \in C_{L_0}$. Für $L \in \mathcal{P}$ sei $a_K$ für

$$K \in S(L) := \left\{ H \in \mathcal{P} \,\middle|\, H < L \right\}$$

konstruiert. Da $S(L) \prec \mathbb{R} \sim C_L$, können wir

$$x_L \in C_L \setminus \left\{ x_K \,\middle|\, K \in S(L) \right\}$$

und $y_L \in \mathbb{R}$ mit

$$(x_L, y_L) \in L$$

wählen. Nach Konstruktion gilt $\#A_x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $A \cap K \neq \varnothing$ für alle $K \in \mathcal{P}$. Nach Hilfssatz 3.A.39 kann $A$ keine Nullmenge sein. Auf der anderen Seite müsste $A$ nach dem Satz von Fubini 3.1.1 eine Nullmenge sein, wenn $A$ messbar wäre (vgl. Aufgabe A.5.3, ii). □

**3.A.43 Satz.** *Es gibt eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Graph nicht messbar ist.*

*Beweis.* Es seien $A$ wie in Satz 3.A.38 und $B := \pi_1(A)$, $\pi_1 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x$. Wir definieren

$$\begin{array}{rcl} f \colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} y, & \text{falls } x \in B \text{ (Dabei sei } y \text{ der Punkt mit } (x,y) \in A) \\ 0, & \text{falls } x \notin B \end{cases} \end{array}.$$

Es gilt

$$\Gamma_f = A \cup (\mathbb{R} \setminus B) \times \{0\}.$$

Da $(\mathbb{R} \setminus B) \times \{0\}$ nach Aufgabe A.3.3 und Lemma 1.5.2, i), eine Nullmenge ist, ist $\Gamma$ nicht messbar (3.A.3, iii). □

## Was passiert ohne Auswahlaxiom?

Alle Konstruktionen nicht messbarer Mengen, die wir hier vorgeführt haben, benutzen in wesentlicher Form das Auswahlaxiom. Es stellt sich die Frage, ob sich die Existenz nicht messbarer Mengen auch ohne Auswahlaxiom beweisen lässt.

Die Axiome der Mengenlehre mit Auswahlaxiom werden mit ZFC abgekürzt, das Auswahlaxiom mit AC und die Axiome der Mengenlehre ohne Auswahlaxiom mit ZF, so dass ZFC=ZF+AC. Die Aussage, dass ein gewisses Axiomensystem A konsistent, d.h. widerspruchsfrei, ist, bezeichnen wir mit Kons(A). Das Auswahlaxiom ist unabhängig von ZF, d.h. gilt Kons(ZF), dann gelten auch Kons(ZFC) ((9), Abschnitt 3.4; (13), Corollary 2.14) und Kons(ZF+$\neg$AC) ((9), Kapitel 5; (13), Exercise (E4), S. 245). Die Aussage Kons(ZF) lässt sich aus prinzipiellen Überlegungen nicht beweisen (Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz, (15), Satz 2.2).

Wir listen weitere Axiome auf:

- DC — Axiom der abhängigen Wahlen ("Dependent Choice"): Eine schwächere Form des Auswahlaxioms ((9), Abschnitt 2.4.7).
- WI — Axiom der Existenz einer schwach unerreichbaren ("weakly inaccessible") Kardinalzahl: Es soll eine „große Kardinalzahl" existieren, die sich nicht durch Standardkonstruktionen wie Potenzmengenbildung aus kleineren Kardinalzahlen herstellen lässt ((13), Definition 10.39 (1)).
- AD — Axiom der Bestimmtheit ("Determinacy"); Ein Axiom, das dem Auswahlaxiom widerspricht, aber mit DC verträglich ist ((8), Definition 7.12; (9), Abschnitt 12.3).
- LM — Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist Lebesgue-messbar.

**3.A.44 Satz** (Solovay[21] und Shelah[22]).

$$\text{Kons(ZFC+WI)} \iff \text{Kons(ZF+DC+LM)}.$$

*Beweis.* „$\Rightarrow$": (21); (10), Theorem 11.1; „$\Leftarrow$": (19). □

Was bedeutet das für unser Problem? Wenn das Axiomensystem, das aus ZFC und dem Kardinalzahlaxiom besteht, konsistent ist, dann ist das Axiomensystem, das aus ZF, dem abgeschwächten Auswahlaxiom DC und der Annahme, dass jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ messbar ist, ebenfalls konsistent, und es ist nicht möglich, die Existenz einer nicht Lebesgue-messbaren Menge ohne das Auswahlaxiom zu beweisen. Eine nicht Lebesgue-messbare Menge lässt sich nicht auf einfache Weise angeben. Das abgeschwächte Auswahlaxiom DC wird benötigt, um die grundlegenden Eigenschaften des Lebesgue-Maßes (3.A.3 und Satz 3.A.4) zu gewährleisten.

Man beachte, dass wir auf Kons(ZFC+WI) angewiesen sind. Leider lässt sich die Aussage ((10), §1)

$$\text{Kons(ZFC)} \Rightarrow \text{Kons(ZFC+WI)}.$$

aus allgemeinen Gründen nicht beweisen. (Interessanterweise wäre es theoretisch möglich $\neg$Kons(ZFC+WI) zu beweisen, wenn WI wirklich ZFC widerspräche. Außerdem impliziert Kons(ZF+$\neg$WI) auch Kons(ZF+DC+$\neg$LM)[23]. Falls das

[22] Robert Martin Solovay (geb. 1938), US-amerikanischer Mathematiker.
[22] Saharon Shelah (geb. 1945), israelischer Mathematiker.
[23] Dies folgt aus der Arbeit von Shelah (19)

Kardinalzahlaxiom WI also ZF widerspräche — wovon allerdings niemand auszugehen scheint —, dann ließe sich die Existenz nicht Lebesgue-messbarer Mengen bereits mit dem schwächeren Auswahlaxiom DC nachweisen.

**3.A.45 Satz** (Mycielski[24]–Świerczkowski)**.** *Unter der Annahme* Kons(ZF+AD) *gilt* LM.

*Beweis.* (14); (8), Theorem 7.13; (9), Theorem 12.16. □

Neben den erwähnten Büchern kann man auch (2) und (22), Kapitel 13, für eine etwas elementarere Diskussion einiger der geschlideten Sachverhalte konsultieren.

[24] Jan Mycielski (geb. 1932), polnischer Mathematiker

# Kapitel 4

# Die Transformationsformel

## 4.1 Formulierung der Transformationsformel

In der Analysis I ((17), Satz 5.4.1) wurde die Substitutionsregel bewiesen:

> *Es seien $I, I' \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varphi\colon I' \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass $\varphi(I') \subset I$. Dann gilt für $a, b \in I'$:*
>
> $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

Der Beweis ist eine Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ((17), Satz 5.3.1) und der Kettenregel ((17), Satz 4.2.4). Die folgende Transformationsformel verallgemeinert in gewisser Weise die Substitutionsregel. Da wir in höheren Dimensionen keine Stammfunktionen und keinen Hauptsatz haben,[1] unterscheiden sich die Formulierung und der Beweis von der eindimensionalen Situation.

**4.1.1 Satz** (Die Transformationsformel)**.** *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, $\varphi\colon U \longrightarrow V$ ein Diffeomorphismus vom Typ $\mathscr{C}^1$ und*

$$\begin{aligned} J_\varphi\colon U &\longrightarrow \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto J_\varphi(x). \end{aligned}$$

i) *Eine Funktion $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion*

$$(f \circ \varphi) \cdot \big|\mathrm{Det}(J_\varphi)\big|\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*integrierbar ist.*

ii) *Falls $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist, gilt*

$$\int_V f(y)\mathrm{d}\mu_n(y) = \int_U (f \circ \varphi)(x) \cdot \Big|\mathrm{Det}\big(J_\varphi(x)\big)\Big|\mathrm{d}\mu_n(x).$$

*4.1.2 Bemerkung.* Für $n = 1$ betrachten wir den Fall, dass $f\colon I' \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion ist und $\varphi\colon I \longrightarrow I'$ ein Diffeomorphismus vom Typ $\mathscr{C}^1$, also insbesondere stetig differenzierbar mit $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in I$. Da die Ableitung $\varphi'$ stetig ist und nirgends verschwindet, gilt

[1] Genauer gesagt wird dieser als Satz von Stokes in Kapitel 5 auftauchen. Er hilft aber dennoch nicht beim Beweis der Transformationsformel.

$$\begin{array}{rll} \text{entweder (a)} & \forall x \in I': & \varphi'(x) > 0 \\ \text{oder (b)} & \forall x \in I': & \varphi'(x) < 0. \end{array}$$

In Situation (a) gilt $\varphi(a) < \varphi(b)$ für $a < b$ aus dem Intervall $I'$ und

$$\begin{aligned} \int_{[\varphi(a),\varphi(b)]} f(y)\mathrm{d}\mu_1(y) &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \big|\varphi'(x)\big|\mathrm{d}x \\ &= \int_{[a,b]} f\big(\varphi(x)\big) \cdot \big|\varphi'(x)\big|\mathrm{d}\mu_1(x). \end{aligned}$$

Im Fall (b) folgt für $a < b$ aus $I'$, dass $\varphi(a) > \varphi(b)$ und

$$\begin{aligned} \int_{[\varphi(b),\varphi(a)]} f(y)\mathrm{d}\mu_1(y) &= \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(y)\mathrm{d}y \\ &= -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\mathrm{d}y \\ &= -\int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \big|\varphi'(x)\big|\mathrm{d}x \\ &= \int_{[a,b]} f\big(\varphi(x)\big) \cdot \big|\varphi'(x)\big|\mathrm{d}\mu_1(x). \end{aligned}$$

Die Substitutionsregel trifft im Gegensatz zur Transformationsformel eine Aussage über abgeschlossene Intervalle. Außerdem setzt sie die Stetigkeit von $f$ voraus. Aus ihr folgt damit erst einmal die spezielle Transformationsformel (Satz 4.2.1) für $n = 1$, aus der man aber die allgemeine Transformationsformel ableiten kann (Satz 4.2.3).

Wir beginnen den Beweis der Transformationsformel mit dem folgenden Spezialfall:

**4.1.3 Satz.** *Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Wenn $N \subset U$ eine Nullmenge ist, dann ist auch $f(N)$ eine Nullmenge.*

*Beweis (vgl. Aufgabe A.3.5, b).* Wir zeigen, dass für jeden kompakten Quader $Q \subset U$ das Bild von $N' := N \cap Q$ unter $f$ eine Nullmenge ist. Da $U$ nach Hilfssatz 3.2.4 eine abzählbare Vereinigung von kompakten Quadern ist und eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist, folgt daraus die Behauptung.

Der Quader $Q$ ist kompakt und die Funktion $f$ stetig differenzierbar. Wegen (18), Aufgabe A.5.2, Beispiel 3.1.2, ii), und Folgerung 3.4.2, gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\forall x \in Q: \quad \big\|J_\varphi(x)\big\|_{\mathrm{op}} < C.$$

Da $Q$ konvex ist ((18), S. 66), gibt es nach dem Mittelwertsatz ((18), Satz 8.3.2) zu zwei Punkten $x, y \in Q$ ein $z$ auf der Verbindungsstrecke von $x$ und $y$, so dass

$$\big\|f(x) - f(y)\| \le \big\|J_\varphi(z)\big\|_{\mathrm{op}} \cdot \|x - y\| \le C \cdot \|x - y\|.$$

**Behauptung.** *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen **Würfeln**, so dass gilt*

- $N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$,
- $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(W_k) < \varepsilon$.

Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleerer, beschränkter offener Quader. Wir schreiben

$$Q = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

Für $\eta > 0$ definieren wir

$$n_i := \min\Big\{ k \in \mathbb{N} \,\Big|\, a_i + k \cdot \eta \geq b_i \Big\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

und

$$I_i^j := [a_i + (j-1) \cdot \eta, a_i + j \cdot \eta], \quad j = 1, \ldots, n_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Es seien weiter

$$J = \Big\{ (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^{\times n} \,\Big|\, 1 \leq j_i \leq n_i,\ i = 1, \ldots, n \Big\}$$

und

$$W_{\underline{j}} := I_1^{j_1} \times \cdots \times I_n^{j_n}, \quad \underline{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in J.$$

Bei den $W_{\underline{j}}$, $\underline{j} \in J$, handelt es sich um Würfel mit

$$Q \subset \bigcup_{\underline{j} \in J} W_{\underline{j}} =: Q(\eta).$$

Es gilt

- $\mathrm{Vol}_n\big(Q(\eta)\big) = \mathrm{Vol}_n(Q) + \eta \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{Vol}_n(Q)}{b_i - a_i} + \eta^2 \cdot P$.
- $\mathrm{Vol}_n\big(Q(\eta)\big) = \sum_{\underline{j} \in J} \mathrm{Vol}_n(W_{\underline{j}})$, weil $W_{\underline{j}} \cap W_{\underline{j}'}$ für $\underline{j} \neq \underline{j}' \in J$ in einer Hyperebene enthalten und damit Nullmenge ist (Aufgabe A.3.3 und Lemma 1.5.2, i).

Dabei ist $P$ ein Polynom in $\eta$, dessen Koeffezienten aus $b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n$ berechnet werden können. Damit ist klar, dass man zu einem vorgegebenem $\delta > 0$ ein $\eta > 0$ finden kann, so dass

$$\mathrm{Vol}_n\big(Q(\eta)\big) < \mathrm{Vol}_n(Q) + \delta.$$

Nach Satz 1.5.4 gibt es eine Folge von offenen Quadern $(Q_l)_{l\in\mathbb{N}}$, so dass

- $N \subset \bigcup_{l=0}^{\infty} Q_l$,
- $\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_l) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mit der obigen Konstruktion finden wir zu jedem Quader $Q_l$ einen Quader $\overline{Q}_l$, der Vereinigung von Würfeln ist, so dass

- $Q_l \subset \overline{Q}_l$,
- $\mathrm{Vol}_n(\overline{Q}_l) \leq \mathrm{Vol}_n(Q_l) + \frac{\varepsilon}{2^{l+2}}$, $l \in \mathbb{N}$.

Deshalb gilt

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(\overline{Q}_l) < \varepsilon.$$

Der Quader $\overline{Q}_l$ ist Vereinigung von endlich vielen Würfeln $V_{l,1},\ldots,V_{l,s_l}$, $l \in \mathbb{N}$. Sei

$$\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \left\{ (l,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\middle|\, 1 \leq j \leq s_l \right\}$$

eine Abzählung. Dann ist $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $W_k := V_{\alpha(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, eine möglich Folge von Würfeln mit den geforderten Eigenschaften. $\surd$

Seien $\varepsilon > 0$ und $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Würfeln wie in der Behauptung. Wir schreiben

$$W_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x - a\|_M \leq \frac{d_k}{2} \right\},$$

so dass

$$\mathrm{Vol}_n(W_k) = d_k^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in W_k$ finden wir (vgl. (18), Bemerkung 1.2.5)

$$\left\|f(x) - f(a_k)\right\|_M \leq \left\|f(x) - f(a_k)\right\| \leq C \cdot \|x - a_k\| \leq C \cdot \sqrt{n} \cdot \|x - a_k\|_M \leq C \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{d_k}{2}.$$

Es gilt also

$$f(W_k) \subset W_k' := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left\|x - f(a_k)\right\|_M \leq C \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{d_k}{2} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wir schließen

- $f(N') \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k'$,
- $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(W_k') \leq (C \cdot \sqrt{n})^n \cdot \varepsilon$.

Damit ist $f(N')$ nach Satz 1.5.4 eine Nullmenge. $\square$

## 4.2 Die spezielle Transformationsformel

Vermöge der Konvergenzsätze reduziert man den Beweis der Transformationsformel auf den Fall von Treppenfunktionen. Diesen Schritt werden wir nun ausführen.

**4.2.1 Satz** (Die spezielle Transformationsformel). *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\varphi\colon U \longrightarrow V$ ein Diffeomorphismus vom Typ $\mathscr{C}^1$. Für jeden kompakten Quader $Q \subset V$ ist $\varphi^{-1}(Q)$ eine endlich messbare Menge, so dass*

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \int_{\varphi^{-1}(Q)} \left|\mathrm{Det}\big(J_\varphi(x)\big)\right| \mathrm{d}\mu_n(x).$$

*4.2.2 Bemerkung.* Die spezielle Transformationsformel gilt für $n = 1$ (s. Bemerkung 4.1.2).

**4.2.3 Satz.** *Satz 4.1.1 ist äquivalent zu Satz 4.2.1.*

*Beweis.* „Satz 4.1.1 $\Rightarrow$ Satz 4.2.1": Hier wendet man Satz 4.1.1 auf die Funktion $f = \chi_Q$ an, die nach Satz 3.2.1, ii), integrierbar ist.

„Satz 4.2.1 $\Rightarrow$ Satz 4.1.1": Es sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, so dass

$$\overline{\operatorname{supp}(\psi)} \subset V.$$

Außerhalb einer Nullmenge ist sie Linearkombination von charakteristischen Funktionen von kompakten Quadern, die in $V$ enthalten sind. Satz 4.2.1, Satz 1.5.9, ii), Satz 4.1.3 und die Linearität des Integrals zeigen, dass die Funktion

$$\widetilde{\psi} := (\psi \circ \varphi) \cdot \left|\operatorname{Det}(J_\varphi)\right|$$

integrierbar ist mit Integral

$$\int_V \psi(y) \mathrm{d}\mu_n(y) = \int_U \widetilde{\psi}(x) \mathrm{d}\mu_n(x).$$

**Behauptung.** *Es gibt eine Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit nachstehenden Eigenschaften:*[2]

- $\forall k \in \mathbb{N}: \quad \overline{\operatorname{supp}(\psi_k)} \subset V.$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \|\overline{f} - \psi_k\|_1 = 0.$
- *Es gibt eine Nullmenge $N \subset V$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(y) = f(y)$ für alle $y \in V \setminus N$.*

*Insbesondere gilt*

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty} \int \psi_k \mathrm{d}\mu_n.$$

Zunächst gibt es eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen (vgl. Beweis des Satzes von Riesz–Fischer 1.6.1), so dass

- $\lim\limits_{k\to\infty} \|\overline{f} - \varphi_k\|_1 = 0,$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(y) = f(y)$ für fast alle $y \in V$ gilt.

Weiter gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad |\overline{f} - \varphi_k \cdot \chi_V| \le |\overline{f} - \varphi_k|,$$

so dass nach Satz 1.2.8, iv), gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \|\overline{f} - \varphi_k \cdot \chi_V\|_1 \le \|\overline{f} - \varphi_k\|_1.$$

Setzen wir $\widetilde{\varphi}_k := \varphi_k \cdot \chi_V$, $k \in \mathbb{N}$, dann gilt immer noch

- $\lim\limits_{k\to\infty} \|\overline{f} - \widetilde{\varphi}_k\|_1 = 0,$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{\varphi}_k(y) = f(y)$ für fast alle $y \in V$.

[2] $\overline{f}$ sei wie üblich die Forsetzung von $f$ auf $\mathbb{R}^n$ durch Null.

Es sei $(A_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $V$ durch Figuren (Hilfssatz 3.2.4). Da $\widetilde{\varphi}_k$ außerhalb einer Nullmenge Linearkombination von charakteristischen Funktionen von endlich messbaren Mengen, die in $V$ enthalten sind, ist, folgt leicht (vgl. Satz 3.A.4):

$$\lim_{l\to\infty} \|\widetilde{\varphi}_k - \widetilde{\varphi}_k \cdot \chi_{A_l}\|_1 = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren eine Auswahlfolge $(l(k))_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\|\widetilde{\varphi}_k - \widetilde{\varphi}_k \cdot \chi_{A_{l(k)}}\|_1 < \frac{1}{2^k},$$

und definieren

$$\psi_k := \widetilde{\varphi}_k \cdot \chi_{A_{l(k)}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat die gewünschten Eigenschaften. $\surd$

Wie bereits festgestellt sind die Funktionen

$$\widetilde{\psi}_k := (\psi_k \circ \varphi) \cdot \left|\mathrm{Det}(J_\varphi)\right|, \quad k \in \mathbb{N},$$

integrierbar. Weiter haben wir:

$$\forall x \in U \setminus \varphi^{-1}(N): \quad \lim_{k\to\infty} \widetilde{\psi}_k(x) = (f \circ \varphi)(x) \cdot \Big|\mathrm{Det}\big(J_\varphi(x)\big)\Big|.$$

Man beachte hier, dass $\varphi^{-1}$ nach (18), Bemerkung 10.4.2, ein Diffeomorphismus vom Typ $\mathscr{C}^1$ ist und daher $\varphi^{-1}(N)$ nach Satz 4.1.3 eine Nullmenge. Wir überprüfen, dass $(\widetilde{\psi}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist: Für $k, l \in \mathbb{N}$ findet man:

$$\|\widetilde{\psi}_k - \widetilde{\psi}_l\|_1 = \int_U \left|\widetilde{\psi}_k(y) - \widetilde{\psi}_l(y)\right| \mathrm{d}\mu_n(y) = \int_V \left|\psi_k(x) - \psi_l(x)\right| \mathrm{d}\mu_n(x) = \|\psi_k - \psi_l\|_1.$$

Dabei haben wir benutzt, dass $|\psi_k - \psi_l|$ eine Treppenfunktion ist, für die der Abschluss ihres Trägers in $V$ liegt. Da $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, ist auch $(\widetilde{\psi}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine. Aus dem Beweis des Satzes von Riesz–Fischer 1.6.1 folgt nun, dass $(f \cdot \varphi) \cdot |\mathrm{Det}(J_\varphi)|$ über $U$ integrierbar ist, und

$$\begin{aligned}
\int_U (f \circ \varphi)(x) \cdot \Big|\mathrm{Det}\big(J_\varphi(x)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_n(x) &= \lim_{k\to\infty} \int_U \widetilde{\psi}_k(x) \mathrm{d}\mu_n(x) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_V \psi_k(y) \mathrm{d}\mu_n(y) \\
&= \int_V f(y) \mathrm{d}\mu_n(y).
\end{aligned}$$

Bis jetzt haben wir gezeigt, dass in Teil i) von Satz 4.1.1 aus der Integrierbarkeit von $f$ über $V$ die Integrierbarkeit von $(f \circ \varphi) \cdot |\mathrm{Det}(J_\varphi)|$ über $U$ folgt und dass Teil ii) stimmt. Um zu zeigen, dass die Integrierbarkeit von $(f \circ \varphi) \cdot |\mathrm{Det}(J_\varphi)|$ über $U$ die Integrierbarkeit von $f$ über $V$ impliziert, betrachte man den Diffeomorphismus $\varphi^{-1}\colon V \longrightarrow U$. $\square$

## 4.3 Der Beweis der speziellen Transformationsformel

Wir werden die spezielle Transformationsformel zunächst in einigen Spezialfällen verifizieren. Mit diesen Spezialfällen können wir sie durch vollständige Induktion auf die Substitutionsregel zurückführen.

