Analysis I

—

Vorlesung an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 2009/2010

Alexander Schmitt

Juni 2010

Vorwort

Das vorliegende Skript enthält den Stoff aus der Vorlesung „Analysis I" aus dem Wintersemester 2009-2010 und Teilen der Vorlesung „Analysis II" aus dem Sommersemester 2010. Es ist als Gedächtnisstütze gedacht und soll keineswegs ein Lehrbuch ersetzen.

In der Vorlesung sollen die Theorie der Folgen und Reihen reeller Zahlen sowie die Theorie der reellwertigen Funktionen auf einem Intervall in den reellen Zahlen entwickelt werden. Der zentrale Begriff ist der des Grenzwerts. Für den erfolgreichen Aufbau der Theorie benötigt man die spezifischen Eigenschaften der reellen Zahlen. Um einzusteigen, muss man also lediglich wissen, dass es die reellen Zahlen gibt und ihre Eigenschaften kennen. Man könnte die Vorlesung einfach damit beginnen, diese Eigenschaften aufzulisten und zu postulieren, dass die reellen Zahlen mit diesen Eigenschaften existieren. Schließlich haben die Studierenden während ihrer Schulzeit bereits den Umgang mit den reellen Zahlen eingeübt.

Der Autor empfindet es aber als ehrlicher, die Mathematik fast ganz von vorne zu beginnen und möglichst genau zu erklären, wie man zu diesen reellen Zahlen gelangt. Dies soll im ersten Kapitel geschehen, das in der Vorlesung die ersten dreieinhalb Wochen einnimmt. Zunächst führen wir uns den Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen Zahlen über die ganzen und rationalen bis hin zu den reellen Zahlen vor Augen. Anschließend besprechen wir den von Russell[1] und Zermelo[2] gefundenen Widerspruch in der naiven Mengenlehre. Wir begründen mit diesem Widerspruch die Notwendigkeit zu großer Sorgfalt und den axiomatischen Aufbau der Mengenlehre und der Mathematik. Wir geben daraufhin die wichtigsten Axiome der Mengenlehre bzw. einige wichtige Folgerungen aus ihnen an. Diese Axiome sagen aus, dass wir gewisse Mengen wie die leere Menge und die natürlichen Zahlen zur Verfügung haben, und geben uns Konstruktionsmethoden für neue Mengen aus vorhandenen an die Hand. Danach besprechen wir die Charakterisierung der natürlichen Zahlen durch die Peano[3]-Axiome. Diese Axiome beinhalten das Beweisprinzip der vollständigen Induktion und begründen die Möglichkeit der rekursiven Definition. Mit dieser führen wir die Addition und die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen und damit auch deren Anordnung ein. Das Konzept der Äquivalenzrelation gestattet es uns, schnell die ganzen und die rationalen Zahlen zu konstruieren. Zum Abschluss des Kapitels diskutieren wir Dedekinds[4] Konstruktion der reellen Zahlen. Die rationalen Zahlen bilden einen angeordneten Körper $\mathbb{Q}$. Leider haben sie Löcher wie etwa $\sqrt{2}$. Die Formalisierung des Begriffs des „Lochs" zeigt auch schon, wie man die Löcher beseitigen kann. In Dedekinds Konstruktion ist eine reelle Zahl eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$. Die Konstruktion ist also wesentlich aufwändiger und von höherem

[1] Bertrand Arthur William Russell (1872 - 1970), britischer Philosoph, Mathematiker und Logiker.
[2] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871 - 1953), deutscher Mathematiker.
[3] Giuseppe Peano (1858 - 1932), italienischer Mathematiker.
[4] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), deutscher Mathematiker.

Abstraktionsgrad als die der ganzen oder rationalen Zahlen. Die reellen Zahlen bilden einen angeordneten Körper $\mathbb{R}$ „ohne Löcher". Man sagt, dass $\mathbb{R}$ „ordnungsvollständig" ist. Der Begriff der Ordnungsvollständigkeit ist äquivalent dazu, dass jede nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen ein Supremum besitzt. Diese Eigenschaft ist sehr wichtig beim Beweis, dass reelle Cauchy[5]-Folgen konvergieren. Daher werden wir sie am Schluss des ersten Kapitels nochmal mit Hilfe der Dezimalzahlen erklären. Im Anhang zu Kapitel I gehen wir auf den Begriff der Mächtigkeit von Mengen ein. Damit können wir die „Größe" verschiedender Mengen miteinander vergleichen. Mit Cantors[6] erstem Diagonalargument zeigen wir, dass es „genauso viele" rationale wie natürliche Zahlen gibt, und mit dem zweiten Diagonalargument, dass es „viel mehr" reelle Zahlen gibt als natürliche.

Im zweiten Kapitel wenden wir uns dem Konzept des Grenzwerts zu, das in der Analysis eine herausragende Rolle spielt. Zunächst definieren wir den Begriff einer Folge reeller Zahlen. In Beispielen stellen wir einige explizit und einige rekursiv definierte Folgen vor, darunter die berühmte Fibonacci-Folge.[7] Sodann erklären wir das Konzept der konvergenten Folge. Wir beobachten, dass die Beschränktheit einer Folge notwendig für deren Konvergenz ist. Anschließend besprechen wir Rechenregeln für Grenzwerte, die es erlauben, die Grenzwerte von Folgen, die mittels Addition, Multiplikation und Division aus anderen Folgen aufgebaut sind, aus den Grenzwerten ihrer Bestandteile zu ermitteln. Alle Sätze und Definitionen werden anhand von Beispielen erläutert. Bis zu diesem Zeitpunkt benutzen wir nur, dass wir in einem angeordneten Körper arbeiten. Die Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen verwenden wir, um wichtige hinreichende Kriterien für die Konvergenz einer Folge zu gewinnen. Das erste dieser Kriterien besagt, dass eine Folge, die monoton wächst oder fällt und zugleich beschränkt ist, konvergiert. Dieser Satz ist eine einfache Folgerung aus der Existenz des Supremums bzw. Infimums einer nichtleeren beschränkten Teilmenge der reellen Zahlen, die die Ordnungsvollständigkeit charakterisiert. Aus diesem Kriterium folgern wir ohne große Mühe den Satz von Bolzano[8]–Weierstraß[9]. Dieser sagt aus, dass eine beschränkte Folge zwar nicht konvergent zu sein braucht, zumindest aber eine konvergente Teilfolge besitzt. Dieses Resultat kehrt in gewisser Weise die Beobachtung um, dass eine konvergente Folge beschränkt ist. Aus dem Satz von Bolzano–Weierstraß leiten wir das berühmte Cauchy-Kriterium ab, das sowohl notwendig als auch hinreichend für die Konvergenz einer Folge ist. Im Anschluss begegnet uns zum ersten Mal die harmonische Reihe. Sie erfüllt nicht das Cauchy-Kriterium und ist daher divergent. Allerdings erfüllt sie eine schwächere Form des Cauchy-Kriteriums, das somit nicht hinreichend für die Konvergenz einer Folge sein kann. Dieses Beispiel ist eine erste Illustration dafür, dass Konvergenzfragen sehr subtil werden können. Nach diesen für die theoretische Entwicklung der Analysis wichtigen Sätzen führen wir kurz den Begriff der uneigentlichen Konvergenz ein. Dann untersuchen wir eine Folge, die einen effizienten Algorithmus zur Berechnung von Quadratwurzeln liefert und somit ein Beispiel für den praktischen Nutzen von Folgen ist. Nach den Folgen widmen wir uns den Reihen. Reihen sind Beispiele für Folgen, durch die

[5] Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), französischer Mathematiker

[6] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918), deutscher Mathematiker, Begründer der Mengenlehre.

[7] Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt ($\approx$ 1180 - 1241), Rechenmeister in Pisa, gilt als der bedeutendste Mathematiker des Mittelalters.

[8] Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 - 1848), Philosoph, Theologe und Mathematiker.

[9] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 - 1897), deutscher Mathematiker.