**4.3.1 Hilfssatz** (Permutationen). *Es seien $\sigma\colon \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ eine bijektive Abbildung und*

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1,\dots,x_n) &\longmapsto (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

*Dann gilt die spezielle Transformationsformel für $\varphi_\sigma$.*

*Beweis.* Offenbar gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \mathrm{Vol}_n\big(\varphi_\sigma^{-1}(Q)\big)$$

für jeden (achsenparallelen) Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$. Da $\varphi_\sigma$ eine lineare Abbildung ist, hat man ((18), Beispiel 6.1.5, ii)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad D\varphi_\sigma(x) = \varphi_\sigma$$

und damit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \Big|\mathrm{Det}\big(J_{\varphi_\sigma}(x)\big)\Big| = \big|\mathrm{Det}(\varphi_\sigma)\big| = 1.$$

Aus den beiden beobachteten Tatsachen folgt die spezielle Transformationsformel für $\varphi_\sigma$. □

**4.3.2 Hilfssatz** (Verknüpfungen). *Es seien $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\varphi\colon U \longrightarrow V$ und $\psi\colon V \longrightarrow W$ Diffeomorphismen vom Typ $\mathscr{C}^1$. Wenn die spezielle Transformationsformel für $\varphi$ und $\psi$ gilt, so auch für $\psi \circ \varphi\colon U \longrightarrow W$.*

*Beweis.* Es seien $Q \subset W$ ein Quader und $A := \psi^{-1}(Q)$. Zunächst schließen wir aus der speziellen Transformationsformel für $\psi$, dass

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \int_A \Big|\mathrm{Det}\big(J_\psi(y)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_n(y) = \int_V \chi_A \cdot \Big|\mathrm{Det}\big(J_\psi(y)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_n(y).$$

Wir benutzen die Tatsache, dass die spezielle Transformationsformel für $\varphi$ die allgemeine Transformationsformel für $\varphi$ impliziert (Satz 4.2.3). Damit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} &\int_V \chi_A \cdot \Big|\mathrm{Det}\big(J_\psi(y)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_n(y) \\ = &\int_U (\chi_A \circ \varphi)(x) \cdot \Big|\mathrm{Det}\big(J_\varphi(x)\big)\Big| \cdot \Big|\mathrm{Det}\Big(J_\psi\big(\varphi(x)\big)\Big)\Big| \mathrm{d}\mu_n(x) \\ = &\int_U \big(\chi_Q \circ (\psi \circ \varphi)\big)(x) \cdot \Big|\mathrm{Det}\big(J_{\psi\circ\varphi}(x)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_n(x) \\ = &\int_{(\psi\circ\varphi)^{-1}(Q)} \Big|\mathrm{Det}\big(J_{\psi\circ\varphi}(x)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_n(x). \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde die Kettenregel ((18), Satz 6.3.1) verwendet. Dies ist die spezielle Transformationsformel für $\psi \circ \varphi$. □

**4.3.3 Hilfssatz** (Vom Lokalen zum Globalen). *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\varphi\colon U \longrightarrow V$ ein Diffeomorphismus vom Typ $\mathscr{C}^1$. Zu jedem Punkt $x \in U$ gebe es eine offene Umgebung $W$, so dass die spezielle Transformationsformel für $\varphi_{|W}\colon W \longrightarrow \varphi(W)$ gilt. Dann gilt sie auch für $\varphi$.*

*Beweis.* Wir bilden die folgende Menge von offenen Bällen in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \mathscr{W} := \Big\{ W = B(x,a) \;\Big|\; & x \in \mathbb{Q}^n,\ a \in \mathbb{Q}_{>0},\ \exists W' \subset U \text{ offen}:\ W \subset W', \\ & \text{und die spezielle Transformationsformel gilt für} \\ & \varphi_{|W'}\colon W' \longrightarrow \varphi(W') \Big\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Menge $\mathcal{W}$ abzählbar. Damit können wir

$$\mathcal{W} = \left\{ W_k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

schreiben. Die Voraussetzung besagt, dass $\mathcal{W}$ eine offene Überdeckung von $U$ ist. Deshalb ist

$$\widetilde{\mathcal{W}} := \left\{ \widetilde{W}_k := \varphi(W_k) \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

eine offene Überdeckung von $V$. Die spezielle Transformationsformel gilt auch für $\varphi_{|W_k} \colon W_k \longrightarrow \widetilde{W}_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Für einen kompakten Quader $Q \subset V$ setzen wir

$$\begin{aligned} A_0 &:= Q \cap \widetilde{W}_0, \\ A_{k+1} &:= \left(Q \cap \widetilde{W}_{k+1}\right) \setminus \left(\widetilde{W}_0 \cup \cdots \cup \widetilde{W}_k\right), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Menge $A_k$ ist endlich messbar, $k \in \mathbb{N}$: Nach 3.A.3, i), ist sie messbar. (Dazu beachte man, dass $\widetilde{W}_k$ als offene Menge messbar ist.) Da sie in der kompakten Menge $Q$ enthalten ist, ist sie wegen 3.A.3, i), auch endlich messbar. Ferner haben wir

$$Q = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(Q)} \left|\mathrm{Det}\big(J_\varphi(x)\big)\right| \mathrm{d}\mu_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\varphi^{-1}(A_k)} \left|\mathrm{Det}\big(J_\varphi(x)\big)\right| \mathrm{d}\mu_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{W_k} (\chi_{A_k} \circ \varphi)(x) \cdot \left|\mathrm{Det}\big(J_\varphi(x)\big)\right| \mathrm{d}\mu_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\varphi(W_k)} \chi_{A_k}(y) \mathrm{d}\mu_n(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(A_k) = \mathrm{Vol}_n(Q). \end{aligned}$$

Dabei ist der letzte Schritt Satz 3.A.4, der erste folgt analog (Übungsaufgabe), und der dritte ist eine Anwendung der Voraussetzung. □

*Beweis der speziellen Transformationsformel 4.2.1.* Mittels vollständiger Induktion beweisen wir:

> *Für jeden Punkt $x_0 \in U$ existiert eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von $x_0$, so dass die spezielle Transformationsformel für $\varphi_{|U_0} \colon U_0 \longrightarrow \varphi(U_0)$ gilt.*

Nach Hilfssatz 4.3.3 folgt die spezielle Transformationsformel für $\varphi$.

***n*=1.** Hier können wir $U_0 = U$ nehmen: Es seien $a < b$ reelle Zahlen, so dass $[a,b] \subset V$. Dann ist $\varphi^{-1}([a,b])$ ein abgeschlossenes Intervall ((17), Satz 3.5.3). Seien $c < d$ reelle Zahlen, so dass $\varphi^{-1}([a,b]) = [c,d]$. Aus der Substitutionsregel folgt (vgl. Bemerkung 4.1.2):

$$\mathrm{Vol}_1\big([a,b]\big) = b - a = \int_{[c,d]} \left|\varphi'(x)\right| \mathrm{d}\mu_1(x).$$

***n*-1→*n*.** Nach Hilfssatz 4.3.1 und 4.3.2 dürfen wir $\varphi$ durch $\varphi_\sigma \circ \varphi$ ersetzen, $\sigma$ eine Permutation. Die Permutation $\sigma$ operiert auf $J_\varphi(x_0)$ durch Vertauschung der Zeilen. Da $J_\varphi(x_0)$ invertierbar ist und deshalb keine Nullspalte enthält, können wir

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$$

erreichen, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass wir $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, $(x_1, \ldots, x_n) \in U$, voraussetzen dürfen und so die Induktionsvoraussetzung ins Spiel bringen können. Zu diesem Zweck definieren wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \big(\varphi_1(x), x_2, \ldots, x_n\big). \end{array}$$

Man beachte

$$\mathrm{Det}\big(J_\psi(x_0)\big) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) \neq 0.$$

Nach (18), Satz 10.2.1 und 10.2.3 und Bemerkung 10.2.4, ist $\psi$ auf einer geeigneten Umgebung $U_0$ von $x_0$ umkehrbar, und $\psi_{|U_0}\colon U_0 \longrightarrow W := \psi(U_0)$ ist ein Diffeomorphismus vom Typ $\mathscr{C}^1$. Mit $\rho := \varphi \circ (\psi_{|U_0})^{-1}\colon W \longrightarrow V$ gelangen wir zu dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & V \\ & W \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd} .$$

Man beachte, dass für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_0$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} \psi(x) & = & \big(\varphi_1(x), x_2, \ldots, x_n\big), \\ (\rho \circ \psi)(x_1, \ldots, x_n) & = & \big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big). \end{array}$$

Wir schließen:

$$\forall w = (w_1, \ldots, w_n) \in W: \quad \rho(w_1, \ldots, w_n) = \big(w_1, \rho_2(w_1, \ldots, w_n), \ldots, \rho_n(w_1, \ldots, w_n)\big).$$

Nach Hifssatz 4.3.2 reicht es, die Formel für $\rho$ und $\psi$ getrennt zu beweisen. Ferner dürfen wir sie nach Hilfssatz 4.3.1 statt für $\psi$ auch für $\tau \circ \psi \circ \tau$ beweisen, $\tau\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$. Kurzum, es genügt den Fall eines $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \chi\colon U & \longrightarrow & V \\ (t, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & \big(t, \chi_t(x_2, \ldots, x_n)\big) \end{array}$$

zu untersuchen. Wir weisen auf die Gleichung

$$\forall (t, z) \in U: \quad \Big|\mathrm{Det}\big(J_\chi(t, z)\big)\Big| = \Big|\mathrm{Det}\big(J_{\chi_t}(z)\big)\Big| \tag{4.1}$$

hin.

Es seien $Q \subset V$ ein abgeschlossener Quader und $A := \chi^{-1}(Q)$. Weiter schreiben wir für eine Teilmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$

$$Z_t := \pi_2\Big(Z \cap \big(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}\big)\Big), \quad \pi_2\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1},\ (t, z) \longmapsto z.$$

Mit diesen Begriffen berechnen wir für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q_t = \big(\chi(A)\big)_t &= \Big\{ w \in \mathbb{R}^{n-1} \,\big|\, (t,w) \in \chi(A) \Big\} \\ &= \Big\{ w \in \mathbb{R}^{n-1} \,\big|\, \exists z \in \mathbb{R}^{n-1} : (t,z) \in A \wedge \chi(t,z) = (t,w) \Big\} \\ &= \Big\{ w \in \mathbb{R}^{n-1} \,\big|\, \exists z \in A_t : \ \chi_t(z) = w \Big\} \\ &= \chi_t(A_t). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt die spezielle und allgemeine Transformationsformel für $\chi_t$, so dass

$$\mathrm{Vol}_{n-1}\big(\chi_t(A_t)\big) = \int_{A_t} \Big|\mathrm{Det}\big(J_{\chi_t}(z)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_{n-1}(z), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da $Q$ und $A$ kompakt sind und $|\mathrm{Det}(J_\chi(t,z))|$ stetig, können wir das Prinzip von Cavalieri 3.3.3 bzw. den Satz von Fubini 3.1.1 anwenden:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_n(Q) &= \int \mathrm{Vol}_{n-1}(Q_t) \mathrm{d}\mu_1(t) \\ &= \int \mathrm{Vol}_{n-1}\big(\chi(A_t)\big) \mathrm{d}\mu_1(t) \\ &= \int \left( \int_{A_t} \Big|\mathrm{Det}\big(J_{\chi_t}(z)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_{n-1}(z) \right) \mathrm{d}\mu_1(t) \\ &\overset{(4.1)}{=} \int_A \Big|\mathrm{Det}\big(J_\chi(x)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_n(x) \\ &= \int_{\chi^{-1}(Q)} \Big|\mathrm{Det}\big(J_\chi(x)\big)\Big| \mathrm{d}\mu_n(x). \end{aligned}$$

Die spezielle Transformationsformel gilt somit für $\chi$. □

## 4.4 Beispiele

Wir wenden die Transformationsformel in einigen Beispielen an. Darunter befinden sich Diffeomorphismen, die bereits in der Analysis II vorgestellt wurden.

### Parallelotope

Es sei $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung. Dazu gehört eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix $A$, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad L(x) = x \cdot A.$$

Für jede integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist auch $f \circ L$ integrierbar mit Integral

$$\int f \mathrm{d}\mu_n = \big|\mathrm{Det}(A)\big| \cdot \int f \circ L \mathrm{d}\mu_n.$$

Wenn $V \subset \mathbb{R}^n$ endlich messbar ist, so trifft dies folglich auch auf $L(V)$ zu, und es gilt

$$\mathrm{Vol}_n\big(L(V)\big) = \big|\mathrm{Det}(A)\big| \cdot \mathrm{Vol}_n(V).$$

Für den *Einheitsquader*

$$Q := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, \dots, n \right\}$$

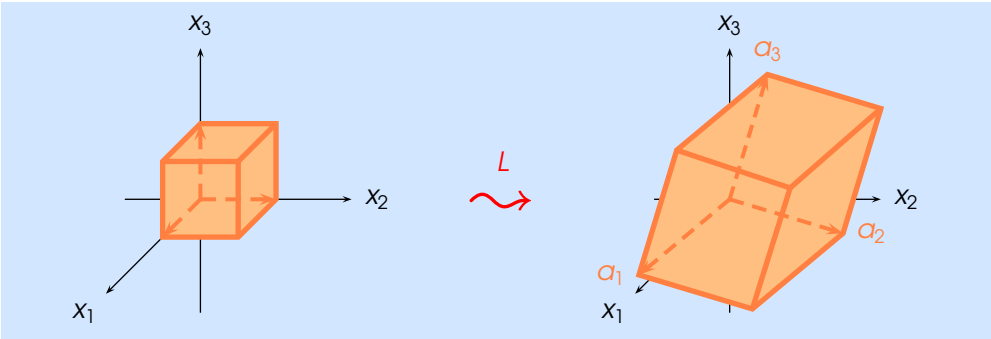
gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = 1.$$

Das Bild $L(Q)$ können wir folgendermaßen beschreiben: Es sei $a_i = L(e_i)$ die $i$-te Zeile von $A$, $i = 1, \dots, n$. Man nennt

$$P(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n \,\middle|\, 0 \le \lambda_i \le 1,\ i = 1, \dots, n \right\}$$

das von $a_1$,...,$a_n$ aufgespannte *Parallelotop*.




Es gilt

- $L(Q) = P(a_1, \dots, a_n)$,
- $\mathrm{Vol}_n\big(P(a_1, \dots, a_n)\big) = \big|\mathrm{Det}(A)\big|$.

Damit können wir $\mathrm{Det}(A)$ als *orientiertes Volumen* ansehen.

## Euklidische Bewegungen

Wenn die Matrix $A$ der orthogonalen Gruppe (s. (18), Beispiel 11.4.5, ii) angehört, dann gilt nach Definition $|\mathrm{Det}(A)| = 1$, und für jede integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ folgt

$$\int f \circ L \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\mu_n.$$

**Definition.** Eine Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *euklidische Bewegung*, wenn es eine Matrix $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und einen Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad F(x) = x_0 + x \cdot A.$$

Da $J_F(x) = A^t$, $x \in \mathbb{R}^n$, impliziert die Transformationsformel:

**Satz.** *Für jede integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist auch die Funktion $f \circ F$ integrierbar, und es gilt die Gleichung*

$$\int f \circ F \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\mu_n$$

*zwischen den Integralen.*

## Polarkoordinaten

Für den Diffeomorphismus (vgl. (18), Beispiel 10.1.12, iii)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{>0}\times(0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \big(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}\big) \\ (r,\varphi) &\longmapsto \big(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)\big) \end{aligned}$$

und $(t,\varphi)\in\mathbb{R}_{>0}\times(0,2\pi)$ gilt

$$\mathrm{Det}\big(J_f(t,\varphi)\big) = r.$$

Seien nun $0<a<b$, $0<\alpha<\beta<2\pi$ und

$$K := \Big\{ (r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \,\Big|\, a\leq r\leq b,\ \alpha\leq\varphi\leq\beta \Big\}.$$

Für jede stetige Funktion $g$ auf $f(K)$ gilt

$$\int_{f(K)} g\mathrm{d}\mu_n = \int_a^b\int_\alpha^\beta g\big(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)\big)\cdot r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r.$$

Damit können wir das uneigentliche Riemann-Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2)\mathrm{d}t$ bestimmen (vgl. (17), Folgerung 5.6.20):

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2)\mathrm{d}t\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\exp(-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\exp(-r^2)\cdot r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= \pi\cdot\underbrace{\int_0^\infty 2r\cdot\exp(-r^2)\mathrm{d}r}_{„=-\exp(-r^2)|_0^\infty“} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

bewiesen.

## Kugelkoordinaten

Hier betrachten wir den Diffeomorphismus (vgl. (18), Beispiel 10.2.5, iii)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{>0}\times(0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{R}^3\setminus\big(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}\times\mathbb{R}\big) \\ (r,\varphi,\vartheta) &\longmapsto \big(r\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\vartheta), r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\vartheta), r\cdot\sin(\vartheta)\big). \end{aligned}$$

Für einen Punkt $(r,\varphi,\vartheta)$ aus dem Definitionsbereich von $f$ gilt

$$\mathrm{Det}\big(J_f(r,\varphi,\vartheta)\big) = r^2\cdot\cos(\vartheta)$$

und für Zahlen $0<a<b$, $0<\alpha<\beta<2\pi$, $-\pi/2<\gamma<\delta<\pi/2$, die kompakte Menge

$$K := \Big\{ (r,\varphi,\vartheta)\in\mathbb{R}^3 \,\Big|\, a\leq r\leq b,\ \alpha\leq\varphi\leq\beta, \gamma\leq\vartheta\leq\delta \Big\}$$

und eine stetige Funktion $g$ auf $f(K)$ findet man

$$\int_{f(K)} g \mathrm{d}\mu_n = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta g\big(r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)\big) r^2 \cos(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r.$$

Wir berechnen abermals das Volumen der Einheitskugel $\overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_n\big(\overline{B}(0,1)\big) &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \cos(\vartheta) \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \int_0^1 \underbrace{\left( \sin(\vartheta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right)}_{=2\cdot\sin(\frac{\pi}{2})=2} \cdot r^2 \mathrm{d}r \\
&= 4\pi \cdot \int_0^1 r^2 \mathrm{d}r = 4\pi \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot r^3 \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{3} \cdot \pi.
\end{aligned}$$

## Ellipsoide

Es seien $a_1,\ldots,a_n$ positive reelle Zahlen und

$$E := \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Offenbar ist $E$ das Bild des Einheitsballs $\overline{B}(0,1)$ unter der Abbildung

$$\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
(x_1,\ldots,x_n) &\longmapsto (a_1 \cdot x_1,\ldots,a_n \cdot x_n)
\end{aligned}$$

und daher

$$\mathrm{Vol}_n(E) = a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot \mathrm{Vol}_n\big(\overline{B}(0,1)\big).$$

# Kapitel 5

# Differentialformen und der Satz von Stokes

## 5.1 Etwas multilineare Algebra

Die in diesem Kapitel zu entwickelnde Theorie der Differentialformen beruht auf der Theorie der alternierenden multilinearen Abbildungen. In diesem Abschnitt führen wir in die letztgenannte Theorie ein.

Wir erinnern kurz an den Formalismus der Permutationen ((4), Abschnitt 4.1): Es sei $p$ eine natürliche Zahl. Eine bijektive Abbildung

$$\sigma\colon \{1,\dots,p\} \longrightarrow \{1,\dots,p\}$$

heißt Permutation. Die Permutationen fasst man zu der (für $p \geq 3$ nichtkommutativen) *symmetrischen Gruppe* $\Sigma_p$ zusammen. Für eine Permutation $\sigma \in \Sigma_p$ bezeichnet

$$v(\sigma) := \#\Big\{ (i,j) \,\Big|\, 1 \leq i < j \leq p : \ \sigma(i) > \sigma(j) \Big\}$$

die *Anzahl der Fehlstände*. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varepsilon\colon \Sigma_p &\longrightarrow \{\pm 1\} \\ \sigma &\longmapsto \varepsilon(\sigma) := (-1)^{v(\sigma)} \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

**5.1.1 Definition.** Es seien $p \in \mathbb{N}$ und $V$ ein reeller Vektorraum. Für $p = 0$ sei $V^{\times p} := \mathbb{R}$.

a) Eine Abbildung $\omega\colon V^{\times p} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine *multilineare Abbildung*, wenn sie in jeder Variablen linear ist:

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1,\dots,p\} \forall v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_p,u,w \in V \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}: \\ &\quad \omega(v_1,\dots,v_{i-1},\lambda\cdot u + \mu\cdot w, v_{i+1},\dots,v_p) \\ &\quad = \lambda\cdot\omega(v_1,\dots,v_{i-1},u,v_{i+1},\dots,v_p) + \mu\cdot\omega(v_1,\dots,v_{i-1},w,v_{i+1},\dots,v_p). \end{aligned}$$

Man setzt

$$(V^\star)^{\otimes p} := \Big\{ \omega\colon V^{\times p} \longrightarrow \mathbb{R} \,\Big|\, \omega \text{ ist multilinear} \Big\}.$$

b) Es sei $p \in \mathbb{N}$. Eine multilineare Abbildung

$$\omega\colon V^{\times p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist eine *alternierende p-Form*, wenn gilt:

$$\forall \sigma \in \Sigma_p \forall v_1, \dots, v_p \in V: \quad \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \omega(v_1, \dots, v_p).$$

Eine alternierende 0-Form $\omega$ identifizieren wir mit der reellen Zahl $\omega(1)$.

c) Für $p \in \mathbb{N}$ definieren wir den Vektorraum

$$\bigwedge^p V^\star := \left\{ \omega \colon V^{\times p} \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, \omega \text{ ist eine alternierende } p\text{-Form} \right\}.$$

*5.1.2 Bemerkung (vgl. Aufgabe A.7.1).* Eine Multilinearform $\omega \colon V^{\times p} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann alternierend, wenn sie folgende Eigenschaft hat:

$$\forall v_1, \dots, v_p: \quad \exists 1 \leq i < j \leq p: \; v_i = v_j \quad \Rightarrow \quad \omega(v_1, \dots, v_p) = 0,$$

d.h. sobald zwei Einträge im Argument übereinstimmen, verschwindet die Form.

*5.1.3 Beispiele.* i) Es gilt $\bigwedge^0 V^\star = \mathbb{R}$, $\bigwedge^1 V^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-VR}}(V, \mathbb{R})$.

ii) Für eine Multilinearform $\omega \colon V^{\times p} \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}(\omega) \colon V^{\times p} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_p) &\longmapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \varepsilon(\sigma) \cdot \omega\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}\big). \end{aligned}$$

Man sieht ohne große Mühe ein, dass $\mathrm{Alt}(\omega)$ eine alternierende $p$-Form ist.

iii) Für $V = \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)^{\times n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n),\; v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}),\; i = 1, \dots, n &\longmapsto \mathrm{Det} \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine alternierende $n$-Form.

iv) Allgemeiner definieren wir für $V = \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq n$ und $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^{\times p}$ mit

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{p-1} < i_p \leq n$$

die alternierende $p$-Form

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_I \colon (\mathbb{R}^n)^{\times p} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_p),\; v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in}),\; i = 1, \dots, n &\longmapsto \mathrm{Det} \begin{pmatrix} v_{1i_1} & \cdots & v_{1i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{pi_1} & \cdots & v_{pi_p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*5.1.4 Bemerkung.* Für natürliche Zahlen $1 \leq p \leq n$ sei

$$\mathcal{I}_{p,n} := \left\{ I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^{\times p} \,\middle|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \right\}.$$

Es gilt

$$\#\mathcal{I}_{p,n} = \binom{n}{p}.$$

In der Tat stellt man über die Zuordnung

$$I = (i_1, \dots, i_p) \longmapsto \{ i_1, \dots, i_p \}$$

eine Bijektion zwischen $\mathcal{I}_{p,n}$ und der Menge der Teilmengen von $\{ 1, \dots, n \}$ mit genau $p$ Elementen her. Die Anzahl der Elemente in der letztgenannten Menge lässt sich leicht bestimmen, und man erhält die angegebene Formel.

**5.1.5 Satz.** *Es seien $1 \leq p \leq n$ natürliche Zahlen. Die alternierenden $p$-Formen*

$$\mathrm{d}x_I \colon (\mathbb{R}^n)^{\times p} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I \in \mathcal{I}_{p,n},$$

*bilden eine Basis des Vektorraums $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)^\star$. Insbesondere gilt*

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)^\star\right) = \binom{n}{p}.$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Vektorraum

$$\mathrm{Mult}(n,p) := \left(\mathbb{R}^{n\star}\right)^{\otimes p}$$

aus Definition 5.1.1, a). Für $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^{\times p}$ definieren wir

$$e_I := (e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \in (\mathbb{R}^n)^{\times p}$$

und

$$\begin{aligned} \omega_I \colon (\mathbb{R}^n)^{\times p} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((a_1^1, \ldots, a_n^1), \ldots, (a_1^p, \ldots, a_n^p)) &\longrightarrow a_{i_1}^1 \cdot \cdots \cdot a_{i_p}^p. \end{aligned}$$

Dies ist eine multilineare Abbildung, und es is leicht zu sehen, dass die Familie $(\omega_I)_{I \in \{1,\ldots,n\}^{\times p}}$ eine Basis für $\mathrm{Mult}(n,p)$ bildet, so dass sich insbesondere

$$\dim\big(\mathrm{Mult}(n,p)\big) = n^p$$

ergibt. Insbesondere erkennen wir, dass $\omega, \omega' \in \mathrm{Mult}(n,p)$ genau dann gleich sind, wenn

$$\forall I \in \{1, \ldots, n\}^{\times p} : \quad \omega(e_I) = \omega'(e_I). \tag{5.1}$$

Es seien $I, J = (j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{I}_{p,n}$. Man berechnet

$$\mathrm{d}x_I(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1, & \text{falls } I = J \\ 0, & \text{falls } I \neq J \end{cases}. \tag{5.2}$$

Es folgt, dass

$$\big(\mathrm{d}x_I,\ I \in \mathcal{I}_{p,n}\big)$$

eine linear unabhängige Familie von Vektoren in $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)^\star$ ist.

Um nachzuweisen, dass es sich auch um ein Erzeugendensystem handelt, betrachten wir eine Form $\omega \in \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)^\star$. Für $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{p,n}$ sei

$$a_I := \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}).$$

Damit definieren wir die alternierende $p$-Form

$$\omega' := \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} a_I \cdot \mathrm{d}x_I.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\omega = \omega'.$$

Für $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^{\times p}$ gibt es entweder Indizes $1 \leq \mu < \nu \leq n$ mit $i_\mu = i_\nu$, so dass

$$\omega(e_I) = 0 = \omega'(e_I)$$

nach Bemerkung 5.1.2, oder es gibt genau eine Permutation $\sigma \in \Sigma_p$, so dass

$$I_\sigma := (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(p)}) \in \mathcal{I}_{p,n}.$$

Aus
$$\omega(e_{I_\sigma}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \omega(e_I)$$
und
$$\omega'(e_{I_\sigma}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \omega'(e_I)$$
folgt
$$\forall I \in \{1, \dots, n\}^{\times p}: \quad \omega(e_I) = \omega'(e_I).$$
Wie zuvor erläutert (s. (5.1)), ergibt sich daraus die gewünschte Gleichheit $\omega = \omega'$. □

## Das äußere Produkt

Für $p, q \in \mathbb{N}$ sei
$$\Sigma_{p,q} := \Big\{ \sigma \in \Sigma_{p+q} \,\big|\, \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ und } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q) \Big\}.$$

*5.1.6 Bemerkung.* Es sei $\sigma \in \Sigma_{p+q}$. Dann finden wir genau eine Permutation $\tau_\sigma \in \Sigma_{p+q}$ mit
$$\{ \tau_\sigma(1), \dots, \tau_\sigma(p) \} = \{ \sigma(1), \dots, \sigma(p) \}$$
und folglich auch
$$\{ \tau_\sigma(p+1), \dots, \tau_\sigma(p+q) \} = \{ \sigma(p+1), \dots, \sigma(p+q) \},$$
so dass
$$\tau_\sigma(1) < \dots < \tau_\sigma(p) \quad \text{und} \quad \tau_\sigma(p+1) < \dots < \tau_\sigma(p+q).$$
Umgekehrt gibt es zu einer gegebenen Permutation $\tau \in \Sigma_{p,q}$ genau $p! \cdot q!$ Permutationen $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ mit
$$\tau_\sigma = \tau.$$

**5.1.7 Definition.** Es seien $V$ ein reeller Vektorraum, $p, q \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \bigwedge^p V^\star$ und $\beta \in \bigwedge^q V^\star$. Die Multilinearform
$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta \colon V^{\times(p+q)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{p+q}) &\longmapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \cdot \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$
heißt das *äußere Produkt* oder *Dachprodukt* von $\alpha$ und $\beta$.

*5.1.8 Bemerkung.* Falls $\alpha \in \bigwedge^0 V^\star = \mathbb{R}$ und $\beta \in \bigwedge^q V^\star$, dann gilt
$$\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta,$$
d.h. das äußere Produkt stimmt mit der Multiplikation von $\beta$ mit dem Skalar $\alpha$ überein.

**5.1.9 Lemma.** *In der Situation von Definition 5.1.7 ist $\alpha \wedge \beta$ eine alternierende $(p+q)$-Form.*

*Beweis.* Bei
$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta \colon V^{\times(p+q)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{p+q}) &\longmapsto \alpha(v_1, \dots, v_p) \cdot \beta(v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \end{aligned}$$

handelt es sich um eine Multilinearform. Dazu gehört die in Beispiel 5.1.3, ii), angegebene alternierende $(p+q)$-Form $\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)$. Mit der Diskussion aus Bemerkung 5.1.6 und der Tatsache, dass $\alpha$ und $\beta$ alternierend sind, überprüft man leicht:

$$\begin{aligned}\forall \sigma \in \Sigma_{p+q} \forall v_1, \ldots, v_{p+q}: \quad & \varepsilon(\sigma) \cdot \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \beta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) = \\ & = \varepsilon(\tau_\sigma) \cdot \alpha(v_{\tau_\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau_\sigma(p)}) \cdot \beta(v_{\tau_\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\tau_\sigma(p+q)}).\end{aligned}$$

Daraus leitet man

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p! \cdot q!} \cdot \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)$$

ab. Diese Gleichung zeigt, dass $\alpha \wedge \beta$ alternierend ist. □

*5.1.10 Beispiel.* Es sei $V$ ein reeller Vektorraum.

i) Für $\alpha, \beta \in \bigwedge^1 V^\star$ und $u, v \in V$ berechnet man

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = \alpha(u) \cdot \beta(v) - \alpha(v) \cdot \beta(u).$$

ii) Es seien $\alpha \in \bigwedge^1 V^\star$, $\beta \in \bigwedge^2 V^\star$ und $u$, $v$ und $w \in V$. In $\Sigma_{1,2}$ findet man folgende Permutationen:

| Permutation | $\varepsilon$ |
|---|---|
| $\sigma_1 = (1,2,3)$ | 1 |
| $\sigma_2 = (2,1,3)$ | $-1$ |
| $\sigma_3 = (3,1,2)$ | 1 |

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta)(u, v, w) &= \alpha(u) \cdot \beta(v, w) - \alpha(v) \cdot \beta(u, w) + \alpha(w) \cdot \beta(u, v) \\ &= \alpha(u) \cdot \beta(v, w) + \alpha(v) \cdot \beta(w, u) + \alpha(w) \cdot \beta(u, v).\end{aligned}$$

**5.1.11 Satz.** *Es seien $p$, $q$, $s$ und $n$ natürliche Zahlen und $V$ ein reeller Vektorraum.*

i) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\wedge: \bigwedge^p V^\star \times \bigwedge^q V^\star &\longrightarrow \bigwedge^{p+q} V^\star \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta\end{aligned}$$

*ist bilinear.*

ii) *Das äußere Produkt ist assoziativ, d.h. für $\alpha \in \bigwedge^p V^\star$, $\beta \in \bigwedge^q V^\star$ und $\gamma \in \bigwedge^s V^\star$ gilt die Identität*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

iii) *Für $I \in (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{p,n}$ hat man*

$$\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}.$$

iv) *Für $\alpha \in \bigwedge^p V^\star$ und $\beta \in \bigwedge^q V^\star$ gilt*

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{p \cdot q} \cdot \alpha \wedge \beta.$$

*Beweis.* Teil i) ist sofort klar. Für Teil ii) beobachten wir zuerst, dass für Multilinearformen

$$\begin{aligned}\lambda: V^{\times s} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mu: V^{\times t} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \nu: V^{\times u} &\longrightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

offenbar

$$(\lambda \otimes \mu) \otimes \nu = \lambda \otimes (\mu \otimes \nu)$$

gilt. Weiter überprüft man

$$\mathrm{Alt}(\lambda \otimes \mu) = \frac{1}{s! \cdot t!} \cdot \mathrm{Alt}\big(\mathrm{Alt}(\lambda) \otimes \mathrm{Alt}(\mu)\big) = \mathrm{Alt}(\lambda) \wedge \mathrm{Alt}(\mu).$$

Mit diesen Informationen berechnen wir:

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \frac{1}{p! \cdot q!} \cdot \big(\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) \wedge \gamma\big) \\
&= \frac{1}{p! \cdot q! \cdot (p+q)! \cdot s!} \cdot \mathrm{Alt}\big(\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\big) \\
&= \frac{1}{p! \cdot q! \cdot s!} \cdot \frac{1}{(p+q)! \cdot s!} \cdot \mathrm{Alt}\big(\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) \otimes \mathrm{Alt}(\gamma)\big) \\
&= \frac{1}{p! \cdot q! \cdot s!} \cdot \mathrm{Alt}\big((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\big) \\
&= \frac{1}{p! \cdot q! \cdot s!} \cdot \mathrm{Alt}\big(\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)\big) \\
&= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).
\end{aligned}$$

iii) Diese Aussage beweisen wir durch Induktion über $p$. Für $p = 1$ ist nichts zu zeigen. Für den Schluss von $p-1$ auf $p$ fixieren wir $I = (i_1, \ldots, i_p)$ und $J = (j_1, \ldots, j_p)$ aus der Indexmenge $\mathcal{I}_{p,n}$. Mit der Formel für das äußere Produkt berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{d}x_{(i_1,\ldots,i_{p-1})} \wedge \mathrm{d}x_{i_p}\big)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) \\
= &\sum_{i=1}^{p} (-1)^{p-i} \cdot \mathrm{d}x_{(i_1,\ldots,i_{p-1})}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_{i-1}}, e_{j_{i+1}}, \ldots, e_{j_p}) \cdot \mathrm{d}x_{i_p}(e_{j_i}) \\
= &\ \delta_{IJ}.
\end{aligned}$$

Mit dieser Beobachtung, der Induktionsvoraussetzung und der Assoziativität des äußeren Produkts erkennen wir

$$\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{(i_1,\ldots,i_{p-1})} \wedge \mathrm{d}x_{i_p} = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{p-1}} \wedge \mathrm{d}x_{i_p}.$$

Damit sind wir am Ziel.

iv) Wir zeigen durch Induktion über $q$, dass man das Tupel durch

$$(1, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q)$$

durch $p \cdot q$ Transpositionen in das Tupel

$$(p+1, \ldots, p+q, 1, \ldots, p)$$

überführen kann.

Für $q = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $q \geq 1$ kann man das Tupel $(1, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q)$ durch $p$ Transpositionen in das Tupel

$$(p+1, 1, \ldots, p, p+2, \ldots, p+q)$$

umformen. Die Induktionsvoraussetzung impliziert, dass wir nach $p \cdot (q-1)$ weiteren Transpositionen bei $(p+1, \ldots, p+q, 1, \ldots, p)$ ankommen. Insgesamt haben wir $p + p \cdot (q-1) = p \cdot q$ Transpositionen benutzt.

Für $p = 1$ und $q = 1$ folgt die Formel sofort aus der Definition (s. Beispiel 5.1.10, i). Wegen iii) und obiger Rechnung gilt für $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{p,n}$ und $J = (j_1, \ldots, j_q) \in \mathcal{I}_{q,n}$

$$\begin{aligned} dx_I \wedge dx_J &= (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}) \\ &= (-1)^{p \cdot q} \cdot \big((dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}) \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})\big) \\ &= (-1)^{p \cdot q} \cdot dx_J \wedge dx_I. \end{aligned}$$

Aus der Bilinearität des äußeren Produkts folgern wir, dass die behauptete Formel für alle $\alpha \in \bigwedge^p (\mathbb{R}^n)^\star$ und $\beta \in \bigwedge^q (\mathbb{R}^n)^\star$ korrekt ist. □

*5.1.12 Bemerkung.* Wir definieren

$$A := \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge^p (\mathbb{R}^n)^\star$$

und durch bilineare Forsetzung das Produkt

$$\wedge \colon A \times A \longrightarrow A.$$

Der Vektorraum $A$ zusammen mit $\wedge$ ist dann eine sogenannte *graduiert kommutative*[1] $\mathbb{R}$*-Algebra*.

## Rücktransport

**5.1.13 Definition.** Es seien $p \in \mathbb{N}$, $V$, $W$ reelle Vektorräume, $L \colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und $\omega \in \bigwedge^p W^\star$. Der *Rücktransport von $\omega$ über $L$* ist die alternierende $p$-Form

$$\begin{aligned} L^\star(\omega) \colon V^{\times p} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_p) &\longmapsto \omega\big(L(v_1), \ldots, L(v_p)\big) \end{aligned}$$

auf $V$.

**5.1.14 Satz.** *Es seien $p$, $m$ und $n \in \mathbb{N}$, $U$, $V$ und $W$ reelle Vektorräume und $K \colon U \longrightarrow V$ und $L \colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen.*

i) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} L^\star \colon \bigwedge^p W &\longrightarrow \bigwedge^p V \\ \omega &\longmapsto L^\star(\omega) \end{aligned}$$

*ist linear.*

ii) *Für jede alternierende $p$-Form $\omega \in \bigwedge^p W^\star$ gilt*

$$(L \circ K)^\star(\omega) = K^\star\big(L^\star(\omega)\big).$$

iii) *Für $\alpha \in \bigwedge^p W^\star$ und $\beta \in \bigwedge^q W^\star$ hat man die Formel*

$$L^\star(\alpha \wedge \beta) = L^\star(\alpha) \wedge L^\star(\beta).$$

iv) *Es seien $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^n$,*

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

[1] Sie ist nicht kommutativ im üblichen Sinne. Es gilt ein „Kommutativgesetz mit Vorzeichen": Für ein Element $\alpha$ vom „Grad" $p$ und ein Element $\beta$ vom Grad $q$ hat man $\beta \wedge \alpha = (-1)^{p \cdot q} \alpha \wedge \beta$.

*eine* $(m \times n)$*-Matrix und*

$$\begin{array}{rcl} L\colon \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ v & \longmapsto & v \cdot A. \end{array}$$

*Für* $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{p,m}$ *und* $J = (j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{I}_{p,n}$ *sei*

$$A_{IJ} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p j_1} & \cdots & a_{i_p j_p} \end{pmatrix}.$$

*Damit gilt*

$$L^\star(\mathrm{d}y_J) = \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,m}} \mathrm{Det}(A_{IJ}) \cdot \mathrm{d}x_I.$$

*Beweis.* Die Teile i) bis iii) verifiziert man ohne große Mühe mit den Definitionen. In iv) gilt für $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{p,m}$ und $J = (j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{I}_{p,n}$

$$\begin{aligned} L^\star(\mathrm{d}y_J)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) &= \mathrm{d}y_J\big(L(e_{i_1}), \ldots, L(e_{i_p})\big) \\ &= \mathrm{d}y_J\big((a_{i_1 1}, \ldots, a_{i_1 n}), \ldots, (a_{i_p 1}, \ldots, a_{i_p n})\big) \\ &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p j_1} & \cdots & a_{i_p j_p} \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Det}(A_{IJ}) \end{aligned}$$

nach Definition von $\mathrm{d}y_J$ in Beispiel 5.1.3, iv). □

## 5.2 Differentialformen

Eine Differentialform vom Grad $p$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Familie von alternierenden $p$-Formen $\omega(x)$, $x \in U$, die (hinreichend oft) differenzierbar von $x$ abhängen. Den Kalkül für Differentialformen erhält man, indem man die multilineare Algebra aus dem vorigen Abschnitt mit den Differentiationsregeln aus der Analysis II (z.B. (18)) kombiniert. Für $n = 3$ gewinnt man den in der Physik gebräuchlichen Formalismus von Gradient, Rotation und Divergenz.

**5.2.1 Definition.** a) Es seien $p \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine *glatte Differentialform vom Grad p* (kurz: eine *glatte p-Form*) auf $U$ ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung

$$\omega\colon U \longrightarrow \bigwedge^p (\mathbb{R}^n)^\star,$$

d.h. für jedes Indextupel $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{p,n}$ soll die Funktion

$$\begin{array}{rcl} a_I\colon U \xrightarrow{\omega} \bigwedge^p (\mathbb{R}^n)^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \zeta & \longmapsto & \zeta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \end{array}$$

unendlich oft differenzierbar sein.
**Schreibweise:** $\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} a_I \mathrm{d}x_I$.

b) Mit $\Omega^p(U)$ bezeichnen wir den Vektorraum der glatten $p$-Formen auf $U$.

*5.2.2 Bemerkung.* Allgemeiner können wir für $k \geq 1$ auch $k$-mal stetig differenzierbare Abbildungen

$$\omega\colon U \longrightarrow \bigwedge^{p} (\mathbb{R}^n)^\star$$

zulassen. Wir sprechen dann von einer *$k$-mal stetig differenzierbaren $p$-Form*.

## Das äußere Produkt

**5.2.3 Definition (vgl. Definition 5.1.7).** Es seien $p, q \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $\alpha \in \Omega^p(U)$ und $\beta \in \Omega^q(U)$. Das *äußere Produkt* oder *Dachprodukt* von $\alpha$ und $\beta$ ist die glatte $(p+q)$-Form

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta\colon U &\longrightarrow \bigwedge^{p+q} (\mathbb{R}^n)^\star \\ x &\longmapsto \alpha(x) \wedge \beta(x). \end{aligned}$$

Gilt $p = 0$, d.h. ist $\alpha\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, dann schreiben wir auch (vgl. Bemerkung 5.1.8)

$$\alpha\beta := \alpha \cdot \beta := \alpha \wedge \beta.$$

## Rücktransport

**5.2.4 Definition (vgl. Definition 5.1.13).** Es seien $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $f\colon U \longrightarrow V$ eine unendlich oft differenzierbare Abbildung und $\omega \in \Omega^p(V)$. Der *Rücktransport von $\omega$ über $f$* ist die glatte $p$-Form

$$\begin{aligned} f^\star(\omega) : U &\longrightarrow \bigwedge^{p} (\mathbb{R}^m)^\star \\ x &\longmapsto Df(x)^\star\Big(\omega\big(f(x)\big)\Big) \end{aligned}$$

auf $U$.

**5.2.5 Satz.** *Es seien $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^l$, $V \subset \mathbb{R}^m$ und $W \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen sowie $f\colon U \longrightarrow V$ und $g\colon V \longrightarrow W$ unendlich oft differenzierbare Abbildungen.*

i) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} f^\star\colon \Omega^p(V) &\longrightarrow \Omega^p(U) \\ \omega &\longmapsto f^\star(\omega) \end{aligned}$$

*ist $\mathbb{R}$-linear.*

ii) *Für $\omega \in \Omega^p(W)$ gilt*

$$(f \circ g)^\star(\omega) = g^\star\big(f^\star(\omega)\big).$$

iii) *Für $\alpha, \beta \in \Omega^p(V)$ gilt*

$$f^\star(\alpha \wedge \beta) = f^\star(\alpha) \wedge g^\star(\beta).$$

iv) *Es seien $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}_{p,l}$ und $J = (j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{I}_{p,m}$. Für $y \in V$ sei*

$$\frac{\partial f_J}{\partial x_I}(y) = \left(\frac{\partial f_{j_\nu}}{\partial x_{i_\mu}}(x)\right)_{\mu,\nu=1,\ldots,p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_1}}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_p}}(x) & \cdots & \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_p}}(x) \end{pmatrix}.$$

*Dann gilt*

$$\big(f^\star(\mathrm{d}x_J)\big)(x) = \sum_{I\in\mathcal{I}_{p,m}} \mathrm{Det}\left(\frac{\partial f_J}{\partial x_I}(x)\right)\cdot \mathrm{d}x_I.$$

*Beweis.* Teil i) und iii) folgen sofort aus Definition 5.2.4 und Satz 5.1.14. Für Teil ii) benötigt man zusätzlich noch die Kettenregel ((18), Satz 6.3.1). Bei iv) beachte man schließlich, dass

$$\forall x \in U \forall v \in \mathbb{R}^l: \quad Df(x)(v) = v\cdot J_f(x)^t$$

gilt, und wende Satz 5.1.14, iv), an. □

*5.2.6 Beispiel.* Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}_{>0}\times(0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\setminus\big(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}\big) \\ (r,\vartheta) & \longmapsto & \big(r\cdot\cos(\vartheta), r\cdot\sin(\vartheta)\big). \end{array}$$

Die Jacobi-Matrix in einem Punkt $(r,\vartheta)\in\mathbb{R}_{>0}\times(0,2\pi)$ ist

$$J_r(r,\vartheta) := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -r\cdot\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & r\cdot\cos(\vartheta)\end{pmatrix}.$$

Man berechnet:

$$\begin{array}{rcl} f^\star(\mathrm{d}x) & = & \cos(\vartheta)\mathrm{d}r - r\cdot\sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta, \\ f^\star(\mathrm{d}y) & = & \sin(\vartheta)\mathrm{d}r + r\cdot\cos(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta, \\ f^\star(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) & = & r\cdot\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\vartheta. \end{array}$$

## Die äußere Ableitung

**5.2.7 Definition.** Es seien $p\in\mathbb{N}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\omega\in\Omega^p(U)$. Die *äußere Ableitung von* $\omega$ ist die glatte $(p+1)$-Form[2]

$$\mathrm{d}\omega\colon U\longrightarrow \bigwedge^{p+1}(\mathbb{R}^n)^\star$$

mit

$$\mathrm{d}\omega(x)(v_1,\ldots,v_{p+1}) = \sum_{j=1}^{p+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+1}\cdot v_{ji}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\omega(x)(v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_{p+1})$$

für $x\in U$ und $v_j=(v_{j1},\ldots,v_{jn})\in\mathbb{R}^n$, $j=1,\ldots,p+1$.

*5.2.8 Beispiel.* Es sei $f\in\Omega^0(U)$, d.h. $f\colon U\longrightarrow\mathbb{R}$ ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Nach Definition 5.2.7 gilt für $x\in U$ und $v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{d}f(x)(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = v\cdot\mathrm{Grad}(f)(x)^t. \tag{5.3}$$

Somit gilt

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x_i, \quad x\in U.$$

[2]Die Tatsache, dass $\mathrm{d}\omega(x)$, $x\in U$, alternierend ist, wird sich in Beispiel 5.2.8 und Satz 5.2.9, i), zeigen.

**5.2.9 Satz.** i) *Für $p \in \mathbb{N}$, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} a_I \mathrm{d}x_I \in \Omega^p(U)$ gilt:*

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x_I.$$

ii) *(Leibniz-Regel) Für $p, q \in \mathbb{N}$, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Omega^p(U)$ und $\beta \in \Omega^q(U)$ hat man*

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \cdot \alpha \wedge \mathrm{d}\beta.$$

iii) *Für $p \in \mathbb{N}$, eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\omega \in \Omega^p(U)$ gilt*

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

iv) *Es seien $p, q \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $f\colon U \longrightarrow V$ eine unendlich oft differenzierbare Abbildung. Dann ist für $\omega \in \Omega^p(V)$ die Gleichung*

$$\mathrm{d}\big(f^\star(\omega)\big) = f^\star(\mathrm{d}\omega)$$

*erfüllt.*

*Beweis.* i) Für $x \in U$ und $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in}) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, p+1$, berechnet man ausgehend von der Definition:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}\omega(x)(v_1, \ldots, v_{p+1}) \\
= \quad & \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot v_{ji} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \omega(x)(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{p+1}) \\
= \quad & \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} (-1)^{j+1} \cdot v_{ji} \cdot \frac{\partial a_I}{\partial x_i}(x) \mathrm{d}x_I(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{p+1}) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} \frac{\partial a_I}{\partial x_i}(x) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \cdot v_{ji} \cdot \mathrm{d}x_I(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{p+1})}_{=(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_I)(v_1, \ldots, v_{p+1})} \\
= \quad & \left( \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_I}{\partial x_i}(x) \mathrm{d}x_i \right) \wedge \mathrm{d}x_I \right)(v_1, \ldots, v_{p+1}) \\
\overset{(5.2.8)}{=} \quad & \left( \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} \mathrm{d}a_I(x) \wedge \mathrm{d}x_I \right)(v_1, \ldots, v_{p+1}).
\end{aligned}$$

ii) Hier bemerken wir zunächst, dass $\mathrm{d}_p\colon \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p+1}$, $\omega \longmapsto \mathrm{d}\omega$, eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist. Weiter ist das äußere Produkt „$\wedge$" nach Satz 5.1.11, i), bilinear. Deshalb dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\alpha = a\mathrm{d}x_I$ und $\beta = b\mathrm{d}x_J$ für geeignete unendlich oft differenzierbare Funktionen $a, b\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ und Indextupel $I \in \mathcal{I}_{p,n}$ und $J \in \mathcal{I}_{q,n}$. Es gilt dann

$\alpha \wedge \beta = a \cdot b dx_I \wedge dx_J$. Mit i) ergibt sich

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= d(a \cdot b dx_I \wedge dx_J) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(a \cdot b)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_i} \cdot b dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{i=1}^{n} a \cdot \frac{\partial b}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \right) \wedge b dx_J + (-1)^p \cdot a dx_I \wedge \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J \right) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \cdot \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der zweiten Umformung die Produktregel für partielle Ableitungen benutzt ((18), 5.1.5, ii) und bei der dritten die Bilinearität des äußeren Produkts (Satz 5.1.11, i).

iii) Wir beweisen zunächst zwei Spezialfälle:

a) Für $I \in \mathcal{I}_{p,n}$ und $\omega = dx_I$ gilt offenbar

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \omega(x)(v_1, \ldots, v_p) = 0, \quad v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n, \ i = 1, \ldots, n,$$

und damit

$$d\omega = 0.$$

b) Es sei $f \in \Omega^0(U)$, d.h. $f\colon U \longrightarrow V$ ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung. Wir haben

$$\begin{aligned}
d(df) &= d\left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \\
\text{(Satz 5.2.9, i), und a)} \quad &= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_j \right) \wedge dx_i \\
(dx_i \wedge dx_i = 0, \ i = 1, \ldots, n) \quad &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_{2,n}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_j \wedge dx_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j \right) \\
&= \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_{2,n}} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt aus dem Satz von Schwarz ((18), Satz 5.3.4).