der Summation unendlich vieler reeller Zahlen (unter geeigneten Voraussetzungen) Sinn gegeben wird. Wir stellen zunächst das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte vor, mit dem der griechische Philosoph Zenon von Elea[10] seine Zeitgenossen unter Einsatz einer geometrischen Reihe verwirren wollte. Danach definieren wir den Begriff der unendlichen Reihe. Einige Konvergenzkriterien für Folgen übertragen sich auf Reihen. Das Problem, die Konvergenz einer Reihe anhand ihrer Summanden zu ermitteln, ist sehr schwierig. Für alternierende Reihen, in denen die Summanden ständig das Vorzeichen wechseln, hat man das elegante Leibniz-Kriterium.[11] Wir haben uns schon früher überzeugt, dass die harmonische Reihe divergiert. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt, dass die alternierende harmonische Reihe konvergiert. (Dies wird uns noch Gelegenheit zu allerlei Spielereien geben.) Anschließend besprechen wir den Begriff der absoluten Konvergenz und zeigen den ersten Umordnungssatz. Er besagt, dass man die Summanden einer absolut konvergenten Reihe umordnen kann, ohne das Konvergenzverhalten und den Grenzwert zu ändern. Für bedingt konvergente Reihen, also Reihen, die wie die alternierende Reihe zwar konvergieren aber nicht absolut konvergieren, ist dieser Satz eklatant falsch: Zu einer vorgegebenen reellen Zahl x kann man eine bedingt konvergente Reihe so umordnen, dass sie gegen x konvergiert. Man kann eine bedingt konvergente Reihe auch so umordnen, dass sie divergiert. An diesem Beispiel erkennt man, dass einen bei einigen Fragestellungen der „gesunde Menschenverstand" nicht zum Ziel führt und man durch mathematische Formalisierung interessante Entdeckungen machen kann. Wir fahren mit einigen bekannten Kriterien zur Feststellung der absoluten Konvergenz fort und beschließen das Thema mit der Diskussion des Cauchy-Produkts. Auch hier ist man auf absolute Konvergenz angewiesen. Im Anhang zu Kapitel 2 stellen wir die Konstruktion der reellen Zahlen über Cauchy-Folgen rationaler Zahlen vor. Anders als bei der Konstruktion über Dedekindsche Schnitte kann man hier alle Axiome ohne große Mühe nachprüfen. Wir haben diese Konstruktion allerdings zurückgestellt, weil wir erst Sicherheit im Umgang mit dem Folgenbegriff erlangen wollten.

Das dritte Kapitel führt schließlich den Hauptgegenstand der Untersuchungen in der Analysis ein, die reellen Funktionen. Haupthilfsmittel zur Gewinnung einer Anschauung reellwertiger Funktionen in einer Veränderlichen ist der Funktionsgraph. Wir verschaffen uns zunächst einen Grundkanon an Funktionen und Funktionsgraphen, der im Laufe der Vorlesung ständig erweitert werden wird. Um über Funktionen reden zu können, benötigen wir mathematisches Vokabular. Wir besprechen zunächst elementare Begriffe wie Nullstellen, Symmetrie und Perodizität, mit Hilfe derer wir Funktionen beschreiben können. Im Anschluss daran definieren wir den Begriff des Grenzwerts einer Funktion. Wir führen ihn zurück auf den Grenzwertbegriff für Folgen. Mit diesem neuen Grenzwertbegriff definieren wir das Konzept der Stetigkeit in einem Punkt. Die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen zeigen, dass man durch Addition, Multiplikation und Division neue stetige Funktionen aus bereits bekannten konstruieren kann. Wir stellen auch die „ε-δ-Formulierung" der Stetigkeit vor, die ohne den Rückgriff auf Grenzwerte auskommt. Das Verhalten stetiger Funktionen lässt sich bereits gut kontrollieren. So nimmt z.B. eine stetige Funktion, die auf einem abgeschlossenen Intervall definiert ist, einen minimalen und einen maximalen Funktionswert an. Ganz- und gebrochen rationale Funktionen sind stetig. An ihnen üben wir die Grundzüge einer Kurvendiskussion ein. Schließlich zeigen wir, dass man neue Funktionen als Grenzwer-

[10] $\approx$ 490 - 430 v.u.Z., griechischer Philosoph.

[11] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), deutscher Philosoph, Mathematiker uvm.

te von Folgen bereits bekannter Funktionen gewinnen kann. Bei vorsichtiger Handhabung (Stichwort: Gleichmäßige Konvergenz) kann man sogar neue stetige Funktionen erhalten. Man kann insbesondere Folgen von Polynomfunktionen betrachten. Dies führt auf den Begriff der Potenzreihe. Eine Potenzreihe mit Entwicklungpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ kann als formaler Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ angesehen werden, der durch eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen bestimmt ist. Einer solchen Reihe kann man den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zuordnen, so dass sie auf dem Intervall $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ eine stetige Funktion liefert. Dieser Formalismus erlaubt eine elegante Definition der Exponentialfunktion exp. Aus dem Satz über das Cauchy-Produkt von Reihen leiten wir die charakteristische Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ab. Sie ermöglicht weitere Schlüsse über exp. Insbesondere folgt, dass exp umkehrbar ist. Die Umkehrfunktion von exp ist der natürliche Logarithmus log. Wir geben auch die Potenzreihen für Sinus und Kosinus an. Die charakteristischen Eigenschaften dieser beiden Funktionen werden wir jedoch erst mit den Mitteln der Differentialrechnung herleiten.