Für eine beliebige glatte $p$-Form $\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} a_I dx_I$ auf $U$ gilt nach i), ii), a) und b), dass

$$d(d\omega) = d\left( \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} da_I \wedge dx_I \right) = \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} d(da_I) \wedge dx_I = 0.$$

iv) Auch hier beginnen wir wieder mit einigen Spezialfällen:

a) Für $g \in \Omega^0(V)$, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^m$ finden wir

$$\begin{aligned}
f^\star(\mathrm{d}g)(x)(v) &= \mathrm{d}g\big(f(x)\big)(v \cdot J_f(x)^t) \\
(5.3) &= v \cdot J_f(x)^t \cdot \mathrm{Grad}(g)\big(f(x)\big)^t \\
\text{(Eigenschaften der Transposition)} &= v \cdot \big(\mathrm{Grad}(g)\big(f(x)\big) \cdot J_f(x)\big)^t \\
\text{(Kettenregel (18), Satz 6.3.1)} &= v \cdot \mathrm{Grad}(g \circ f)(x)^t \\
(5.3) &= \mathrm{d}(g \circ f)(x)(v) \\
&= \mathrm{d}\big(f^\star(g)\big)(x)(v).
\end{aligned}$$

b) Es seien $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$, $(y_1, \ldots, y_n) \longmapsto y_i$. Wir schreiben weiter $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Aus a) folgt

$$f^\star(\mathrm{d}y_i) = f^\star(\mathrm{d}g) = \mathrm{d}(g \circ f) = \mathrm{d}f_i.$$

c) Für $J = (j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{I}_p$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(f^\star(\mathrm{d}y_J)\big) &\overset{\text{Satz 5.1.11, iii)}}{=} \mathrm{d}\big(f^\star(\mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_p})\big) \\
\text{(Satz 5.2.5, iii), und b)} &= \mathrm{d}(\mathrm{d}f_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{j_p}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich dabei aus der Leibniz-Regel und Teil iii).

Für eine beliebige glatte $p$-Form $\omega = \sum_{J \in \mathcal{I}_{p,n}} b_J \mathrm{d}y_J$ auf $V$ können wir nun folgendermaßen vorgehen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(f^\star(\omega)\big) &= \mathrm{d}\left(\sum_{J \in \mathcal{I}_{p,n}} f^\star(b_J) f^\star(\mathrm{d}y_J)\right) \\
\text{(Leibniz-Regel und c)} &= \sum_{J \in \mathcal{I}_{p,n}} \mathrm{d}\big(f^\star(b_J)\big) \wedge f^\star(\mathrm{d}y_J) \\
\text{a)} &= \sum_{J \in \mathcal{I}_{p,n}} f^\star\big(\mathrm{d}(b_J)\big) \wedge f^\star(\mathrm{d}y_J) \\
\text{(Satz 5.2.5, iii)} &= f^\star\left(\sum_{J \in \mathcal{I}_{p,n}} \mathrm{d}b_J \wedge \mathrm{d}y_J\right) \\
\text{(Teil i)} &= f^\star(\mathrm{d}\omega).
\end{aligned}$$

Damit ist die gewünschte Identität nachgewiesen. □

**5.2.10 Definition.** Es seien $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\omega \in \Omega^p(U)$.
a) Die glatte $p$-Form $\omega$ ist *geschlossen*, wenn $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt.
b) Falls $p \geq 1$ und eine glatte $(p-1)$-Form $\varphi$ auf $U$ mit $\mathrm{d}\varphi = \omega$ existiert, dann nennen wir $\omega$ *exakt*.

*5.2.11 Bemerkung.* Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.
i) Wegen Satz 5.2.9, i), ist jede exakte Form geschlossen. Jede glatte $n$-Form auf $U$ ist geschlossen.
ii) Die Frage, ob für $n = 1$ eine Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt (vgl. (17), Bemerkung 5.3.4), wird zu der Frage verallgemeinert, ob für $1 \leq p \leq n$ jede geschlossene $p$-Form auf $U$ exakt ist. Diese Frage kann z.B. für sternförmige Gebiete bejaht werden (Lemma von Poincaré,[3] s. Aufgabe

[3] Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), französischer Mathematiker, theoretischer Physiker und Philosoph.

A.7.5, c). Für andere Gebiete ist sie aber falsch (Beispiel 5.7.4, ii). Die Antwort auf die obige Frage hängt also mit der „Geometrie" des Gebiets zusammen.

iii) Für $0 \leq p \leq n$ sei $\mathrm{d}_p \colon \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p+1}(U)$ die lineare Abbildung $\omega \longmapsto \mathrm{d}\omega$. Mit der offensichtlichen Definition für $d_{-1}$ erhalten wir die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{d}_{-1}} \Omega^0(U) \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \Omega^1(U) \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_{n-1}} \Omega^n(U) \xrightarrow{\mathrm{d}_n} 0.$$

Dabei gilt

$$\mathrm{d}_p \circ \mathrm{d}_{p-1} = 0, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Die obige Sequenz heißt der *de Rham*[4]*-Komplex von U*.

Falls jede geschlossene glatte Form auf $U$ exakt ist, gilt

$$\mathrm{Im}(\mathrm{d}_{p-1}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_p), \quad p = 1, \ldots, n.$$

In diesem Fall sagt man, dass der de Rham-Komplex von $U$ *exakt* ist.

## Differentialformen in Dimension 3

Wir besprechen noch den Zusammenhang mit der vor allem in der Physik gebräuchlichen Notation für Vektorfelder auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^3$. Nach Beispiel 5.1.3 und Satz 5.1.5 gilt:

- $\bigwedge^0(\mathbb{R}^3)^\star = \mathbb{R}$.
- $\bigwedge^1(\mathbb{R}^3)^\star \cong \mathbb{R}^3$. Als angeordnete Basis wählen wir $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$.
- $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^\star \cong \mathbb{R}^3$. Als angeordnete Basis wählen wir $(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$.
- $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)^\star \cong \mathbb{R}$. Als Basisvektor nehmen wir $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

Es seien $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und

$$\mathrm{Vekt}(U) := \left\{ v \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v \text{ ist unendlich oft differenzierbar} \right\}$$

der *Vektorraum der glatten Vektorfelder auf U*.[5] Wir erklären die Isomorphismen

$$\begin{aligned} \alpha \colon \mathrm{Vekt}(U) &\longrightarrow \Omega^1(U) \\ v = (a, b, c) &\longmapsto \alpha_v := a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z, \\ \omega \colon \mathrm{Vekt}(U) &\longrightarrow \Omega^2(U) \\ v = (a, b, c) &\longmapsto \omega_v := a\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + c\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

*5.2.12 Bemerkung.* Diese Isomorphismen induzieren den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \star \colon \Omega^1(U) &\longrightarrow \Omega^2(U) \\ a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z &\longmapsto a\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + c\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

der sich *Hodge*[6]*-Operator* nennt.

[4] Georges de Rham (1903 - 1990), schweizer Mathematiker.

[5] Ein Vektorfeld $v \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ soll man sich als eine (unendlich oft differenzierbare) Abbildung vorstellen, die jedem Punkt in $U$ einen **Tangentialvektor** zuordnet.

[6] William Vallance Douglas Hodge (1903 - 1975), britischer Mathematiker.

Für ein Vektorfeld $v = (a, b, c)$ auf $U$ gilt somit

$$\begin{aligned} d\alpha_v &= d(a\,dx + b\,dy + c\,dz) \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Damit gehört $d\alpha_v$ zu dem Vektorfeld

$$\mathrm{Rot}(v) := \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right),$$

der sogenannten *Rotation* des Vektorfelds $v$. Mit dem Vektor

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

von Differentialoperatoren schreibt man formal

$$\mathrm{Rot}(v) = \nabla \times v.$$

Dabei steht „$\times$" für das Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ((4), Abschnitt 0.5).

Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} d\omega_v &= d(a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy) \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\mathrm{Div}(v) := \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

wird die *Divergenz* des Vektorfelds $v$ genannt und formal als

$$\mathrm{Div}(v) = \nabla \cdot v$$

geschrieben. Hier steht „$\cdot$" für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

Für eine differenzierbare Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt nach Satz 5.2.9, iii), und den obigen Rechnungen:

$$0 = d(df) = d(\alpha_{\mathrm{Grad}(f)}) = \omega_{\mathrm{Rot}(\mathrm{Grad}(f))},$$

i.e.

$$\boxed{\mathrm{Rot}\big(\mathrm{Grad}(f)\big) = 0.}$$

Ebenso findet man für $v \in \mathrm{Vekt}(U)$:

$$0 = d\big(d\alpha_v\big) = d\omega_{\mathrm{Rot}(v)} = \mathrm{Div}\big(\mathrm{Rot}(v)\big) dx \wedge dy \wedge dz,$$

d.h.

$$\boxed{\mathrm{Div}\big(\mathrm{Rot}(v)\big) = 0.}$$

Schließlich ist der *Laplace*[7]*-Operator* als

$$\begin{aligned} \Delta\colon \Omega^0(U) &\longrightarrow \Omega^0(U) \\ f &\longmapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f \end{aligned}$$

definiert. Für $f \in \Omega^0(U)$ gilt

[7] Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749 - 1827), französischer Mathematiker und Astronom.

$$\boxed{\Delta(f) = \operatorname{Div}\big(\operatorname{Grad}(f)\big).}$$

Mit dem Hodge-Operator aus Bemerkung 5.2.12 lässt sich diese Identität in der Form

$$\boxed{\mathrm{d}\big(\star(\mathrm{d}f)\big) = \Delta(f) \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z}$$

schreiben.

## 5.3 Orientierte Untermannigfaltigkeiten

Benutzt man den Formalismus der Differentialformen, um das Integral über eine Untermannigfaltigkeit zu definieren, dann muss man diese Untermannigfaltigkeit erst mit einer Orientierung versehen. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass in der Transformationsformel 4.1.1 der Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix auftritt, in der Transformationsformel für Differentialformen (Satz 5.2.5, iv) nur die Determinante der Jacobi-Matrix.

### Orientierte Vektorräume

**5.3.1 Definition.** Es sei $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zwei angeordnete Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(v_1', \ldots, v_n')$ von $V$ sind *orientierungsäquivalent*, wenn die lineare Abbildung

$$L\colon V \longrightarrow V$$

mit

$$L(v_i) = v_i', \quad i = 1, \ldots, n,$$

die Bedingung

$$\operatorname{Det}(L) > 0$$

erfüllt.

*5.3.2 Bemerkung.* i) Es sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine angeordnete Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $V$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v_i\colon V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j &\longmapsto \lambda_i \end{aligned}$$

eine alternierende 1-Form auf $V$, $i = 1, \ldots, n$, und der Vektor

$$\mathrm{d}v_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}v_n$$

ist eine Basis für $\bigwedge^n V^\star$ (vgl. Satz 5.1.5).

Für zwei angeordnete Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(v_1', \ldots, v_n')$ gilt nach Satz 5.1.14, iv), dass

$$L^\star(\mathrm{d}v_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}v_n') = \operatorname{Det}(L) \cdot (\mathrm{d}v_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}v_n).$$

Mithin sind zwei Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(v_1', \ldots, v_n')$ genau dann orientierungsäquivalent, wenn es eine positive reelle Zahl $a$ gibt, so dass

$$\mathrm{d}v_1' \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}v_n' = a \cdot (\mathrm{d}v_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}v_n).$$

ii) Man sieht leicht, z.B. mit der Diskussion in i), dass „Orientierungsäquivalenz" eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller angeordneter Basen von $V$ ist.

**5.3.3 Definition.** a) Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *Orientierung von $V$* ist eine Orientierungsäquivalenzklasse angeordneter Basen von $V$.
**Schreibweise.** Die Orientierungsäquivalenzklasse der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ wird mit $[v_1, \ldots, v_n]$ bezeichnet.

b) Ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ zusammen mit einer Orientierung $[v_1, \ldots, v_n]$ ist ein *orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum*.

c) Es seien $(U, [u_1, \ldots, u_n])$ und $(V, [v_1, \ldots, v_n])$ orientierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Ein linearer **Isomorphismus** $L\colon U \longrightarrow V$ ist *orientierungstreu* oder *orientierungserhaltend*, wenn die Basis $(L(u_1), \ldots, L(u_n))$ orientierungsäquivalent zu der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ ist. Andernfalls ist $L$ *orientierungsumkehrend*.

d) Die *Standardorientierung* des $\mathbb{R}^n$ ist durch die Orientierungsäquivalenzklasse der Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ gegeben.

*5.3.4 Bemerkung.* Jeder endlichdimensionale reelle Vektorraum hat genau zwei Orientierungen.

## Orientierte Untermannigfaltigkeiten

**5.3.5 Definition.** Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit vom Typ $\mathscr{C}^1$.

a) Eine *Karte* für $M$ ist eine Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow U$, so dass gilt:

- $V \subset \mathbb{R}^k$ ist ein Gebiet,
- $\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein $k$-dimensionales glattes parametrisiertes Flächenstück,[8]
- $U = \varphi(V) \subset M$.

b) Ein *Atlas für $M$* ist eine Familie $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ von Karten für $M$, so dass

$$M = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

c) Ein Atlas $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ für $M$ ist *orientiert*, wenn für $i, j \in I$ und den Kartenwechsel[9]

$$\varphi_{ij}\colon \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j^{-1}} \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

gilt: Die lineare Abbildung

$$D\varphi_{ij}(y)\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

ist orientierungstreu, $y \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$.

d) Zwei orientierte Atlanten $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ und $(\varphi'_j\colon V'_j \longrightarrow U'_j)_{j\in J}$ für $M$ sind *orientierungsäquivalent*, wenn der Atlas

$$\left(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i, i \in I, \varphi'_j\colon V'_j \longrightarrow U'_j, j \in J\right)$$

orientiert ist.

[8] (18), Definition 11.3.1.

[9] Bei diesen und weiteren Verknüpfungen werden wir die Einschränkungen auf den jeweiligen Definitionsbereich der Einfachheit halber unterdrücken.

*5.3.6 Bemerkung.* i) In unserem bisherigen Formalismus verbirgt sich ein kleines technisches Problem: Bisher ist jede Menge $I$ als Indexmenge für einen Atlas zugelassen. Da es aber die „Menge aller Mengen" nicht gibt (s. (17), 1.2.2), gibt es auch die Menge aller Atlanten einer gegebenen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht. Daher betrachten wir nur Atlanten der Form $(\varphi_U\colon V_U \longrightarrow U)_{U\in\mathcal{U}}$, für die $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}(M)$ eine Teilmenge der Menge aller offenen Mengen $\mathcal{T}(M)$ in $M$ ist.[10]

ii) Es ist jetzt leicht zu sehen, dass wir in Definition 5.3.5, d), eine Äquivalenzrelation auf der Menge der orientierten Atlanten der Form $(\varphi_U\colon V_U \longrightarrow U)_{U\in\mathcal{U}}$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}(M)$, definiert haben.

iii) Es sei $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ ein orientierter Atlas für die Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Für $i \in U_i$ und $x \in U_i$ sei $y \in V_i$ der Punkt mit $\varphi_i(y) = x$. Der Tangentialraum $T_xM$ von $M$ an $x$ ist nach (18), Satz 11.4.3, das Bild der linearen Abbildung

$$L := D\varphi_i(y)\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Wir erhalten die Orientierung $[L(e_1), ..., L(e_k)]$ von $T_xM$. Da der Atlas als orientiert vorausgesetzt wurde, hängt diese Orientierung nicht von der Wahl des Index $i \in I$ mit $x \in U_i$ ab. (Übung.)

**5.3.7 Definition.** Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit vom Typ $\mathcal{C}^1$.

a) Eine *Orientierung von M* ist eine Äquivalenzklasse eines orientierten Atlas $(\varphi_U\colon V_U \longrightarrow U)_{U\in\mathcal{U}}$. Dabei sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}(M)$.

b) Die Untermannigfaltigkeit $M$ ist *orientierbar*, wenn sie eine Orientierung besitzt.

*5.3.8 Bemerkung.* i) Mit Bemerkung 5.3.6, iii), sehen wir, dass das Datum einer Orientierung von $M$ äquivalent zu einem Datum folgender Bauart ist: Jedem Punkt $x \in M$ wird eine Orientierung des Tangentialraums $T_xM$ zugewiesen. Dabei soll es zu jedem Punkt $x' \in M$ eine Karte $\varphi\colon V \longrightarrow U$ für $M$ geben, so dass

- $x' \in U$ und
- die lineare Abbildung $D\varphi(y)\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow T_{\varphi(y)}M$ bzgl. der Standardorientierung von $\mathbb{R}^k$ und der festgelegten Orientierung von $T_{\varphi(y)}M$ orientierungstreu ist, $y \in V$.

ii) Eine zusammenhängende orientierbare Untermannigfaltigkeit lässt genau zwei Orientierungen zu: Es seien $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ ein orientierter Atlas für $M$ und $\tau\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ eine orientierungsumkehrende lineare Abbildung, z.B. $(x_1, x_2, ...., x_k) \longmapsto (-x_1, x_2, ..., x_k)$. Wir definieren

- $\widetilde{V}_i := \tau^{-1}(V_i)$, $i \in I$,
- $\widetilde{\varphi}_i\colon \widetilde{V}_i \xrightarrow{\varphi\circ\tau} U_i$, $i \in I$.

Dann sind die Atlanten $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ und $(\widetilde{\varphi}_i\colon \widetilde{V}_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ nicht orientierungsäquivalent. Der Atlas $(\widetilde{\varphi}_i\colon \widetilde{V}_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ induziert in $T_xM$, $x \in M$, die Orientierung, die derjenigen, die durch $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ induziert wird, entgegengesetzt ist.

iii) Es gibt nicht orientierbare Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$ (s. Beispiel 5.3.9, iv).

[10] Dabei sei daran erinnert, dass $U \subset M$ nach Definition offen ist, wenn es eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $U = W \cap M$.

*5.3.9 Beispiele.* i) Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, die einen Atlas $(\varphi\colon V \longrightarrow U)$ mit nur einer Karte besitzt, ist orientierbar. Insbesondere ist jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, als $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit aufgefasst, orientierbar.

ii) Wir versehen den Einheitskreis

$$S^1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

mit dem Atlas

$$\begin{aligned} \varphi_1\colon (-\pi,\pi) &\longrightarrow S^1 \setminus \{(-1,0)\} \\ t &\longmapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big), \\ \varphi_2\colon (0,2\pi) &\longrightarrow S^1 \setminus \{(1,0)\} \\ t &\longmapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big). \end{aligned}$$

Der Kartenwechsel ist

$$\begin{aligned} \varphi_{12} := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\colon (-\pi,0)\cup(0,\pi) &\longrightarrow (0,\pi)\cup(\pi,2\pi) \\ t &\longmapsto \begin{cases} t, & \text{falls } t \in (0,\pi) \\ t+2\pi, & \text{falls } t \in (-\pi,0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt:

$$J_{\varphi_{12}}(t) = (1), \quad t \in (-\pi,0)\cup(0,\pi).$$

Der angegebene Atlas ist orientiert, und $S^1$ ist orientierbar.

iii) (Hyperflächen) Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(x) = 0 \right\}.$$

Es wird vorausgesetzt, dass

$$\forall x \in M: \quad \operatorname{Grad} f(x) \neq 0.$$

Nach (18), Satz 11.3.4, ist $M$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ vom Typ $\mathscr{C}^1$. Wir definieren das *Einheitsnormalenfeld*

$$\begin{aligned} n\colon M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{\operatorname{Grad} f(x)}{\|\operatorname{Grad} f(x)\|}. \end{aligned}$$

Es sei $\varphi\colon V \longrightarrow U$ eine Karte für $M$. Da $V$ nach der Definition einer Karte (Definition 5.3.5, a), und (18), Definition 11.3.1) zusammenhängend ist, ist das Vorzeichen der stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} \Delta_\varphi\colon V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \operatorname{Det}\left( \frac{n\big(\varphi(y)\big)}{J_\varphi(y)^t} \right) \end{aligned}$$

konstant auf $V$. Es sei $(\widetilde{\varphi}_i\colon \widetilde{V}_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ ein Atlas für $M$. Wir fixieren

$$\begin{aligned} \tau\colon \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) &\longrightarrow (-y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

und definieren einen neuen Atlas $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ wie folgt: Es sei $i \in I$. Falls das Vorzeichen von $\Delta_{\widetilde{\varphi}_i}$ auf $\widetilde{V}_i$ positiv ist, dann seien $V_i := \widetilde{V}_i$ und $\varphi_i := \widetilde{\varphi}_i$.

Andernfalls seien $V_i := \tau^{-1}(\widetilde{V}_i)$ und $\varphi_i := \widetilde{\varphi}_i$. In diesem Atlas ist das Vorzeichen von $\Delta_{\varphi_i}$ auf $V_i$ positiv, $i \in I$.

Wir möchten nun überprüfen, dass der Atlas $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ orientiert ist. Gegeben seien $i, j \in I$ und weiter

- $W := \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$,
- $W' := \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$,
- $\varphi_{ij} := \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\colon W \longrightarrow W'$.

Außerdem seien $x \in U_i \cap U_j$ und

- $y := \varphi_i^{-1}(x) \in W$,
- $y' := \varphi_j^{-1}(x) \in W'$.

Wegen $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$ gilt $\varphi_{ij}(y) = y'$ und nach der Kettenregel ((18), Satz 6.3.1):

$$J_{\varphi_i}(y) = J_{\varphi_j}\big(\varphi_{ij}(y)\big) \cdot J_{\varphi_{ij}}(y) = J_{\varphi_j}(y') \cdot J_{\varphi_{ij}}(y),$$

so dass

$$\left(\frac{n(x)}{J_{\varphi_i}(y)^t}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & J_{\varphi_{ij}}(y)^t \end{array}\right) \cdot \left(\frac{n(x)}{J_{\varphi_j}(y')^t}\right)$$

und daher

$$\Delta_{\varphi_i}(y) = \operatorname{Det}\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & J_{\varphi_{ij}}(y)^t \end{array}\right) \cdot \Delta_{\varphi_j}(y').$$

Der Atlas $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U)_{i\in I}$ wurde so konstruiert, dass $\Delta_{\varphi_i}(y) > 0$ und $\Delta_{\varphi_j}(y') > 0$. Deshalb folgert man

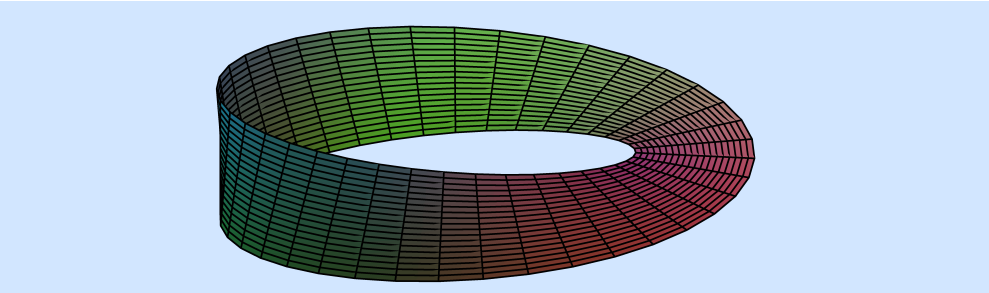
$$\operatorname{Det}\big(J_{\varphi_{ij}}(y)\big) > 0.$$

Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass die Einheitssphäre (vgl. (18), Beispiel 11.3.5) $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ orientierbar ist.

iv) (Das Möbiusband[11]) Sei $I := (-1, 1)$. Hier betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon \mathbb{R} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, t) & \longmapsto & \left(\cos(\varphi)\left(R + t\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right), \sin(\varphi)\left(R + t\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right), t\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right). \end{array}$$

Die Geometrie dieser Abbildung versteht man leicht mit den Polar- und Kugelkoordinaten (vgl. (18), Beispiel 3.2.4, iv), und 10.2.5, iii):



[11] August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), deutscher Mathematiker und Astronom.

Für jedes offene Intervall $J \subset \mathbb{R}$ der Länge $2\pi$ ist $\Phi_{|J\times I}$ injektiv, und für ein offenes Intervall $J'$ einer Länge $l < 2\pi$ ist $\Phi_{|J'\times I}\colon J' \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes parametrisiertes Flächenstück. Damit ist

$$M := \Phi(\mathbb{R} \times I)$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

Es ist unser Ziel nachzuweisen, dass $M$ nicht orientierbar ist. Wäre $M$ orientierbar, so müsste es ein stetig differenzierbares *Einheitsnormalenfeld* (vgl. Teil iii)

$$\widetilde{n}\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

geben, d.h.

- $\forall x \in M : \widetilde{n}(x) \perp T_xM$,[12]
- $\forall x \in M : \|\widetilde{n}(x)\| = 1$.

Die Existenz dieses Einheitsnormalenfelds weist man z.B. leicht mit dem Kreuzprodukt für Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ((4), Abschnitt 0.5) nach. Eine allgemeinere Aussage findet man in (5), §20, Satz 2, a). Wir verfolgen dieses Normalenfeld entlang des Kreises

$$\Big\{\, \Phi(\varphi, 0) \,\big|\, \varphi \in [-\pi, \pi] \,\Big\}.$$

Für $\varphi \in [-\pi, \pi]$ bilden wir

- $v_{\varphi 1} := \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\varphi, 0) = (-R \cdot \sin(\varphi), R \cdot \cos(\varphi), 0)$,
- $v_{\varphi 2} := \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(\varphi, 0) = \Big(\cos(\varphi) \cdot \cos\Big(\dfrac{\varphi}{2}\Big), \sin(\varphi) \cdot \cos\Big(\dfrac{\varphi}{2}\Big), \sin\Big(\dfrac{\varphi}{2}\Big)\Big)$.

Wir legen das Vorzeichen $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ so fest, dass

$$n(0,0) = e_3 = -\frac{1}{R} \cdot v_{01} \times v_{02}, \quad n := \varepsilon \cdot \widetilde{n}.$$

Mit dem schon erwähnten Kreuzprodukt und der Stetigkeit berechnet man für $-\pi \le \varphi \le \pi$

$$\begin{aligned} n\big(\Phi(\varphi, 0)\big) &= -\frac{1}{R} \cdot v_{\varphi 1} \times v_{\varphi 2} \\ &= \Big(\cos(\varphi) \cdot \cos\Big(\frac{\varphi + \pi}{2}\Big), \sin(\varphi) \cdot \cos\Big(\frac{\varphi + \pi}{2}\Big), \sin\Big(\frac{\varphi + \pi}{2}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich

- $n\big(\Phi(\pi, 0)\big) = e_1$,
- $n\big(\Phi(-\pi, 0)\big) = -e_1$.

Wegen

$$\Phi(-\pi, 0) = \Phi(\pi, 0)$$

ist das jedoch unmöglich, so dass $M$ nicht orientierbar sein kann.

[12] Das bedeutet, dass $\langle \widetilde{n}(x), v \rangle = 0$ für jeden Vektor $v \in T_xM$ gilt.

## 5.4 Teilungen der Eins

Nach Satz 3.2.1 kann man eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$, deren Träger in einer kompakten Menge enthalten ist, integrieren. Damit können wir hoffen, eine glatte $p$-Form mit „kompaktem Täger" über eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $p$ zu integrieren. Der Ansatz dabei ist, Kartengebiete zu verwenden. Wir müssen dazu die gegebene $p$-Form so als Summe von $p$-Formen schreiben, dass jeder Summand einen kompakten Träger hat, der **in einem Kartengebiet enthalten** ist. Die Möglichkeit hierzu wird durch die Teilung der Eins eröffnet.

**5.4.1 Satz** (Teilung der Eins). *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $k$ vom Typ $\mathcal{C}^\infty$ und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $M$. Dann existieren unendlich oft differenzierbare Funktionen $\xi_l\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:*

- $\forall l \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \xi_l(x) \leq 1$.
- *Für $l \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\overline{\operatorname{supp}(\xi_l)}$ kompakt, und es gibt einen Index $i \in I$ mit $(\overline{\operatorname{supp}(\xi_l)} \cap M) \subset U_i$.*
- *Für jede **kompakte** Teilmenge $K \subset M$ existieren ein Index $L_0 \in \mathbb{N}$ und für jedes $L \geq L_0$ eine offene Teilmenge $U_L \subset M$, so dass $K \subset U_L$, $\overline{U}_L$ kompakt ist und*
  - $\forall x \in K : \sum_{l=1}^{L} \xi_l(x) = 1$,
  - $\forall x \in M \setminus U_L : \sum_{l=1}^{L} \xi_l(x) = 0$.

Wir unterteilen den Beweis des Satzes in kleinere Stücke und beginnen mit dem

**5.4.2 Hilfssatz.** *Es seien $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, so dass $K \subset V$. Dann existiert eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq f(x) \leq 1$.
- $\forall x \in K : f(x) = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus V : f(x) = 0$.

*Beweis.* Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \lambda\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

ist nach (17), Aufgabe 6.17.5 und Beispiel 5.7.12, unendlich oft differenzierbar. Für reelle Zahlen $a < b$ definieren wir damit

$$\begin{array}{rcl} \psi_{a,b}\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda(x-a)\cdot\lambda(b-x), \end{array}$$

d.h.

$$\psi_{a,b}(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{x-b}\right), & \text{falls } x \in (a,b) \\ 0, & \text{falls } x \notin (a,b) \end{cases}.$$

Mit dieser Funktion konstruieren wir wiederum

$$\begin{aligned} \varphi_{a,b} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\displaystyle\int_x^b \psi(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b \psi(t)\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ([17], Satz 5.3.1) ist $\psi$ unendlich oft differenzierbar. Die Funktion $\psi$ hat folgende Eigenschaften:

- $\forall x \leq a : \varphi_{a,b}(x) = 1$.
- $\forall x \in (a,b) : 0 \leq \varphi_{a,b}(x) \leq 1$.
- $\forall x \geq b : \varphi_{a,b}(x) = 0$.

a) Wir untersuchen zunächst folgende Situation: Es gebe ein $y \in \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $a < b$, so dass

$$\begin{aligned} K &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x-y\| \leq a \right\}, \\ V &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x-y\| < b \right\}. \end{aligned}$$

In dieser Situation hat die Funktion

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_{a,b}\big(\|x-y\|\big) \end{aligned}$$

die gewünschten Eigenschaften.

b) Im Allgemeinen arbeiten wir folgendermaßen: Da $K$ kompakt ist, existieren reelle Zahlen $a_1 < b_1, \ldots, a_m < b_m$ und Punkte $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_i, \quad B_i := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x-y_i\| < a_i \right\},\ i = 1, \ldots, m,$$

und

$$V_i := B(y_i, b_i) \subset V, \quad i = 1, \ldots, m.$$

(Nach [18], Lemma 3.4.4, ist $d := \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus V) > 0$. Sei $a := (1/2) \cdot d$. Da $K$ kompakt ist und $K \subset \bigcup_{y \in K} B(y,a)$ finden wir $y_1, \ldots, y_m$ und $a_1, \ldots, a_m$. Ebenso gilt $d_i := \operatorname{dist}(\overline{B}(y_i, a_i), \mathbb{R}^n \setminus V) > 0$, so dass wir weiter $b_i \in (a_i, a_i + d_i)$ wählen können, $i = 1, \ldots, m$.)

Es sei $f_i \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die in a) zu den Mengen $\overline{B}_i \subset V_i$ definierte Funktion, $i = 1, \ldots, m$. Wir setzen

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 - \prod_{i=1}^m \big(1 - f_i(x)\big) \end{aligned}$$

und erhalten somit die verlangte Funktion. □

*Beweis von Satz 5.4.1.* **Schritt 1.** Wir erklären zunächst, dass wir $I = \mathbb{N}$ voraussetzen dürfen, d.h. dass die Überdeckung abzählbar ist. Es sei

$$I_1 := \left\{ (y, a) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_{>0} \,\middle|\, B(y, a) \cap M \neq \varnothing \right\}.$$

Dies ist eine abzählbare Menge, und wir wählen eine Bijektion

$$\alpha_1 \colon \mathbb{N} \longrightarrow I_1.$$

Dann ist $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $W_i := B(\alpha_1(i)) \cap M$, $i \in \mathbb{N}$, eine abzählbare Basis der Topologie von $M$, d.h. für eine offene Menge $U \subset M$ gilt

$$U = \bigcup_{i:W_i\subset U} W_i.$$

Zu einer beliebigen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ gibt es deshalb eine Überdeckung $(\widetilde{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und eine Abbildung $\nu \colon \mathbb{N} \longrightarrow I$ mit $\widetilde{U}_i \subset U_{\nu(i)}$, $i \in \mathbb{N}$. Für unser Argument dürfen wir $(U_i)_{i\in I}$ durch $(\widetilde{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ersetzen und deshalb $I = \mathbb{N}$ voraussetzen.

**Schritt 2.** Die Menge

$$I_2 := \left\{ (i, y, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^k \times \mathbb{Q}_{>0} \,\middle|\, \overline{B}(y, a) \cap M \subset U_i \right\}$$

ist ebenfalls abzählbar. Es sei

$$\alpha_2 \colon \mathbb{N} \longrightarrow I_2$$

eine Abzählung. Für $l \in \mathbb{N}$ und $\alpha_2(l) = (i, y, a)$ seien

$$\begin{aligned} A_l &:= B\left(y, \frac{1}{2} \cdot a\right), \\ B_l &:= B(y, a). \end{aligned}$$

Man beachte, dass

$$M \subset \bigcup_{l\in\mathbb{N}} A_l. \tag{5.4}$$

Nach Hilfssatz 5.4.2 gibt es eine Funktion $f_l \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

- $f_l(y) = 1$, $y \in \overline{A}_l$,
- $f_l(y) = 0$, $y \notin B_l$, $l \in \mathbb{N}$.

Mit

$$\begin{aligned} \xi_0 &:= f_0, \\ \xi_{l+1} &:= (1 - f_0) \cdot \dots \cdot (1 - f_l) \cdot f_{l+1}, \quad l \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

erhalten wir weitere unendlich oft differenzierbare Funktionen. Dabei gilt:

$$\forall l \in \mathbb{N} \forall x \notin B_l : \quad \xi_l(x) = 0.$$

Nach Konstruktion gilt für $l \in \mathbb{N}$ und $\alpha_2(l) = (i, y, n)$, dass

$$(\overline{B}_l \cap M) \subset U_i.$$

Damit haben wir die ersten beiden behaupteten Eigenschaften der Funktion $\xi_l$ überprüft, $l \in \mathbb{N}$.

**Behauptung.** $\forall l \in \mathbb{N} : 1 - (\xi_0 + \dots + \xi_l) = (1 - f_0) \cdot \dots \cdot (1 - f_l)$.

Diese Behauptung verifizieren wir durch Induktion über $l$. Für $l = 0$ gilt sie nach Definition. Für $l + 1$ berechnen wir mit der Definition und der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} 1-(\xi_0 + \cdots + \xi_{l+1}) &= 1-(\xi_0 + \cdots + \xi_l) - \xi_{l+1} \\ &= (1 - f_0) \cdot \cdots \cdot (1 - f_l) - (1 - f_0) \cdot \cdots \cdot (1 - f_l) \cdot f_{l+1} \\ &= (1 - f_0) \cdot \cdots \cdot (1 - f_{l+1}). \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. √

Da $K$ kompakt ist, gibt es wegen (5.4) einen Index $L_0$, so dass

$$K \subset \bigcup_{l=0}^{L_0} A_l.$$

Die Behauptung zeigt, dass für $L \geq L_0$ gilt:

$$\forall x \in \bigcup_{l=0}^{L} A_l : \quad \sum_{l=0}^{L} \xi_l(x) = 1.$$

Ferner gilt für $L \geq L_0$

$$K \subset \bigcup_{l=0}^{L} (A_l \cap M) \subset U_L := \bigcup_{l=0}^{L} (B_l \cap M).$$

Nach Konstruktion ist $\overline{U}_L$ kompakt. Da $\xi_l(x) = 0$ für $x \notin B_l$ und $l \in \mathbb{N}$ gilt, folgt auch

$$\forall L \geq L_0 \forall l \in \{0, \ldots, L\} \forall x \in M \setminus U_L : \quad \xi_l(x) = 0.$$

Damit sind alle Behauptungen des Satzes gezeigt. □

## 5.5 Integration von Differentialformen über Untermannigfaltigkeiten

Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine **orientierte** Untermannigfaltigkeit der Dimension $p$ und $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ eine glatte $p$-Form, so dass

$$K := \overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M$$

kompakt ist. Dabei ist

$$\operatorname{supp}(\omega) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \omega(x) \neq 0 \right\}$$

der *Träger von* $\omega$. Wir wollen in dieser Situation das Integral

$$\int_M \omega$$

definieren.

## Fall 1. Die Menge $K$ ist in einem Kartengebiet enthalten

In diesem Fall nehmen wir an, dass es eine „orientierte“ [13] Karte $\varphi\colon V \longrightarrow U$ für $M$ gibt, so dass

$$K := \overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M \subset U.$$

Für solch eine Karte $\varphi\colon V \longrightarrow U$ existiert eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi^\star(\omega) = f\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_p.$$

Der Träger der Funktion $f$ ist in der kompakten Teilmenge $\varphi^{-1}(K) \subset V$ enthalten, so dass $f$ als stetige Funktion nach Satz 3.2.1, ii), über $V$ integrierbar ist und wir

$$\int_{M,\varphi} \omega := \int_V f\mathrm{d}\mu_p$$

setzen können.

**5.5.1 Satz.** *In der obigen Situation seien $\varphi\colon V \longrightarrow U$ und $\varphi'\colon V' \longrightarrow U'$ orientierte Karten für $M$, so dass*

$$\overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M \subset U \cap U'.$$

*Dann gilt*

$$\int_{M,\varphi} \omega = \int_{M,\varphi'} \omega.$$

*Beweis.* **Schritt 1.** Wenn $U' \subset U$, $V' = \varphi^{-1}(U)$ und $\varphi' = \varphi_{|V'}$ gilt, dann ist nichts zu zeigen.

**Schritt 2.** Im Allgemeinen können wir auf Grund von Schritt 1 zu

$$\begin{aligned} \varphi_{|\varphi^{-1}(U\cap U')}\colon \varphi^{-1}(U\cap U') &\longrightarrow U\cap U', \\ \varphi'_{|\varphi'^{-1}(U\cap U')}\colon \varphi'^{-1}(U\cap U') &\longrightarrow U\cap U' \end{aligned}$$

übergehen und deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U = U'$ voraussetzen.

**Schritt 3.** Es seien

$$\psi\colon V \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{\varphi'^{-1}} V'$$

die Kartenwechselabbildung und

$$\begin{aligned} \varphi^\star(\omega) &= f\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_p, \\ \varphi'^\star(\omega) &= f'\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_p. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi = \varphi' \circ \psi$ gilt nach Satz 5.2.5, ii) und iv),

$$\begin{aligned} \varphi^\star(\omega)(y) &= \psi^\star\big(\varphi'^\star(\omega)\big)(y) \\ &= (f' \circ \psi)(y) \cdot \operatorname{Det}\big(J_\psi(y)\big)\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_p, \quad y \in V. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Da $\varphi$ und $\varphi'$ mit der Orientierung von $M$ verträglich sind, gilt

$$\forall y \in V: \quad \operatorname{Det}\big(J_\psi(y)\big) > 0,$$

i.e.

$$\forall y \in V: \quad \Big|\operatorname{Det}\big(J_\psi(y)\big)\Big| = \operatorname{Det}\big(J_\psi(y)\big).$$

[13] kurz für: mit der Orientierung von $M$ veträgliche

Damit folgt aus (5.5) und der Transformationsformel 4.1.1

$$\int_V f(y)\mathrm{d}\mu_p(y) = \int_V (f' \circ \psi)(y) \cdot \mathrm{Det}\big(J_\psi(y)\big)\mathrm{d}\mu_p(y) = \int_{V'} f'(y')\mathrm{d}\mu_p(y').$$

Das ist genau die behauptete Gleichung. □

Wegen dieses Satzes schreiben wir für eine orientierte Karte $\varphi\colon V \longrightarrow U$, so dass $\overline{\mathrm{supp}(\omega)} \cap M$ in $U$ enthalten ist,

$$\int_M \omega := \int_{M,\varphi} \omega.$$

## Fall 2. Der allgemeine Fall

Es sei $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ ein Atlas, der zu einem Atlas aus der Orientierung von $M$ orientierungsäquivalent ist. Dann ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $M$. Dazu erhalten wir nach Satz 5.4.1 gewisse unendlich oft differenzierbare Funktionen

$$\xi_k\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

so dass

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \xi_k(x) \leq 1$,
- $\overline{\mathrm{supp}(\xi_k)} \cap M$ kompakt ist, $k \in \mathbb{N}$,
- zu $k \in \mathbb{N}$ ein Index $i \in I$ mit $\overline{\mathrm{supp}(\xi_k)} \cap M \subset U_i$ existiert.

Zu der kompakten Menge

$$K := \overline{\mathrm{supp}(\omega)} \cap M$$

gibt es weiter einen Index $L \in \mathbb{N}$, so dass

- $\forall x \in K : \xi_0(x) + \cdots + \xi_L(x) = 1$.

Damit definieren wir die glatten $p$-Formen

$$\omega_i := \xi_i \cdot \omega, \quad i = 0, \ldots, L,$$

auf $\mathbb{R}^n$. Man beachte, dass

- $\forall x \in M : \omega(x) = \omega_0(x) + \cdots + \omega_L(x)$,
- $\overline{\mathrm{supp}(\omega_i)} \cap M = \overline{\mathrm{supp}(\xi_i)} \cap \overline{\mathrm{supp}(\omega)} \cap M$ kompakt und in einem Kartengebiet enthalten ist, $i = 0, \ldots, L$.

Mit Fall 1 können wir jetzt

$$\int_{M,\xi_0,\ldots,\xi_L} \omega := \sum_{i=0}^{L} \int_M \omega_i$$

definieren.

**5.5.2 Satz.** *Für Funktionen $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\xi'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sowie Indizes $L$ bzw. $L'$ mit den oben genannten Eigenschaften gilt*

$$\int_{M,\xi_0,\ldots,\xi_L} \omega = \int_{M,\xi'_0,\ldots,\xi'_{L'}} \omega.$$

*Beweis.* **Schritt 1.** Falls es eine orientierte Karte $\varphi\colon V \longrightarrow U$ mit $\overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M \subset U$ gibt, dann folgt auch $\overline{\operatorname{supp}(\xi_i \cdot \omega)} \cap M \subset U$, $i = 0, \ldots, L$, und $\overline{\operatorname{supp}(\xi'_j \cdot \omega)} \cap M \subset U$, $j = 0, \ldots, L'$. Wir folgern

$$\int_M \xi_0 \cdot \omega + \cdots + \int_M \xi_L \cdot \omega = \int_M \omega = \int_M \xi'_0 \cdot \omega + \cdots + \int_M \xi'_{L'} \cdot \omega$$

aus der Linearität des Rücktransports (Satz 5.2.5, i) und des Integrals.

**Schritt 2.** Hier erhalten wir unter Verwendung von Fall 1 für die Formen $\xi_i \cdot \omega$, $i = 0, \ldots, L$, bzw. $\xi'_i \cdot \omega$, $j = 0, \ldots, L'$,

$$\sum_{i=0}^{L} \int_M \xi_i \cdot \omega = \sum_{i=0}^{L} \sum_{j=0}^{L'} \int_M \xi'_j \cdot \xi_i \cdot \omega = \sum_{j=0}^{L'} \sum_{i=0}^{L} \int_M \xi_i \cdot \xi'_j \cdot \omega = \sum_{j=0}^{L'} \int_M \xi'_j \cdot \omega$$

und damit die behauptete Gleichheit. □

Zu Funktionen $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und einem Index $L \in \mathbb{N}$ mit den oben aufgelisteten Eigenschaften definieren wir

$$\int_M \omega = \int_{M, \xi_0, \ldots, \xi_L} \omega.$$

*5.5.3 Bemerkung.* Ebenso definieren wir $\int_M \omega$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset U$ und eine glatte $p$-Form $\omega$ auf $U$.

## 5.6 Untermannigfaltigkeiten mit Rand

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (17), Satz 5.3.1, gestattet für eine stetig differenzierbare Funktion $F\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Berechnung des Integrals $\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x$ durch Auswertung der Funktion $F$ an den beiden Randpunkten von $[a, b]$. Untermannigfaltigkeiten mit Rand sind interessante und weitreichende Verallgemeinerungen eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$, die man für die Formulierung des Satzes von Stokes benötigt.

**5.6.1 Definition.** Eine Teilmenge $H \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Halbraum*, wenn es eine nichttriviale lineare Abbildung

$$l\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, so dass

$$H := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, l(x) \leq 0 \right\}.$$

*5.6.2 Bemerkung.* Der Rand von $H$ ((18), Definition 1.6.1) ist durch

$$\partial H := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, l(x) = 0 \right\}$$

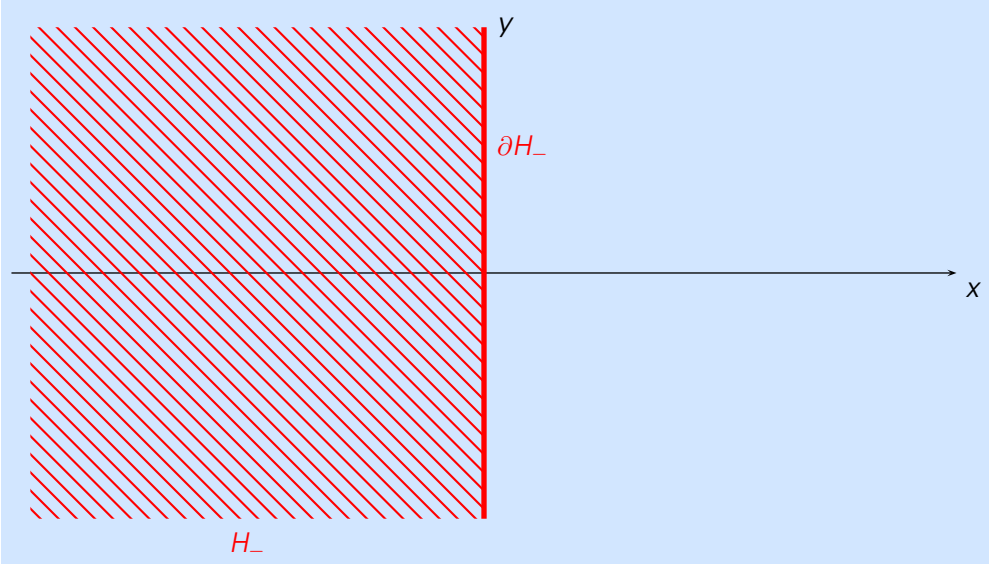
und der offene Kern ((18), Definition 1.6.4) durch

$$\overset{\circ}{H} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, l(x) < 0 \right\}$$

gegeben.

*5.6.3 Beispiel.* Der *Standardhalbraum* in $\mathbb{R}^n$ ist

$$H_- := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_1 \leq 0 \right\}.$$




**5.6.4 Definition.** Ein *Parametergebiet mit Rand* ist eine zusammenhängende Teilmenge $P \subset \mathbb{R}^n$, so dass eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein Halbraum $H \subset \mathbb{R}^n$ mit

- $U \cap \partial H \neq \varnothing$,
- $U \cap H = P$

existieren.