Im vierten Kapitel beginnen wir mit der Differentialrechnung. Der Grundgedanke ist, eine gegebene Funktion f lokal durch eine lineare Funktion zu approximieren. Geometrisch soll die approximierende lineare Funktion die Tangente an den Funktionsgraphen in einem Punkt $(x_0, f(x_0))$ liefern. Was ist nun die Tangente? Sie ist unter allen Geraden, die den Graphen im fraglichen Punkt $(x_0, f(x_0))$ schneiden, dadurch ausgezeichnet, dass sie ihn dort „berührt". Das Berühren formalisiert man, indem man die Tangente an einen Punkt als Grenzfall von Sekanten durch den Punkt darstellt, also Geraden, die den Graphen noch in einem weiteren Punkt schneiden. Die Steigungen der Sekanten sind durch den Differenzenquotienten gegeben. Wir nehmen an, dass die Funktion in einer Umgebung von x_0 definiert ist. Dann ist auch der Differenzenquotient in dieser Umgebung außerhalb von x_0 definiert. Die Steigung der Tangenten erhält man durch den Grenzübergang $x \to x_0$. Dieser Grenzübergang kann nicht immer durchgeführt werden. Wenn er durchgeführt werden kann, sagen wir, dass f in x_0 differenzierbar ist. Eine wichtige Beobachtung ist, dass Differenzierbarkeit in x_0 die Stetigkeit in x_0 nach sich zieht. Nachdem wir die nötigen Begriffe eingeführt haben, untersuchen wir ein paar einfache Funktionen „von Hand" auf Differenzierbarkeit. Anschließend geben wir eine Reihe von Regeln und Sätzen an, mit denen man auf die Differenzierbarkeit einer Funktion schließen kann. Danach besprechen wir den zentralen Mittelwertsatz. Er formalisiert, wie man aus Eigenschaften der Ableitung einer Funktion auf deren Wachstumsverhalten schließen kann. Unmittelbare Folgerungen sind die Charakterisierung konstanter Funktionen als Funktionen mit verschwindender Ableitung und die bekannten notwendigen und hinreichenden Kriterien für die Existenz lokaler Extrema. Weiter definieren wir die Begriffe der links- und der rechtsgekrümmten Funktion. Für eine zweimal differenzierbare Funktion liest man diese Eigenschaften aus der zweiten Ableitung ab. Die aus der Schule bekannte Kurvendiskussion ist eine Art Zusammenfassung des bisher Erreichten. Sie zeigt, wie man sich mit den Methoden der Differentialrechnung ein gutes Bild einer gegebenen Funktion verschaffen kann. Wir gehen auch kurz auf die Berechnung von Extrema unter Nebenbedingungen ein, die in Anwendungen eine wichtige Rolle spielt. Als weitere Folgerung aus dem Mittelwertsatz leiten wir die Regel von de l'Hôpital[12] ab. Weiter werden wir nachweisen, dass eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion differenzierbar ist und ihre Ableitung ebenfalls durch

[12] Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hospital oder Hôpital (1661 - 1704), französischer Mathematiker.

eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius gegeben ist, die leicht aus der ursprünglichen berechnet werden kann. Damit können wir sofort die Ableitungen der Exponentialfunktion, des Sinus und des Kosinus bestimmen. Mit den Methoden der Differentialrechnung geben wir auch einen Beweis für die Additionstheoreme des Sinus und des Kosinus, aus denen die bekannten Eigenschaften dieser Funktionen abgeleitet werden. Wir besprechen weiter ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, deren Ableitung nicht stetig ist, sowie einer stetigen Funktion, die nirgends differenzierbar ist. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels erklärt, wie man aus dem theoretischen Apparat Verfahren zur näherungsweisen Berechnung gewisser Größen entwickeln und die Funktionsweise solcher Verfahren analysieren kann. Konkret werden das Fixpunktverfahren, ein einfacher Spezialfall des Banachschen[13] Fixpunktsatzes, und das Newtonverfahren[14] besprochen. In einem Ausblick gehen wir kurz auf die Exponentialreihe im Komplexen ein. Interessant ist dabei, dass die Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus beinhaltet.