*5.6.5 Bemerkung.* Für ein Parametergebiet $P$ mit Rand gilt

$$\begin{aligned} \partial P &= \partial H \cap P, \\ \mathring{P} &= \mathring{H} \cap P. \end{aligned}$$

**5.6.6 Definition.** Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so dass $k, l \geq 1$.

a) Ein *$k$-dimensionales glattes parametrisiertes Flächenstück mit Rand vom Typ $\mathscr{C}^l$* ist eine Abbildung $\varphi\colon P \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

- $P \subset \mathbb{R}^k$ ein Parametergebiet mit Rand ist,
- ein $k$-dimensionales glattes parametrisiertes Flächenstück $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{P} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vom Typ $\mathscr{C}^l$ existiert mit
  - $P \subset \widetilde{P}$,
  - $\widetilde{\varphi}_{|P} = \varphi$.

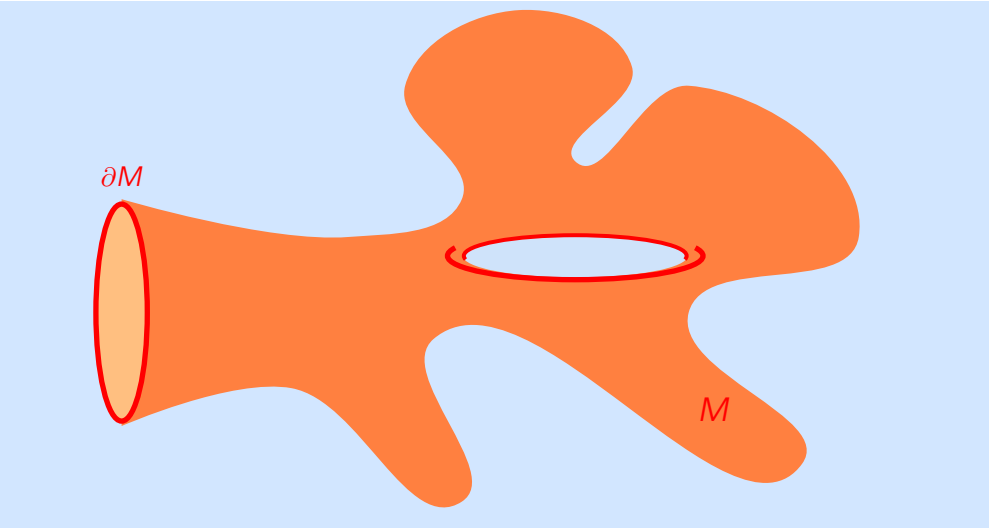
b) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *$k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand vom Typ $\mathscr{C}^l$*, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ ein $k$-dimensionales glattes parametrisiertes Flächenstück $\varphi\colon P \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit oder ohne Rand vom Typ $\mathscr{C}^l$ mit $x \in \varphi(P) \subset M$ gibt.

c) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Ein Punkt $x \in M$ heißt *innerer Punkt*, wenn es ein $k$-dimensionales glattes parametrisiertes Flächenstück $\varphi\colon P \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **ohne** Rand mit $x \in \varphi(P) \subset M$ gibt. Andernfalls heißt $x$ *Randpunkt von $M$*. Der *Rand von $M$* ist die Menge

$$\partial M := \left\{ x \in M \,\middle|\, x \text{ ist Randpunkt von } M \right\}$$

und das (*relative*) *Innere von M* die Menge

$$\overset{\circ}{M} := M \setminus \partial M.$$




**5.6.7 Warnung.** Für $k = n$ stimmen die Begriffe aus obiger Definition mit denen aus (18), Definition 1.6.1 und 1.6.4, überein. Für $k < n$ ist das aber nicht mehr so: Für eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand gilt im Sinne von (18), Definition 1.6.1, dass

$$\partial M = M.$$

Im Sinne von Definition 5.6.6, c), gilt z.B.

$$\partial S^{n-1} = \varnothing.$$

*5.6.8 Beispiele.* i) Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ im Sinne von (18), Definition 11.3.3, kann auch als Untermannigfaltigkeit mit Rand angesehen werden. Allerdings gilt dann $\partial M = \varnothing$.

ii) Jeder Halbraum $H \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dabei sind $\partial H$ und $\overset{\circ}{H}$ wie in Bemerkung 5.6.2 beschrieben.

iii) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist

$$\overline{B}(a,r) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x-a\| \le r \right\}$$

eine Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \partial\overline{B}(a,r) &= S(a,r) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x-a\| = r \right\}, \\ \overset{\circ}{\overline{B}}(a,r) &= B(a,r). \end{aligned}$$

**5.6.9 Lemma.** *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand vom Typ $\mathscr{C}^l$. Dann ist ihr Rand $\partial M$ eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit vom Typ $\mathscr{C}^l$, und es gilt*

$$\partial(\partial M) = \varnothing.$$

*Beweis.* Es sei $x \in \partial M$. Dann gibt es ein glattes parametrisiertes Flächenstück[14]

$$\varphi\colon B_k(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

vom Typ $\mathscr{C}^l$ mit

- $\varphi(B_k(0,r) \cap H_-) \subset M$,
- $x \in \partial M \cap \varphi\big(B_k(0,r)\big) = \varphi\big(B_k(0,r) \cap \partial H_-\big)$.

Es sei

$$\begin{array}{rcccl} \overline{\varphi}\colon B_{k-1}(0,r) & \longrightarrow & B_k(0,r) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \\ (y_2,\dots,y_k) & \longmapsto & (0,y_2,\dots,y_k). & & \end{array}$$

Die Abbildung $\overline{\varphi}$ ist ein $(k-1)$-dimensionales glattes parametrisiertes Flächenstück vom Typ $\mathscr{C}^l$, so dass $x \in \overline{\varphi}(B_{k-1}(0,r))$. Wir erkennen, dass $\partial M$ eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit vom Typ $\mathscr{C}^l$ mit leerem Rand ist. □

Alle Definitionen und Sätze aus den Abschnitten 5.3, 5.4 und 5.5 lassen sich ohne große Mühe auf Untermannigfaltigkeiten mit Rand übertragen.

**5.6.10 Lemma.** *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist ihr Rand $\partial M$ orientierbar.*

*Beweis.* Es sei $(\varphi_i\colon V_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ ein orientierter Atlas[15] für $M$, der orientierungsäquivalent zu einem Atlas aus der Orientierung von $M$ ist. Wir nehmen an, dass es zu jedem Index $i \in I$ eine Zahl $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass

- $V_i = B_k(0,r_i)$ oder
- $V_i = B_k^-(0,r_i) := B_k(0,r_i) \cap H_-$ und ein glattes parametrisiertes Flächenstück $\widetilde{\varphi}_i\colon B_k(0,r_i) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\widetilde{\varphi}_{i|B_k^-(0,r_i)} = \varphi_i$ existiert.

Es seien

$$J := \Big\{\, i \in I \,\Big|\, U_i \cap \partial M \neq \varnothing \,\Big\}$$

und für $j \in J$

$$\begin{array}{rcccl} \overline{\varphi}_j\colon B_{k-1}(0,r_j) & \longrightarrow & B_k(0,r_j) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_j} & \mathbb{R}^n \\ (y_2,\dots,y_k) & \longmapsto & (0,y_2,\dots,y_k). & & \end{array}$$

Dann ist $(\overline{\varphi}_j\colon B_k(0,r_j) \longrightarrow \widetilde{U}_j := U_j \cap \partial M)_{j\in J}$ ein Atlas für $\partial M$, und wir behaupten, dass dieser Atlas orientiert ist. Wir fixieren $i,j \in J$ und betrachten die Kartenwechsel

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) & \longrightarrow & \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j), \\ \overline{\psi}\colon \overline{\varphi}_i^{-1}(U_i \cap U_j \cap \partial M) & \longrightarrow & \overline{\varphi}_j^{-1}(U_i \cap U_j \cap \partial M). \end{array}$$

Weiter schreiben wir

$$\begin{array}{rcl} \overline{\psi} & = & (\overline{\psi}_2,\dots,\overline{\psi}_n), \\ \psi & = & (\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_n) \end{array}$$

und beobachten

$$\forall y \in \overline{\varphi}_i^{-1}(U_i \cap U_j \cap \partial M): \quad \psi_1(0,y) = 0, \quad \psi_l(0,y) = \overline{\psi}_l(y), \quad l = 2,\dots,n.$$

[14] Wir schreiben $B_k(0,r)$, um anzudeuten, dass der Ball in $\mathbb{R}^k$ betrachtet wird.

[15] Der Leser bzw. die Leserin möge diesen Begriff für Untermannigfaltigkeiten mit Rand entwickeln.

Somit gilt

$$J_\psi(0,y) = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(0,y) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & J_{\overline{\psi}}(y) & \\ \star & & & \end{array}\right), \quad y \in \overline{\varphi}_i^{-1}(U_i \cap U_j \cap \partial M).$$

Damit ist

$$\forall y \in \overline{\varphi}_i^{-1}(U_i \cap U_j \cap \partial M): \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(0,y) > 0$$

zu überprüfen. Nach Definition gilt

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(0,y) = \lim_{t\to 0-0} \frac{\psi_1(t,y) - \psi_1(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0-0} \frac{\psi_1(t,y)}{t}.$$

Da

$$\psi(t,y) \in \overset{\circ}{H}_-$$

für Werte von $t < 0$, so dass $(t,y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$, folgt

$$\psi_1(t,y) < 0$$

und daher

$$\frac{\psi_1(t,y)}{t} > 0.$$

Der obige Grenzwert ist also nichtnegativ und damit positiv, weil null für ihn nicht in Frage kommt. □

**5.6.11 Definition.** Die durch den Atlas $(\overline{\varphi}_j\colon B(0,r_j) \longrightarrow \widetilde{U}_j)_{j\in J}$ bestimmte Orientierung von $\partial M$ ist die *induzierte Orientierung*.

*5.6.12 Bemerkung.* Der obige Beweis zeigt, dass für eine zusammenhängende orientierbare Untermannigfaltigkeit $M$ mit nichtleerem Rand die Orientierung von $M$ durch diejenige des Rands festgelegt ist und umgekehrt.

## 5.7 Der Satz von Stokes

In diesem Abschnitt formulieren und beweisen wir endlich den berühmten Satz von Stokes. Er verbindet das Integral der äußeren Ableitung einer glatten $(p-1)$-Form mit kompaktem Träger über eine orientierte $p$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Integral ebendieser Form über den Rand der Mannigfaltigkeit.

**5.7.1 Satz** (Der Satz von Stokes[16]). *Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte $p$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand vom Typ $\mathcal{C}^\infty$. Der Rand $\partial M$ werde mit der induzierten Orientierung versehen. Dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

*für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset U$ und jede glatte $(p-1)$-Form $\omega$ auf $U$, so dass*

$$\overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M$$

*kompakt ist.*

*5.7.2 Bemerkung.* Wir betrachten reelle Zahlen $a < b$ und das Intervall $[a, b]$. Dann ist der Rand $\partial I = \{a\} \cup \{b\}$. Der Formalismus der Orientierungen lässt sich nicht direkt auf 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten anwenden. Allerdings können wir einem Punkt einfach eine positive oder negative Orientierung zuweisen. Entsprechend den bisherigen Konventionen sollte die rechte Intervallgrenze positiv und die linke negativ orientiert sein. Das Intervall $I$ ist eindimensional. Wir sprechen deswegen von einer glatten 0-Form, also einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $F\colon I' \longrightarrow \mathbb{R}$, $I'$ ein offenes Intervall, das $[a, b]$ enthält. Wir müssen dann

$$\int_{\partial I} F = F(b) - F(a)$$

lesen. Mit $\mathrm{d}F = F'\mathrm{d}x$ lautet der Satz von Stokes

$$\int_I F'\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

In diesem Fall folgt der Satz von Stokes aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ((17), Satz 5.3.1). Den höherdimensionalen Fall werden wir darauf zurückführen.

*Beweis von Satz 5.7.1.* Wir wählen einen Atlas $(\varphi_{i,j}\colon V_{i,j} \longrightarrow U_{i,j})_{(i,j)\in\{1,2\}\times\mathbb{N}}$, so dass es zu $(i, j) \in \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ eine Zahl $a_{i,j} \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

- $V_{1,j} = (-a_{1,j}, a_{1,j})^{\times k}$,
- $V_{2,j} = (-a_{2,j}, 0] \times (-a_{2,j}, a_{2,j})^{\times(k-1)}$,
- $\varphi_{2,j}\big(\{0\} \times (-a_{2,j}, a_{2,j})^{\times(k-1)}\big) \subset \partial M$, $j \in \mathbb{N}$.

i) Wir nehmen zunächst an, dass es einen Index $j \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M \subset V_{1,j}$$

gibt. Dann gilt offensichtlich

$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

Die Menge

$$A := \varphi_{1,j}^{-1}\big(\overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M\big)$$

ist kompakt. Mit

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot \min\Big\{ a_{1,j}, \operatorname{dist}(A, \partial V_{1,j}) \Big\} > 0$$

gilt

$$A \subset (-a_{1,j} + \varepsilon, a_{1,j} - \varepsilon)^{\times k}.$$

Weiter sei

$$\varphi_{1,j}^{\star}(\omega) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} f_i \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i-1} \wedge \mathrm{d}y_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_k.$$

Es gilt dann (Satz 5.2.9, iv)

$$\varphi_{1,j}^{\star}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\big(\varphi_{1,j}^{\star}(\omega)\big) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_k.$$

[16] Sir George Gabriel Stokes (1819 - 1903), irischer Mathematiker und Physiker.

Mit dem Satz von Fubini 3.1.1 integrieren wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\int_{V_{1,j}} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_k \\
= &\int_{(-a_{1,j}+\varepsilon, a_{1,j}-\varepsilon)^{\times(k-1)}} \left( \int_{-a_{1,j}+\varepsilon}^{a_{1,j}-\varepsilon} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \mathrm{d}y_i \right) \mathrm{d}\mu_{k-1}(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_k).
\end{aligned}$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (17), Satz 5.3.1, ermitteln wir

$$\begin{aligned}
\int_{-a_{1,j}+\varepsilon}^{a_{1,j}-\varepsilon} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \mathrm{d}y_i &= f_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, a_{1,j} - \varepsilon, y_{i+1}, \ldots, y_k) - \\
&\quad - f_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, -a_{1,j} + \varepsilon, y_{i+1}, \ldots, y_k) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

denn die Intervallgrenzen liegen außerhalb des Trägers von $f_i$, $i = 1, \ldots, k$. Das zeigt den Satz von Stokes in dem geschilderten Spezialfall.

ii) Jetzt setzen wir voraus, dass es eine Zahl $j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M \subset V_{2,j}.$$

Es sei

$$A := \varphi_{2,j}^{-1}\left(\overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M\right).$$

Die Menge

$$A \cap \left(\{0\} \times (-a_{2,j}, a_{2,j})^{\times(k-1)}\right)$$

ist kompakt. Insbesondere folgt

$$d := \operatorname{dist}\Big(A, \left(\partial V_{2,j} \setminus \{0\} \times (-a_{2,j}, a_{2,j})^{\times(k-1)}\right)\Big) > 0.$$

Wir setzen $\varepsilon := (1/2) \cdot \min\{a_{2,j}, d\}$ und benutzen ansonsten zu Teil i) analoge Bezeichnungen. Wie in Teil i) folgt

$$\int_{V_{2,j}} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_k = 0, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Mit dem Satz von Fubini 3.1.1 berechnen wir auch

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\omega &= \int_{V_{2,j}} \mathrm{d}\varphi_j^\star(\omega) \\
&= \int_{(-a_{2,j}, a_{2,j})^{\times(k-1)}} \left( \int_{-a_{2,j}+\varepsilon}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \mathrm{d}y_1 \right) \mathrm{d}\mu_{k-1}(y_2, \ldots, y_k) \\
&= \int_{(-a_{2,j}, a_{2,j})^{\times(k-1)}} f(0, y_2, \ldots, y_k) \mathrm{d}\mu_{k-1}(y_2, \ldots, y_k) \\
&= \int_{\partial M} \omega.
\end{aligned}$$

Dabei haben wieder den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ((18), Satz 5.3.1) und die Tatsache $f(-a_{2,j} + \varepsilon, y_2, \ldots, y_n) = 0$, $(y_2, \ldots, y_k) \in (-a_{2,j}, a_{2j})^{\times(k-1)}$, angewendet.

iii) Im Allgemeinen können wir eine Teilung der Eins benutzen (Satz 5.4.1), um

$$\omega = \sum_{s=0}^{L} \xi_s \cdot \omega$$

zu schreiben. Dabei ist $\xi_s\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, und es existiert ein Index $(i_s, j_s) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}$ mit

$$\overline{\operatorname{supp}(\xi_s \cdot \omega)} \cap M \subset U_{i_s,j_s}, \quad s = 0, \dots, L.$$

Nach der Leibniz-Regel 5.2.9, ii), gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_{s=0}^{L} (\mathrm{d}\xi_s \wedge \omega + \xi_s \cdot \mathrm{d}\omega) \\ &= \sum_{s=0}^{L} \xi_s \cdot \mathrm{d}\omega + \left( \sum_{s=0}^{L} \mathrm{d}(\xi_0 + \cdots + \xi_L) \right) \wedge \omega. \end{aligned}$$

Nun gibt es nach Konstruktion der Teilung der Eins eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass

- $\overline{\operatorname{supp}(\omega)} \cap M \subset U$,
- $\forall x \in U : \xi_0(x) + \cdots + \xi_L(x) = 1$.

Damit ist $\mathrm{d}(\xi_0 + \cdots + \xi_L)$ null auf $U$. Nach i) und ii) gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \sum_{s=0}^{L} \int_{\partial M} \xi_s \cdot \omega \\ &= \sum_{s=0}^{L} \int_{M} (\xi_s \cdot \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\xi_s \wedge \omega) \\ &= \int_M \mathrm{d}\omega + \int_M \mathrm{d}(\xi_0 + \cdots + \xi_L) \wedge \omega \\ &= \int_M \mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Dies beweist den Satz von Stokes. □

**5.7.3 Folgerung.** *In der Situation von Satz 5.7.1 gelte $\partial M = \varnothing$. Dann hat man*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

*5.7.4 Beispiele.* i) Es sei

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Das ist eine glatte $(n-1)$-Form auf $\mathbb{R}^n$, die

$$\mathrm{d}\omega = n \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

erfüllt. Für jede kompakte $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand gilt nach dem Satz von Stokes

$$\operatorname{Vol}_n(M) = \frac{1}{n} \cdot \int_{\partial M} \omega.$$

Insbesondere gilt in Beispiel 5.6.8, iii),

$$\operatorname{Vol}_n\big(B(0,1)\big) = \operatorname{Vol}_n\big(\overline{B}(0,1)\big) = \frac{1}{n} \cdot \int_{S^{n-1}} \omega.$$

ii) Jetzt seien $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und

$$\sigma(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1} \cdot x_i}{\|x\|^n} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in U.$$

Das ist eine glatte $(n-1)$-Form auf $U$, und man berechnet

$$\mathrm{d}\sigma = 0.$$

Die Form $\sigma$ ist also geschlossen. Auf der anderen Seite kann sie wegen

$$\int_{S^{n-1}} \sigma = \int_{S^{n-1}} \omega \overset{\text{i)}}{=} n \cdot \mathrm{Vol}_n\big(B(0,1)\big) > 0$$

und Folgerung 5.7.3 nicht exakt sein. Auf $U$ gibt es also geschlossene Formen, die nicht exakt sind (vgl. Bemerkung 5.2.11).

iii) Es sei $a > 1$. Durch Rotation der Kreisscheibe

$$K := \left\{ (x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x_1 - a)^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$$

um die $x_3$-Achse entsteht ein Volltorus $M$. Mit Hilfe der Kugelkoordinaten ((18), Beispiel 10.2.5, iii) sehen wir, dass $M$ das Bild der Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,u,v) &\longmapsto \Big( \big(a + r \cdot \cos(v)\big) \cdot \cos(u), \big(a + r \cdot \cos(v)\big) \cdot \sin(u), r \cdot \sin(v) \Big) \end{aligned}$$

ist. Weiter ist

$$\begin{aligned} \varphi\colon (0,2\pi) \times (0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \Big( \big(a + \cos(v)\big) \cdot \cos(u), \big(a + \cos(v)\big) \cdot \sin(u), \sin(v) \Big) \end{aligned}$$

ein zweidimensionales glattes parametrisiertes Flächenstück vom Typ $\mathcal{C}^\infty$. Das Bild von $\varphi$ ist der Rand $T := \partial M$ ohne die Kreislinien „Nullmeridian" und „äußerer Äquator". Es fehlt also nur eine Nullmenge in $T$. Deshalb gilt

$$\int_T \omega = \int_{(0,2\pi)^{\times 2}} \varphi^\star(\omega).$$

Wie in Teil i) sei

$$\omega = x_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - x_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

Man berechnet (Übung)

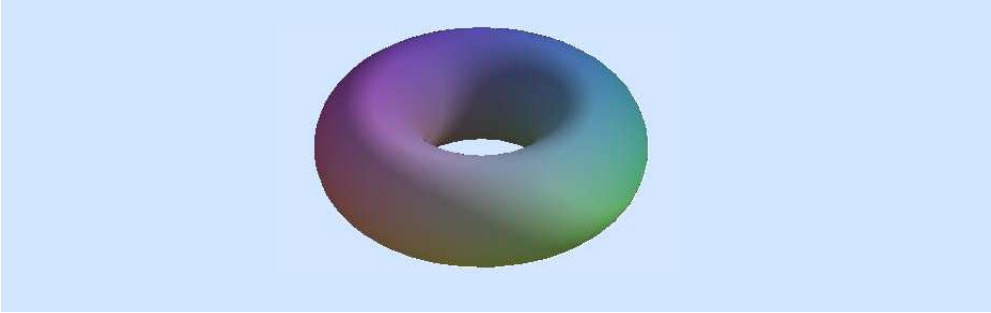
$$\varphi^\star(\omega) = \big(a + \cos(v)\big) \cdot \big(1 + a \cdot \cos(v)\big) \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_T \omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(a + \cos(v)\big) \cdot \big(1 + a \cdot \cos(v)\big) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} a \cdot \big(1 + \cos^2(v)\big) + (1 + a^2) \cdot \cos(v) \mathrm{d}v \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} a \cdot \big(1 + \cos^2(v)\big) \mathrm{d}v \\ &= 4\pi^2 \cdot a + 2\pi \cdot a \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(v) \mathrm{d}v \\ &= 6\pi^2 \cdot a. \end{aligned}$$

Aus i) folgt

$$\mathrm{Vol}_3(M) = 6\pi^2 \cdot a.$$



## 5.8 Das Volumen einer kompakten Hyperfläche

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(x) = 0 \right\}.$$

Es wird vorausgesetzt, dass

$$\forall x \in M: \quad \operatorname{Grad}(f)(x) \neq 0$$

und dass $M$ kompakt ist. Unter diesen Voraussetzungen ist $M$ eine Untermannigfaltigkeit vom Typ $\mathscr{C}^\infty$, und wir wollen mit dem zuvor entwickelten Formalismus

$$\operatorname{Vol}_{n-1}(M)$$

erklären. Als Beispiel werden wir die Oberfläche der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre bestimmen.

In der gerade beschriebenen Situation sei weiter

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \operatorname{Grad}(f)(x) \neq 0 \right\}.$$

Dies ist eine offene Menge, die nach Voraussetzung die Untermannigfaltigkeit $M$ enthält. Auf $U$ definieren wir das *Einheitsnormalenfeld*

$$\begin{aligned} \nu\colon U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{\operatorname{Grad}(f)(x)}{\|\operatorname{Grad}(f)(x)\|}. \end{aligned}$$

*5.8.1 Bemerkung.* Die folgenden Betrachtungen verlaufen analog zum Studium der dreidimensionalen Situation, Seite 110f. Nach Satz 5.1.5 gilt

$$\bigwedge^{n-1} (\mathbb{R}^n)^\star \cong \mathbb{R}^n.$$

Als Basis wählen wir

$$(-1)^{i+1} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Weiter sei

$$\operatorname{Vekt}(U) := \left\{ v\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n \,\middle|\, v \text{ ist unendlich oft differenzierbar} \right\}$$

der Vektorraum der glatten Vektorfelder auf $U$. Damit definieren wir den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \omega\colon \operatorname{Vekt}(U) &\longrightarrow \Omega^{n-1}(U) \\ v = (v_1, \ldots, v_n) &\longmapsto \omega_v := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot v_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

Mit dem in der Bemerkung erklärten Isomorphismus ordnen wir dem Einheitsnormalenfeld $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ die Differentialform

$$\omega_\nu := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \nu_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

zu.