Das fünfte und letzte Kapitel beschäftigt sich mit dem Integralbegriff nach Riemann.[15] Für eine beschränkte Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ soll das Integral den Flächeninhalt derjenigen Fläche angeben, die von dem Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossen wird. Dabei sind diejenigen Anteile, die oberhalb der x-Achse liegen, positiv zu zählen und diejenigen unterhalb der x-Achse negativ. Zunächst betrachten wir sogenannte Treppenfunktionen, für die sich der Integralbegriff mit den gewünschten Eigenschaften leicht formal definieren lässt. Der Grundgedanke ist, eine beliebige Funktion durch Treppenfunktionen anzunähern. Dies tut man einmal von oben und einmal von unten. Für jede beschränkte Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall lassen sich auf diese Weise Ober- und Unterintegral erklären. Stimmen diese beiden Integrale überein, so nennt man die betrachtete Funktion integrierbar und definiert das Integral als Oberintegral (oder Unterintegral). Nicht jede beschränkte Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall endlicher Länge ist integrierbar. Allerdings zeigen wir, dass jede stetige Funktion und jede monoton fallende oder wachsende Funktion integrierbar ist. Ferner gibt es wieder einige elementare Integrationsregeln, mit denen man neue integrierbare Funktionen aus bereits bekannten integrierbaren Funktionen konstruieren und deren Integral berechnen kann. Als wichtiges theoretisches Instrument beweisen wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Das Integral ist laut Definition durch den undurchsichtigen Grenzübergang definiert, der sich hinter dem Supremum bzw. Infimum verbirgt. Um diesen Grenzprozess transparenter und damit etwa auch numerischen Behandlungen zugänglich zu machen, besprechen wir den Zugang zum Integral über Riemannsche Summen und erläutern ihn an einem Beispiel. Das Kernstück des Kapitels ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Er macht deutlich, inwiefern man Differentiation und Integration als zueinander inverse Prozesse ansehen kann, und liefert das wichtigste Verfahren zur exakten Auswertung von Integralen. Mit der Ketten- bzw. Produktregel der Differentialrechnung und dem Hauptsatz gelangt man zu der Substitutionsregel bzw. zur partiellen Integration. Mit diesen Regeln kann man weitere interessante Integrale berechnen und Stammfunktionen bestimmen. Um diese beiden Regeln erfolgreich anzuwenden, bedarf es Erfahrung und Geschick. Sie stellen kein „Kochrezept" zum erfolgreichen Lösen von Integralen dar. Wir

[13] Stefan Banach (1892 - 1945), polnischer Mathematiker.

[14] Sir Isaac Newton (1643 - 1727), englischer Physiker, Mathematiker, Astronom, Alchemist, Philosoph und Verwaltungsbeamter, Mitbegründer der Infinitesimalrechnung.

[15] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), deutscher Mathematiker.

illustrieren die beiden Regeln an verschiedenen Beispielen. Die Trapezregel ist nach den Riemannschen Summen ein weiteres Verfahren zur numerischen Auswertung von Integralen. Wir besprechen ausfürlich den Begriff des uneigentlichen Integrals. Insbesondere beschäftigen wir uns mit der Γ-Funktion, einer Funktion, die die Fakulät von den natürlichen auf die positiven reellen Zahlen ausdehnt. Der Beweis des Satzes von Bohr[16] und Mollerup[17], der die Γ-Funktion vollständig charakterisiert, ist ein Höhepunkt der Vorlesung. Der letzte Abschnitt des Skripts widmet sich der Theorie der Taylorpolynome[18] und -reihen. Zum einen erhalten wir eine Methode, hinreichend oft differenzierbare Funktionen durch Polynome anzunähern, und damit weitere numerische Verfahren. Zum anderen wird die Rolle der Potenzreihen unter den differenzierbaren Funktionen genauer beleuchtet. Eine wichtige Erkenntnis ist hier, dass nicht jede unendlich oft differenzierbare Funktion durch eine Potenzreihe beschrieben werden kann.

Die Aufgabenblätter zur Vorlesung befinden sich am Ende des Textes.

Ich danke Herrn Nikolai Beck und Herrn Dr. Norbert Hoffmann für das Korrekturlesen.

Alexander Schmitt
Berlin 2010

[16] Harald August Bohr (1887 - 1951), dänischer Mathematiker.
[17] Johannes Mollerup (1872 - 1937), dänischer Mathematiker.
[18] Brook Taylor (1685 - 1731), britischer Mathematiker.