**5.8.2 Definition.** Für die oben eingeführte kompakte Untermannigfaltigkeit $M$ ist ihr $(n-1)$-*dimensionales Volumen* als

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(M) := \int_M \omega_\nu$$

definiert.

*5.8.3 Bemerkung.* i) Als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist $M$ eine Nullmenge. (Das folgt aus der Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie, (18), Bemerkung 11.3.9, Lemma 1.5.6 und Lemma 1.5.2, ii).)

ii) Wie in Beispiel 5.3.9, iii), erklärt wurde, definiert das Vektorfeld $\nu$ eine Orientierung von $M$. Für eine Karte $\varphi\colon V \longrightarrow U$ für $M$ sei

$$\Delta_\varphi(y) := \mathrm{Det}\left(\frac{\nu\big(\varphi(y)\big)}{J_\varphi(y)^t}\right), \quad y \in V.$$

Wenn $\varphi$ orientiert ist, gilt

$$\forall y \in V: \quad \Delta_\varphi(y) > 0.$$

Aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz für Determinanten (4), Abschnitt 4.3.5, und Satz 5.2.5, iv), folgert man

$$\varphi^\star(\omega_\nu) = \Delta_\varphi \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{n-1}.$$

Nach Beispiel 4.4 ist $\Delta_\varphi(y)$ das Volumen des Parallelotops, das von $\nu(\varphi(y))$ und den Zeilen von $J_\varphi(y)^t$ aufgespannt wird, $y \in V$. Da

- $\nu\big(\varphi(y)\big) \perp T_{\varphi(y)}M$,
- $\big\|\nu\big(\varphi(y)\big)\big\| = 1$,
- und $T_{\varphi(y)}M$ der von den Zeilen von $J_\varphi(y)^t$ erzeugte Unterraum ist,

stimmt $\Delta_\varphi(y)$ auch mit dem $(n-1)$-dimensionalen Volumen des von den Zeilen von $J_\varphi(y)^t$ im $\mathbb{R}^{n-1}$ aufgespannten Parallelotops überein, $y \in V$.

Die Zahl $\Delta_\varphi(y)$ ist also der Faktor, um den sich das Volumen des infinitesimalen Einheitswürfels in $\mathbb{R}^{n-1}$ unter der Abbildung $\varphi$ vergrößert. Das motiviert anschaulich die Definition des Volumens.

Man vergleiche Definition 5.8.2 mit der Bogenlänge eines stetig differenzierbaren Wegs (in $\mathbb{R}^2$) in (18), Satz 4.3.2.

*5.8.4 Beispiel.* Es sei

$$S^{n-1} := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\}$$

die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre. In diesem Fall gilt $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, und für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ hat man

$$\omega_\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1} \cdot x_i}{\|x\|} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Mit der Form $\omega$ aus Beispiel 5.7.4, i), sehen wir

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{-1}) = \int_{S^{n-1}} \omega_\nu = \int_{S^{n-1}} \omega = n \cdot \mathrm{Vol}_n\big(B(0,1)\big).$$

Das Volumen $\mathrm{Vol}_n(B(0,1))$ wurde in Beispiel 3.3.5, ii), bestimmt. Für kleine Dimensionen ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} \mathrm{Umfang}(S^1) &= 2\pi, \\ \mathrm{Oberfläche}(S^2) &= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi, \\ \mathrm{Volumen}(S^3) &= 4 \cdot \frac{1}{2!}\pi^2 = 2\pi^2. \end{aligned}$$

## 5.9 Der Igelkämmungssatz

Wir beschließen die Ausführungen zur Integralrechnung mit einer klassischen Anwendung des Satzes von Stokes:

**Igelkämmungssatz.** *Jeder stetig gekämmte Igel hat einen Glatzpunkt.*

Beim obigen Satz stellt man sich den Igel zur Kugel zusammengerollt vor. Die Kämmung bedeutet, dass jeder Stachel tangential an den Igel, d.h. die Kugel, anliegt. Deshalb lautet die mathematische Formulierung des Igelkämmungssatzes:

**5.9.1 Satz.** *Es sei*

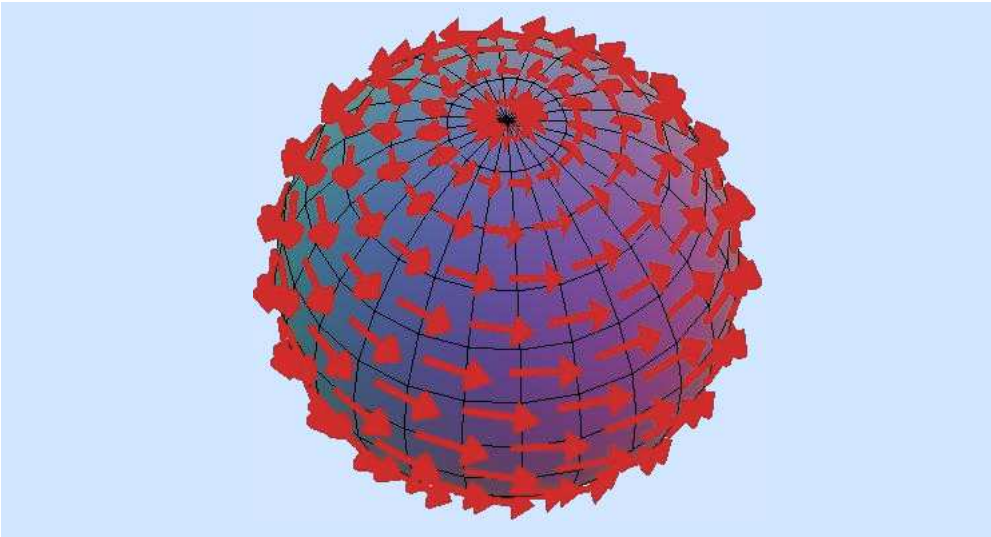
$$v\colon S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

*eine stetige Abbildung, so dass*

$$\forall x \in S^2 : \quad x \perp v(x).$$

*Dann existiert ein Punkt $x_0 \in S^3$ mit*

$$v(x_0) = 0.$$



*5.9.2 Bemerkung.* Die Bedingung $x \perp v(x)$ besagt, dass $v(x)$ im Tangentialraum $T_xS^2$ an $S^2$ im Punkt $x$ liegt, $x \in S^2$. Eine Abbildung $v\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt aus der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ einen Tangentialvektor $v(x) \in T_xM$ zuordnet, nennt man ein *Vektorfeld auf M*. Der Satz besagt also, dass jedes stetige Vektorfeld auf $S^2$ eine Nullstelle hat. Wir werden den Satz weiter unten unter der zusätzlichen Annahme beweisen, dass $v$ unendlich oft differenzierbar ist.

## Diffeotopie von Abbildungen

**5.9.3 Definition.** Es seien $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $f_i\colon U \longrightarrow V$, $i = 0, 1$, zwei unendlich oft differenzierbare Abbildungen. Wir sagen, dass $f_1$ und $f_2$ *diffeotop* sind, wenn es eine unendlich oft differenzierbare Abbildung

$$F\colon U \times \mathbb{R} \longrightarrow V$$

mit

$$F_{|U\times\{0\}} = f_0 \quad \text{und} \quad F_{|U\times\{1\}} = f_1$$

gibt.[17] Man nennt $F$ in diesem Fall eine *Diffeotopie zwischen $f_0$ und $f_1$*.

Es soll also eine einparametrige Familie $f_t := F(t,\cdot)\colon U \longrightarrow V$, $t \in \mathbb{R}$, von unendlich oft differenzierbaren Abbildungen von $U$ nach $V$ geben, in der $f_0$ und $f_1$ vorkommen. Dabei hängen die Abbildungen dieser Familie unendlich oft differenzierbar von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ ab. Die Abbildung $f_0$ lässt sich also in die Abbildung $f_1$ „deformieren" und umgekehrt.

*5.9.4 Bemerkung.* Diffeotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der unendlich oft differenzierbaren Abbildungen $f\colon U \longrightarrow V$.

*5.9.5 Beispiel.* Jede unendlich oft differenzierbare Abbildung $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist zur Nullabbildung diffeotop. Eine mögliche Diffeotopie ist

$$\begin{aligned} F\colon U \times \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ (x,t) &\longmapsto t \cdot f(x). \end{aligned}$$

**5.9.6 Satz** (Diffeotopieinvarianz des Integrals)**.** *Es seien $M \subset \mathbb{R}^m$ eine orientierte p-dimensionale* ***kompakte*** *Untermannigfaltigkeit* ohne Rand *vom Typ $\mathscr{C}^\infty$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, so dass $M \subset U$, $\omega \in \Omega^p(V)$ eine* ***geschlossene*** *glatte p-Form auf V und $f_i\colon U \longrightarrow V$, $i = 0, 1$, zwei unendlich oft differenzierbare Abbildungen. Wenn $f_0$ und $f_1$* ***diffeotop*** *sind, dann gilt*

$$\int_M f_0^\star(\omega) = \int_M f_1^\star(\omega).$$

*Beweis.* Wir betrachten $M \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Das ist eine orientierbare kompakte $(p+1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$. Wenn wir $M \times [0,1]$ mit einer Orientierung versehen und $M \times \{0\}$ und $M \times \{1\}$ auf die kanonische Art mit $M$ identifizieren, dann sind die auf $M \times \{0\}$ und $M \times \{1\}$ induzierten Orientierungen entgegengesetzt zueinander. Wir orientieren $M \times [0,1]$ so, dass auf $M \times \{1\}$ die Orientierung von $M$ induziert wird.

Es sei

$$F\colon U \times \mathbb{R} \longrightarrow V$$

[17] Dabei werden $U \times \{0\}$ und $U \times \{1\}$ auf die offensichtliche Art und Weise mit $U$ identifiziert.

eine Diffeotopie zwischen $f_0$ und $f_1$. Da $\omega$ als geschlossen vorausgesetzt wird, gilt

$$\int_{M\times[0,1]} \mathrm{d}\big(F^\star(\omega)\big) \overset{\text{Satz 5.2.9, iv)}}{=} \int_{M\times[0,1]} F^\star(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

Auf der anderen Seite gilt nach dem Satz von Stokes 5.7.1

$$\int_{M\times[0,1]} \mathrm{d}\big(F^\star(\omega)\big) = \int_{M\times\{1\}} F^\star(\omega) + \int_{M\times\{0\}} F^\star(\omega) = \int_M f_1^\star(\omega) - \int_M f_0^\star(\omega).$$

Die Kombination der beiden Gleichungen liefert die Behauptung. □

## Beweis des Igelkämmungssatzes

Wir zeigen folgende Aussage, die den Igelkämmungssatz für unendlich oft differenzierbare Vektorfelder verallgemeinert.

**5.9.7 Satz.** *Es seien $k \geq 1$ und*

$$v\colon S^{2k} \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$$

*eine unendlich oft differenzierbare Abbildung, so dass*

$$\forall x \in S^{2k}: \quad x \perp v(x).$$

*Dann existiert ein Punkt $x_0 \in S^{2k}$ mit*

$$v(x_0) = 0.$$

*5.9.8 Bemerkung.* Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{array}{rcl} v\colon S^{2k+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2k+2} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, x_{2k+2}) & \longmapsto & (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k+2}, -x_{2k+1}) \end{array}$$

ein unendlich oft differenzierbares Vektorfeld ohne Nullstelle.

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

**5.9.9 Hilfssatz.** *Es seien $k \geq 1$ und $U \subset \mathbb{R}^{2k+1} \setminus \{0\}$ eine offene Menge, die $S^{2k}$ enthält. Dann sind die Abbildungen $\iota\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1} \setminus \{0\}$, $x \longmapsto x$, und $-\iota$ nicht diffeotop.*

*Beweis.* Für jede glatte $(2k)$-Form $\omega$ auf $U$, jeden Punkt $x \in U$ und Vektoren $v_1, \ldots, v_{2k} \in \mathbb{R}^{2k+1}$ gilt

$$\begin{aligned} (-\iota)^\star(\omega)(x)(v_1, \ldots, v_{2k}) &= \omega(-x)(-v_1, \ldots, -v_{2k}) \\ &= (-1)^{2k} \cdot \omega(-x)(v_1, \ldots, v_{2k}) \\ &= \omega(-x)(v_1, \ldots, v_{2k}). \end{aligned}$$

Die Form $\sigma \in \Omega^{2k}(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\})$ aus Beispiel 5.7.4, ii), mit

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{2k} \frac{(-1)^{i+1} x_i}{\|x\|^{2k+1}} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{2k+1}, \; x = (x_1, \ldots, x_{2k+1}) \in U,$$

ist geschlossen und erfüllt

$$\sigma(-x) = (-1)^{2k+1} \cdot \sigma(x) = -\sigma(x), \quad x \in U.$$

Wären $\iota$ und $-\iota$ diffeotop, so müsste nach Satz 5.9.6

$$\int_{S^{2k}} \sigma = \int_{S^{2k}} \iota^\star(\sigma) = \int_{S^{2k}} (-\iota)^\star(\sigma) = \int_{S^{2k}} (-\sigma) = -\int_{S^{2k}} \sigma$$

gelten. Da aber nach Beispiel 5.7.4, i),

$$\int_{S^{2k}} \sigma = (2k+1) \cdot \mathrm{Vol}_{2k+1}\big(B(0,1)\big) > 0,$$

ist das offenbar unmöglich. □

**5.9.10 Hilfssatz.** *Es seien $k, m, n \geq 1$, $M \subset \mathbb{R}^m$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $v\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine unendlich oft differenzierbare Abbildung. Dann existiert eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $\widetilde{v}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\widetilde{v}_{|M} = v$.*

*Beweis.* Der Begriff einer unendlich oft differenzierbaren Abbildung $v\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ wurde in (18), Definition 11.5.3 und Bemerkung 11.5.6, definiert. Aus (18), Bemerkung 11.3.9, ii), und Hilfssatz 5.4.2 folgt, dass es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $x \in U \subset M$ gibt, so dass sich $v_{|U}$ zu einer unendlich oft differenzierbaren Abbildung $\widetilde{v}_U\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fortsetzen lässt. Mit Hilfe einer Teilung der Eins 5.4.1 kann man aus den lokalen Fortsetzungen eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $\widetilde{v}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ konstruieren, die $v$ fortsetzt. □

*Beweis von Satz 5.9.7.* Wir nehmen an, es gäbe eine Abbildung $v\colon S^{2k} \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ mit den genannten Eigenschaften. Nach Hilfssatz 5.9.10 gibt es eine Fortsetzung $\widetilde{v}\colon \mathbb{R}^{2k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$. Nun definieren wir

$$\begin{aligned} \widetilde{F}\colon \mathbb{R}^{2k+2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1} \\ (x,t) &\longmapsto \cos(\pi \cdot t) \cdot x + \sin(\pi \cdot t) \cdot \widetilde{v}(x). \end{aligned}$$

Für $x \in S^{2k}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $\widetilde{F}(x,t) \in S^{2k}$. Damit ist $\widetilde{U} := \widetilde{F}^{-1}(\mathbb{R}^{2k+1} \setminus \{0\})$ eine offene Teilmenge, die die kompakte Untermannigfaltigkeit $S^{2k} \times \mathbb{R} = S^{2k} \times [-1,1]$ enthält. Es seien

$$\varepsilon := \mathrm{dist}\Big(\big(S^{2k} \times [-1,1]\big), \big(\mathbb{R}^{2k+1} \setminus \widetilde{U}\big)\Big) > 0$$

und

$$U := \Big\{ x \in \mathbb{R}^{2k+1} \,\Big|\, \mathrm{dist}(x, S^{2k}) < \varepsilon \Big\}.$$

Nach Konstuktion ist $U \times \mathbb{R}$ in $\widetilde{U}$ enthalten. Die Abbildung

$$F := \widetilde{F}_{|U \times \mathbb{R}}\colon U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1} \setminus \{0\}$$

stellt eine Diffeotopie zwischen der Abbildung $\iota\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1} \setminus \{0\}$, $x \longmapsto x$, und $-\iota$ dar, die es nach Hilfssatz 5.9.9 nicht geben kann. □

# Die Aufgabenblätter

## Blatt 1

Aufgabe A.1.1 (Treppenfunktionen I).
a) Es sei $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Unter welchen Voraussetzungen ist i) $x \longmapsto \sin(\varphi(x))$ bzw. ii) $x \longmapsto \varphi(\sin(x))$ eine Treppenfunktion?
b) Geben Sie eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $\varphi_k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, an, die punktweise gegen Null konvergiert, und

$$\lim_{k\to\infty} I(\varphi_k) = \infty$$

erfüllt.

Aufgabe A.1.2 (Treppenfunktionen II).
Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Zeigen Sie, dass es eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\varphi_k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, gibt, die monoton wächst, d.h. $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, und auf $[a,b]$ **gleichmäßig** gegen $f$ konvergiert.

Aufgabe A.1.3 (Treppenfunktionen und angepasste Zerlegungen).
a) Es seien $\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ zwei an $\varphi$ angepasste Zerlegungen. Beweisen Sie, dass

$$\underline{Z}_1 \preceq \underline{Z}_2$$

die Gleichung

$$I(\varphi, \underline{Z}_1) = I(\varphi, \underline{Z}_2)$$

impliziert.

b) Es seien $\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, $\underline{Z}$ eine an $\varphi$ angepasste Zerlegung und $\underline{Z}' \preceq \underline{Z}$ eine Verfeinerung von $\underline{Z}$. Zeigen Sie, dass $\underline{Z}'$ ebenfalls an $\varphi$ angepasst ist.

Aufgabe A.1.4 (Halbnormen und das Hausdorff-Axiom).
Es seien $V$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm auf $V$. Der Raum $V$ wird mit der durch $\|\cdot\|$ induzierten Topologie versehen. Es seien $v_1 \neq v_2$ zwei Punkte, so dass $\|v_1 - v_2\| = 0$. Zeigen Sie, dass für jede offene Teilmenge $U \subset V$ gilt:

$$v_1 \in U \quad \Longleftrightarrow \quad v_2 \in U.$$

Schließen Sie, dass $V$ kein Hausdorff-Raum ist.

# Blatt 2

Aufgabe A.2.1 (Das Minkowski[18]-Funktional).
Es seien $V$ ein reeller Vektorraum und $A \subset V$ eine Teilmenge. Wir definieren[19]

$$\begin{aligned} p_A \colon V &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ v &\longmapsto \inf\left\{ \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \,\middle|\, \frac{1}{\lambda} \cdot v \in A \right\}. \end{aligned}$$

Die Teilmenge $A$ heißt *absorbierend*, wenn $p_A(v) < \infty$ für alle $v \in V$ gilt.

a) Die Menge $A$ sei **absorbierend** und **konvex**. Zeigen Sie, dass $p_A$ folgende Eigenschaften hat:

- $\forall \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0} \forall v \in V : p_A(\mu \cdot v) = \mu \cdot p_A(v)$.
- $\forall v, w \in V : p_A(v + w) \leq p_A(v) + p_A(w)$.
- Falls für alle $a \in A$ und alle $\lambda \in [-1, 1]$ auch $\lambda \cdot a \in A$ folgt,[20] dann ist $p_A$ eine Halbnorm.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen Vektorraum $V$ und Teilmengen $A_1, A_2 \subset V$ an, die absorbierend, konvex und kreisförmig sind, so dass $p_{A_1}$ eine Norm ist und $p_{A_2}$ nicht.

Aufgabe A.2.2 (Hüllreihen für $\chi_{\mathbb{Q}}$).
Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ offene Intervalle $I_k \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, gibt, so dass

- $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$,
- $\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k) < \varepsilon$.

Sie dürfen nur die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und Aussagen über Reihen aus der Analysis I verwenden.

Aufgabe A.2.3 ($\mathcal{L}^1$-Halbnormen).
a) Es sei

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ \infty, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \text{ oder } x > 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Beweisen Sie $\|f\|_1 < \infty$.

b) Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei monoton wachsend oder fallend. Zeigen Sie, dass genau dann $\|f\|_1 < \infty$ gilt, wenn $f = 0$.

Aufgabe A.2.4 (Eine überabzählbare Nullmenge).
Es sei $A \subset [0, 1]$ die Menge aller Zahlen, die eine Dezimalbruchentwicklung ohne Null nach dem Komma haben, i.e.

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \,\middle|\, a_k \in \{1, \ldots, 9\} \right\}.$$

[18] Hermann Minkowski (1864 - 1909), deutscher Mathematiker und Physiker

[19] Hier benutzen wir $\inf(\varnothing) = \infty$.

[20] Man nennt $A$ dann *kreisförmig*. Wenn $A$ wie hier konvex ist, genügt es zu fordern, dass aus $a \in A$ auch $-a \in A$ folgt.

a) Zeigen Sie, dass $A$ überabzählbar ist.
b) Es seien $B_0 := \{0\}$,

$$B_n := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \,\middle|\, a_k \in \{1, \ldots, 9\} \right\}, \quad n \geq 1,$$

und

$$B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Weiter sei für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in B_n$

$$I_x := \left( x, x + \frac{1}{10^{n+1}} \right).$$

Überprüfen Sie folgende Eigenschaften:

- Für $m \neq n$ gilt $B_m \cap B_n = \varnothing$.
- Für $x, y \in B$ mit $x \neq y$ gilt $I_x \cap I_y = \varnothing$.
- Für $x \in B$ gilt $I_x \cap A = \varnothing$.

c) Zeigen Sie, dass

$$C_n := [0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{x \in B_k} I_x$$

für jedes $n \geq 0$ die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Intervalle ist und

$$A \subset C_n$$

gilt. Beweisen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \left( 1 - \sum_{k=0}^{n} \sum_{x \in B_k} l(I_x) \right) = 0.$$

## Blatt 3

Aufgabe A.3.1 (Gleichmäßige Konvergenz).
Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so dass $\chi_M$ intergrierbar ist, und $(f_k \colon M \longrightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von über $M$ integrierbaren Funktionen. Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiere **gleichmäßig** gegen die Funktion $f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f$ ebenfalls über $M$ integrierbar ist und

$$\int_M f \mathrm{d}\mu_n = \lim_{k \to \infty} \int_M f_k \mathrm{d}\mu_n$$

gilt.

Aufgabe A.3.2 (Reihen integrierbarer Funktionen).
Gegeben seien integrierbare Funktionen $f_k \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 < \infty.$$

Zeigen Sie, dass eine integrierbare Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass

- $\int f \mathrm{d}\mu_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n$,
- fast überall $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gilt.

Aufgabe A.3.3 (Hyperebenen als Nullmengen).
Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Hyperebene*

$$H(i, a) := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_i = a \right\}.$$

a) Geben Sie zu $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von **offenen** Quadern an, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_k) < \varepsilon \quad \text{und} \quad H(i, a) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k.$$

b) Es seien $(i_k, a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $i_k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$N := \bigcup_{k=0}^{\infty} H(i_k, a_k).$$

Zeigen Sie, dass es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von offenen Quadern mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(Q_k) < \varepsilon \quad \text{und} \quad N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$$

gibt.

Aufgabe A.3.4 (Fast überall null).
Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion, so dass $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie, dass $f$ die Nullfunktion ist.

Aufgabe A.3.5 (Bilder von Nullmengen).
a) Es seien $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, $f \colon N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $C > 0$. Es wird angenommen, dass $f$ die *Lipschitz-Bedingung zur Lipschitz-Konstanten C* erfüllt, d.h.[21]

$$\forall x, y \in N: \quad \|f(x) - f(y)\| \leq C \cdot \|x - y\|.$$

Beweisen Sie, dass $f(N)$ eine Nullmenge ist.
b) Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine **stetig differenzierbare** Abbildung. Zeigen Sie, dass $f(N)$ für jede Nullmenge $N \subset U$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe A.3.6 (Messbare Mengen).
Gegeben seien Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\chi_{M_k}$ integrierbar ist, $k \in \mathbb{N}$, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(M_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \|\chi_{M_k}\|_1 < \infty.$$

Zeigen Sie, dass für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$E_x := \left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, x \in M_k \right\}$$

eine endliche Menge ist.

[21] Dabei steht $\|\cdot\|$ wie üblich für die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$.

# Blatt 4

Aufgabe A.4.1 (Integrierbarkeit).
Es seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass auch die Funktionen

$$\max\{f, g\} \quad \text{und} \quad \min\{f, g\}$$

in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ liegen.

Aufgabe A.4.2 (Zum Satz von Beppo Levi).
a) Es sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so dass

- für $k \in \mathbb{N}$ fast überall $f_k \geq 0$ gilt,
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n$ konvergiert.

Beweisen Sie die Existenz einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so dass

- $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt,
- $\displaystyle\int f \mathrm{d}\mu_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n$.

b) Es sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int |f_k| \mathrm{d}\mu_n$$

konvergiert. Weisen Sie die Existenz einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ nach, so dass

- $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt,
- $\displaystyle\int f \mathrm{d}\mu_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k \mathrm{d}\mu_n$.

Aufgabe A.4.3 (Zum Lebesgueschen Konvergenzsatz).
a) Gegeben seien eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gelte

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x),$$

und es gebe eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zu zeigen ist, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ folgt.
b) Worin unterscheidet sich die Aussage in a) vom Lebesgueschen Konvergenzsatz?

Aufgabe A.4.4 (Anwendungen der Konvergenzsätze).
a) Es ist zu überprüfen, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \log(x), & \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Lebesgue-integrierbar ist.
b) Untersuchen Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

auf ihre Lebesgue-Integrierbarkeit.
c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$$

existiert, die Funktion $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(x^2)$, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

## Blatt 5

Aufgabe A.5.1 (Nullmengen und integrierbare Funktionen).
a) Geben Sie für jedes $m > 0$, $n > 0$ nichtleere Nullmengen $A$, $B$ in $\mathbb{R}^{m+n}$ an, so dass i) $A_y := \pi_1(A \cap (\mathbb{R}^m \times \{y\}))$ für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist und ii) Punkte $y \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $B_y := \pi_1(B \cap (\mathbb{R}^m \times \{y\}))$ **keine** Nullmenge ist. Dabei ist $\pi_1\colon \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ die Projektion.
b) Warum ist jede Nullmenge endlich messbar?
c) Zeigen Sie: Es seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Wenn $g$ beschränkt ist, dann ist auch $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe A.5.2 (Der Satz von Fubini für Treppenfunktionen).
Beweisen Sie den Satz von Fubini für Treppenfunktionen. (Sie dürfen natürlich nur diejenigen Aussagen aus der Vorlesung verwenden, die vor dem Satz von Fubini bewiesen wurden.)

Aufgabe A.5.3 (Graphen von Funktionen).
Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *messbar*, wenn $A \cap K$ für jede kompakte Teilmenge $K$ von $\mathbb{R}^n$ endlich messbar ist.
a) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ genau dann messbar ist, wenn $A \cap Q$ für jeden kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ endlich messbar ist.
b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass ihr Graph

$$\Gamma_f := \left\{ \big(x, f(x)\big) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

messbar ist. Beweisen Sie, dass $\Gamma_f$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe A.5.4 (Integration mit Fubini).
a) Erklären Sie in den folgenden Beispielen, warum $f$ über $A$ integrierbar ist, und berechnen Sie jeweils das Integral.

i) $A := \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \sin(x+2y)$.

ii) $A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x < 1,\ x^3 \leq y \leq x^2 \right\}$, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^2 - y^2$.

iii) $A := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 \right\}$, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto \sqrt{z - y^2}$.

b) Es seien $A := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ und

$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \exp(y^2), & \text{falls } x < y \\ 0, & \text{falls } x \geq y \end{cases} \end{array}.$$

Zeigen Sie, dass $f$ über $A$ integrierbar ist, und versuchen Sie mit den beiden möglichen Integrationsreihenfolgen das Integral auszuwerten.

## Blatt 6

Aufgabe A.6.1 (Flächenberechnung mit Cavalieri).
a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ positive reelle Zahlen und

$$A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

- Warum ist $A$ endlich messbar?
- Skizzieren Sie $A$ für die Werte $a = 1$ und $b = 2$.
- Bestimmen Sie für $y \in \mathbb{R}$ die Menge $A_y = \{ x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A \}$.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{Vol}_2(A)$ mit dem Satz von Cavalieri.

b) Es sei

$$A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \wedge \big(x \leq 0 \vee |y| \leq x\big) \right\}.$$

- Warum ist $A$ endlich messbar?
- Skizzieren Sie $A$.
- Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Menge $A_x = \{ y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A \}$.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{Vol}_2(A)$ mit dem Satz von Cavalieri.

Aufgabe A.6.2 (Rotationskörper).
a) Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit

$$0 \leq f \leq g.$$

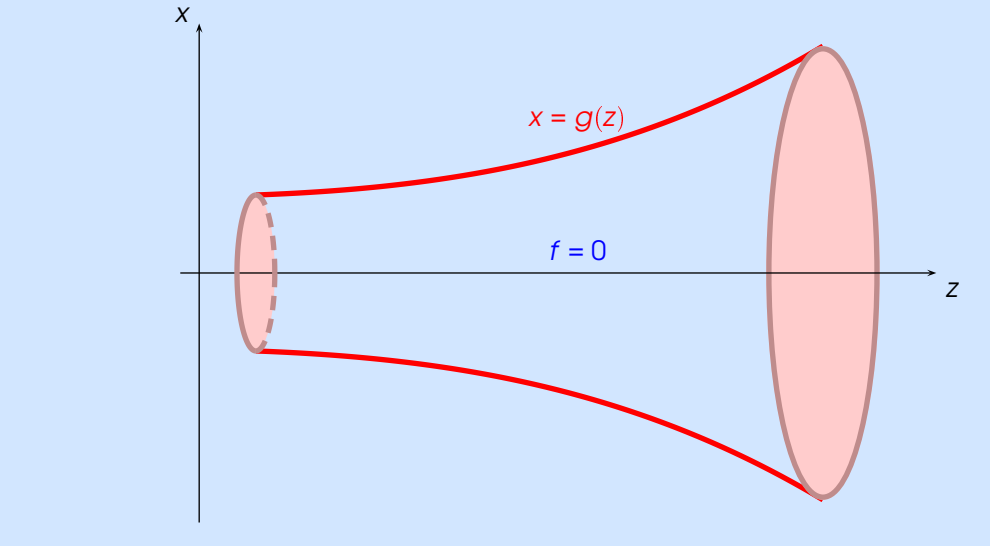
Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, f(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq g(z),\ a \leq z \leq b \right\}$$

endlich messbar ist und das Volumen

$$\mathrm{Vol}_3(A) = \pi \cdot \int_a^b \big(g(z)^2 - f(z)^2\big)\,\mathrm{d}z$$

hat.




b) Es seien $s \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl und

$$A := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{z^s},\ 1 \leq z \right\}.$$

- Für welche Werte von $s$ ist $A$ endlich messbar?
- Bestimmen Sie für diese Werte $\mathrm{Vol}_3(A)$.

Aufgabe A.6.3 (Volumenberechnung mit Cavalieri).
a) Es sei

$$A := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sqrt{\left(x-\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2 + \left(y-\sin\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2} \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4\pi \right\}.$$

Skizzieren Sie $A$, und bestimmen Sie das Volumen von $A$ mit dem Prinzip von Cavalieri.
b) Es seien

$$A := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \right\}$$

und

$$B := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Skizzieren Sie $A \cap B$, und berechnen Sie $\mathrm{Vol}_3(A \cap B)$ mit dem Prinzip von Cavalieri.

Aufgabe A.6.4 (Integration).
a) Es sei

$$\begin{aligned} f\colon [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}.$$

Bestimmen Sie die beiden Integrale

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

und interpretieren Sie das Ergebnis.
b) Untersuchen Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [-1,1]\times[-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

auf Integrierbarkeit.
c) Benutzen Sie den Satz von Tonelli, um zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} x^2\cdot\exp(-xy), & \text{falls } 0\leq x\leq y \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases} \end{aligned}$$

integrierbar ist.

# Blatt 7

Aufgabe A.7.1 (Charakterisierungen alternierender Formen).
Es seien $p\in\mathbb{N}$, $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und

$$\omega\colon V^{\times p}\longrightarrow\mathbb{R}$$

eine multilineare Abbildung.
a) Zeigen Sie, dass $\omega$ genau dann alternierend ist, wenn gilt:

$$\forall v_1,\dots,v_p\in V:\quad \exists 1\leq i<j\leq p: v_i=v_j \quad\Rightarrow\quad \omega(v_1,\dots,v_p)=0.$$

b) Beweisen Sie, dass $\omega$ genau dann alternierend ist, wenn gilt:

$$\forall v_1,\dots,v_p\in V:\quad v_1,\dots,v_p \text{ linear abhängig} \quad\Rightarrow\quad \omega(v_1,\dots,v_p)=0.$$

Insbesondere gibt es für $p>\dim_{\mathbb{R}}(V)$ keine alternierenden $p$-Formen auf $V$.

Aufgabe A.7.2 (Rechnen mit Differentialformen).
a) Bestimmen Sie $\alpha\wedge\beta$ für die Formen

$$\begin{aligned} \alpha &:= y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \\ \beta &:= \mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z \end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^3$.
b) Berechnen Sie $\mathrm{d}\omega$ für die folgenden Differentialformen auf $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^n$:

- $\omega := (x^2+y^2)\mathrm{d}x + \sin(z)\mathrm{d}z$,
- $\omega := x^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - x\cos(z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$,
- $\omega := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\cdot x_i\cdot\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i-1}\wedge\mathrm{d}x_{i+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$.

Aufgabe A.7.3 (Rücktransport von Differentialformen).
a) Es sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{>0}\times(0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{R}^3\setminus\left(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}\times\mathbb{R}\right) \\ (r,\varphi,\vartheta) &\longmapsto \big(r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)\big). \end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$f^\star\big(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\big) = r^3 \cdot \cos(\vartheta)\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}\vartheta.$$

b) Gegeben sind

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (uv, u^2, 3u+v) \end{array}$$

und

$$\omega = xy\mathrm{d}x + 2z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z.$$

Berechnen Sie

$$f^\star(\mathrm{d}\omega) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\big(f^\star(\omega)\big).$$

c) Es seien

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) & \longmapsto & (u, v-uw, vw) \end{array}$$

und

$$\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \sin(y)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - \cos(z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Geben Sie

$$f^\star(\mathrm{d}\omega) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\big(f^\star(\omega)\big)$$

an.

**Achtung.** Gehen Sie in b) und c) die beiden natürlichen Rechenwege, d.h. berechnen Sie einmal zunächst $f^\star(\omega)$ und dann $\mathrm{d}(f^\star(\omega))$ und einmal zuerst $\mathrm{d}(\omega)$ und dann $f^\star(\mathrm{d}(\omega))$.

Aufgabe A.7.4 (Partielle Differentiation und Integration; 3+4+3 Bonuspunkte). Es seien $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $u \in U$ sei

$$\begin{array}{rcl} {}_uf\colon \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(u,x), \end{array}$$

und für $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\begin{array}{rcl} {}_xf\colon U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & f(u,x). \end{array}$$

Schließlich sei

$$\begin{array}{rcl} F\colon U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int {}_uf(x)\mathrm{d}\mu_n(x). \end{array}$$

Es wird vorausgesetzt, dass ${}_uf$ für alle $u \in U$ integrierbar ist.

a) Zeigen Sie:

*Es sei $u_0 \in U$, so dass die Funktion ${}_xf$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ in $u_0$ stetig ist. Weiter sei die Familie $({}_uf,\ u \in U)$ L-beschränkt. Dann ist $F$ in $u_0$ stetig.*

b) Beweisen Sie:

*Es sei $j \in \{1, \ldots, m\}$, so dass die Funktion $f$ partiell nach $u_j$ differenzierbar ist, und die Familie*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}(u,\cdot),\ u \in U\right)$$

*sei L-beschränkt. Dann ist F partiell nach $u_j$ differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}(u) = \int \frac{\partial f}{\partial u_j}(u,x)\mathrm{d}\mu_n(x).$$

c) Folgern Sie aus a) und b) die Behauptung:

*Es seien $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge sowie $f\colon U \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion ${}_uf$ sei für jedes $u \in U$ über $K$ integrierbar, und $f$ sei nach $u_1,\ldots,u_m$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist*

$$\begin{aligned} F\colon U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_K {}_uf(x)\mathrm{d}\mu_n(x) \end{aligned}$$

*stetig partiell differenzierbar mit*

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}(u) = \int_K \frac{\partial f}{\partial u_j}(u,x)\mathrm{d}\mu_n(x), \quad u \in U,\ j = 1,\ldots,m.$$

**Bemerkung.** Diese Aussage wird in der folgenden Aufgabe benötigt.

Aufgabe A.7.5 (Das Lemma von Poincaré; 2+6+2 Bonuspunkte).
Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist *sternförmig bzgl.* $x_0$, wenn gilt:

$$\forall x \in U \forall \lambda \in [0,1]: \quad \lambda \cdot x_0 + (1-\lambda)\cdot x \in U,$$

d.h. mit $x$ ist auch die Verbindungsstrecke von $x$ und $x_0$ in $U$ enthalten.
Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ ein bzgl. 0 sternförmiges Gebiet, $1 \le p \le n$ und

$$\omega(x) = \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} a_I(x)\mathrm{d}x_I$$

eine Differentialform auf $U$. Weiter sei

$$P(\omega)(x) := \sum_{I \in \mathcal{I}_{p,n}} \int_0^1 t^{p-1} \cdot a_I(t\cdot x)\mathrm{d}t \cdot \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \cdot x_{i_j} \cdot \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{j-1}} \wedge \mathrm{d}x_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}.$$

a) Geben Sie $P(\omega)$ für eine 1-Form $\omega = a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2 + a_3\mathrm{d}x_3$ und eine 2-Form $\omega = a_{12}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + a_{13}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + a_{23}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ auf $\mathbb{R}^3$ an.
b) Es seien $U$ ein bzgl. 0 sternförmiges Gebiet, $1 \le p \le n$ und $\omega$ eine $p$-Form auf $U$. Beweisen Sie:

$$\omega = P(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}P(\omega).$$

c) Schließen, dass auf einem sternförmigen Gebiet jede geschlossene Form exakt ist.

# Literaturhinweise


(1) M. Barner, F. Flohr, *Analysis* II., 2., bearb. Aufl., de Gruyter Lehrbuch, Berlin etc.: Walter de Gruyter, 1989, 449 S.

(2) O. Deiser, *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo*, 3. überarb. Aufl., Springer-Lehrbuch, Berlin: Springer, 2010, 551 S. ISBN 978-3-642-01444-4/pbk; ISBN 978-3-642-01445-1/ebook.

(3) E. K. van Douwen, *Fubinis theorem for null sets*, Am. Math. Mon. **96**, 718-21 (1989).

(4) G. Fischer, *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanänger*, 16. überarb. und erw. Aufl., Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik, Wiesbaden: Vieweg, 2008, xxii+384 S. ISBN 978-3-8348-0428-0.

(5) O. Forster, *Analysis 3: Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im* $\mathbb{R}^n$ *und Anwendungen*, 6. überarb. und erw. Aufl., Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011, viii+305 S. ISBN 978-3-8348-1232-2/pbk.

(6) U. Friedrichsdorf, A. Prestel, *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg Studium, Grundkurs Mathematik, Braunschweig/Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn, 1985, vi+103 S. ISBN 3-528-07258-X.

(7) K. Fritzsche, *Grundkurs Analysis 2 - Differentiation und Integration in mehreren Vernderlichen. Für Bachelor und Diplom.* Heidelberg: Elsevier/Spektrum Akademischer Verlag, 2006, viii+366 S. ISBN 978-3-8274-1687-2/pbk

(8) H. Herrlich, *Axiom of choice*, Lecture Notes in Mathematics **1876**, Berlin: Springer, 2006, xiv+194 S. ISBN 3-540-30989-6/pbk.

(9) Th.J. Jech, *The axiom of choice*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **75**, Amsterdam–London: North-Holland Publishing Company, 1973, xi+202 S.

(10) A. Kanamori, *The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings*, Paperback reprint of the 2003 second edition, Springer Monographs in Mathematics, Berlin: Springer, 2009, xxii+536 S. ISBN 978-3-540-88866-6/pbk.

(11) K. Königsberger, *Analysis 2*, 5., korrigierte Aufl., Springer-Lehrbuch, Berlin: Springer, 2004, xii+459 S. ISBN 3-540-20389-3/pbk

(12) H.H. Körle, *Die phantastische Geschichte der Analysis. Ihre Probleme und Methoden seit Demokrit und Archimedes. Dazu die Grundbegriffe von heute.*, München, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2009, xiv+217 S. ISBN 978-3-486-58825-5/pbk.

(13) K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **102**, Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland, xvi+313 S.

(14) J. Mycielski, S. Swierczkowski, *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness*, Fundam. Math. **54** (1964), 67-71.

(15) W. Rautenberg, *Einführung in die mathematische Logik. Ein Lehrbuch.*, 3. Aufl., Studium, Wiesbaden, Vieweg+Teubner, 2008, xxi+256 S. ISBN 978-3-8348-0578-2/pbk.

(16) D.A. Salamon, *Analysis* II: *Differentialformen und der Satz von Stokes*, Vorlesungsskript, 24 S., `www.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/ana2-stokes.pdf`.

(17) A. Schmitt, *Analysis* I, Vorlesungsskript, `http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt`.

(18) A. Schmitt, *Analysis* II, Vorlesungsskript, `http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt`.

(19) S. Shelah, *Can you take Solovay's inaccessible away?*, Isr. J. Math. **48** (1984), 1-47.

(20) W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, Fundamenta Mathematicae **1** (1920), 112-115.

(21) R.M. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Annals of Mathematics **92** (1970), 1-56.

(22) S. Wagon, *The Banach–Tarski paradox*, Encyclopedia of Mathematics and Its applications **24**, Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1985, xvi+251 S., `http://en.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski_paradox`.

# Stichwortverzeichnis


Abschluss, 19
absorbierend, 140
Allklasse, 70
alternierende $p$-Form, 98
angepasste Zerlegung, 9
Anzahl der Fehlstände, 97
Atlas, 113
Ausschöpfung, 48
äußer
    e Ableitung, 106
    es Produkt, 100, 104
Auswahlaxiom, 66
Axiom
    der abhängigen Wahlen, 80
    der Bestimmtheit, 80
    der Existenz einer schwach unerreichbaren Kardinalzahl, 80

Bendixson, 77
Beppo Levi, 35
beschränkt
    e lineare Abbildung, 18
    er, achsenparalleler Quader, 7
Beta-Funktion, 59
Bona, 68
Buckel
    wandernder, 32

Cantor, 77
    Bendixson-Zerlegung, 77
Cavalieri, 52
    Prinzip von —, 52
charakteristische Funktion, 7

Dachprodukt, 100, 104
de Rham, 109
    Komplex, 109
diffeotop, 135
Diffeotopie, 135
    invarianz, 136
Differentialform, 104
Dirichlet, 58
Divergenz, 111

Einheitsnormalenfeld, 115, 133
Ellipsoid, 95
endlich messbar, 51
euklidische Bewegung, 93
exakt, 109

fast
    alle, 29
    überall, 29
Figur, 48
Fischer, 31
Fläche der Kreisscheibe, 52
Fubini, 43
    Satz von —, 43
Fundierungsaxiom, 72
Funktion
    charakteristische —, 7

$\Gamma$-Funktion, 59
geringere Mächtigkeit, 68
geschlossen, 109
glatt
    e $p$-Form, 104
    e Differentialform vom Grad $p$, 104
    es parametrisiertes Flächenstück mit Rand, 124
gleiche Mächtigkeit, 68
gleichmächtig, 68
Graph, 28

Halb
    norm, 12, 17
    raum, 124
Hodge, 110
    Operator, 110
Hüllreihe, 13
Hyperebene, 8, 142

Igelkämmungssatz, 134
induzierte Orientierung, 127
innerer Punkt, 125
Inneres, 125
Integral
    einer Treppenfunktion, 10
    Lebesgue- —, 22
    Riemann- —, 12

integrierbar, 24
lokal —, 51
isolierter Punkt, 73

Karte, 113
Kette, 67
Kondensationspunkt, 76
Kontinuumshypothese, 73
kreisförmig, 140
Kreuzprodukt, 110, 116
Kugel
koordinaten, 94
oberfläche, 134

L-beschränkt, 38
nach oben —, 38
nach unten —, 38
$L^1$
Konvergenz, 32
vs. punktweise Konvergenz, 32
Norm, 30
Laplace, 111
Operator, 111
Lebesgue
beschränkt, 38
nach oben —, 38
nach unten —, 38
Integral, 22
integrierbar, 22
Maß, 60
scher Konvergenzsatz, 39
Leibniz-Regel, 106
Lemma von Poincaré, 109, 149
Limesordinalzahlen, 72
Lipschitz-Bedingung, 142
lokal integrierbar, 51

Mächtigkeit
geringere —, 68
gleiche —, 68
Majorantenkriterium, 51
maximales Element, 67
Mengen-Klassen-Lehre, 70
messbar, 60, 64, 144
Minkowski, 140
Möbius, 116
band, 116
multilineare Abbildung, 97
Mycielski, 81

nach
oben Lebesgue-beschränkt, 38
unten Lebesgue-beschränkt, 38
Nachfolgeordinalzahl, 72
nicht messbare Menge, 63
Norm, 18
$L^1$- —, 30
Nullmenge, 25

obere Schranke, 67
Oberintegral, 11
offen, 18
Ordinalzahl, 70
Ordnung
partielle —, 67
orientierbar, 114
orientiert, 113
e Karte, 121
er $\mathbb{R}$-Vektorraum, 112
es Volumen, 93
Orientierung, 112, 114
induzierte —, 127
orientierungs
äquivalent, 112, 113
erhaltend, 112
treu, 112
umkehrend, 112

Parallelotop, 93
Parametergebiet mit Rand, 124
partielle Ordnung, 67
perfekt, 73
Poincaré, 109
Polarkoordinaten, 94
Prinzip von Cavalieri, 52
punktweise Konvergenz, 32
vs. $L^1$-Konvergenz, 32

Quader, 8
beschränkter, achsenparalleler —, 7
unbeschränkter, achsenparalleler —, 8

Rand, 125
glattes parametrisiertes Flächenstück mit —, 124
Parametergebiet mit —, 124
punkt, 125
Untermannigfaltigkeit mit —, 125
relatives Inneres, 125
Riemann
Integral, 12
uneigentliches —, 24
integrierbar, 11, 12
Riesz, 31
Fischer
Satz von —, 31

Rotation, 110
Rücktransport, 103, 105

Satz
    von Beppo Levi, 35
    von Fubini, 43
    von Riesz–Fischer, 31
    von Stokes, 128
    von Tonelli, 57
Schranke, 18
    obere —, 67
Shelah, 80
Sierpiński, 78
$\sigma$
    Additivität, 61
    kompakt, 51
Solovay, 80
spezielle Transformationsformel, 86
Standard
    halbraum, 124
    orientierung, 112
    simplex, 56
sternförmig, 149
stetig differenzierbare $p$-Form, 104
Stokes, 128
Substitutionsregel, 83
Świerczkowski, 81
symmetrische Gruppe, 97

Teilung der Eins, 117
Tonelli, 57
    Satz von —, 57
Träger, 121
transfinite
    Induktion, 72
    Rekursion, 72
Transformationsformel, 83
    spezielle —, 86
transitiv, 70
    e Klasse, 71
Treppenfunktion, 9
    Intergral einer —, 10

unbeschränkter, achsenparalleler Quader, 8
uneigentliches Riemann-Integral, 24, 41
Unter
    integral, 11
    mannigfaltigkeit mit Rand, 125

Vektor
    feld, 110, 135
    raum der glatten Vektorfelder, 110
    raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen, 22
Verfeinerung, 9
Vitali, 63
    Menge, 63
Volumen, 7, 51, 133
    der Vollkugel, 53
    höherdimensionaler Bälle, 54
    $(n-1)$-dimensionales —, 133
    $n$-dimensionales, 7, 8, 51
    orientiertes —, 93

wandernder Buckel, 32
Wohlordnung, 67
    sprinzip, 67

Zerlegung, 9
    angepasste —, 9
Zorn, 67
    sches Lemma, 67