Inhalt

Vorwort *i*

1 *Reelle Zahlen* *1*
1.1 Der Aufbau des Zahlensystems 1
1.2 Grundzüge der axiomatischen Mengenlehre 5
1.3 Die natürlichen Zahlen 12
1.4 Die ganzen Zahlen 20
1.5 Die rationalen Zahlen 25
1.6 Die reellen Zahlen: Die Axiome 26
1.7 Die reellen Zahlen: Eine Konstruktion 31
1.8 Das Supremum mit Hilfe von Dezimalzahlen 36
Anhang. Mächtigkeiten 38

2 *Folgen und Reihen* *45*
2.1 Folgen: Definitionen und erste Beispiele 45
2.2 Folgen: Konvergenz 48
2.3 Cauchy-Folgen 55
2.4 Folgen: $\pm\infty$ als Grenzwert 59
2.5 Berechnung von Quadratwurzeln 60
2.6 Unendliche Reihen: Definitionen 62
2.7 Reihen: Erste Konvergenzkriterien 67
2.8 Reihen: Absolute Konvergenz 71
2.9 Bedingt konvergente Reihen 74
2.10 Reihen: Kriterien für absolute Konvergenz 76
2.11 Reihen: Das Cauchy-Produkt 80
Anhang. Die reellen Zahlen — Eine weitere Konstruktion 82

3 *Reelle Funktionen und Stetigkeit* *89*
3.1 Definition und erste Beispiele 89
3.2 Neue Funktionen aus alten 93
3.3 Erste Eigenschaften reeller Funktionen 94
3.4 Grenzwerte und Stetigkeit 100
3.5 Wichtige Sätze über stetige Funktionen 104
3.6 Ganz- und gebrochen rationale Funktionen 106
3.7 Funktionenfolgen 111
3.8 Potenzreihen 113

4 *Differentialrechnung* *121*
4.1 Differenzierbarkeit 121
4.2 Ableitungsregeln 126
4.3 Extremwerte und der Mittelwertsatz 130
4.4 Krümmung und zweite Ableitung 134

4.5 Kurvendiskussion 136
4.6 Extremwertaufgaben 141
4.7 Ableitungen und Grenzwerte 143
4.8 Differentiation von Potenzreihen 147
4.9 Zwei Gegenbeispiele 157
4.10 Iterationsverfahren 160
Ausblick. Die Exponentialfunktion im Komplexen 169

5 *Integralrechnung* *173*
5.1 Das Riemannsche Integral 173
5.2 Riemannsche Summen 186
5.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 190
5.4 Integrationsregeln 192
5.5 Die Trapezregel 199
5.6 Uneigentliche Integrale 201
5.7 Taylor-Reihen 214

Die Aufgabenblätter *223*

Literaturhinweise *245*

Stichwortverzeichnis *247*

Kapitel 1

Reelle Zahlen

1.1 Der Aufbau des Zahlensystems

Ausgehend von den natürlichen Zahlen stellen wir kurz den (naiven) Aufbau des Zahlensystems vor. Das Material sollte weitgehend aus dem Schulunterricht bekannt sein.

1.1.1 Die natürlichen Zahlen

Die *Menge der natürlichen Zahlen* ist

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Bemerkung. Die Konvention für die natürlichen Zahlen ist nicht eindeutig. Für manche Autoren ist die Null eine natürliche Zahl, für manche nicht (vgl. (15), S. 4). Für die Einbeziehung der Null spricht ihre Rolle als Neutralelement der Addition ($0+n = n = n+0$ für jede natürliche Zahl n) sowie die Konstruktion der natürlichen Zahlen in der axiomatischen Mengenlehre.

Die natürlichen Zahlen modellieren das Zählen. Beachtlich an den natürlichen Zahlen ist, dass sie eine **unendliche** Menge bilden: Alle Objekte, die wir zählen können, seien es Äpfel oder Atome im Universum, gehören ja schließlich endlichen Mengen an. Der Grund für die „Unendlichkeit" der natürlichen Zahlen ist unsere Vorstellung, dass wir jede gegebene Anzahl noch um eins vergrößern können.[1] Die „Vergrößerung um eins" wird mathematisch wie folgt beschrieben.

Definition. Die *Nachfolgerabbildung* ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \nu\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n+1. \end{aligned}$$

Sobald man die Nachfolgerfunktion kennt, kann man $\mathbb{N}$ auch mit folgenden Zusatzstrukturen versehen (s. Abschnitt 1.3):

- der Addition,
- der Multiplikation,

[1] Dies wird weiter unten durch die Peano-Axiome präzisiert (1.3.1).

- der Anordnung „$\leq$“ bzw. „$<$“.

Durch Addition und Multiplikation können wir mit natürlichen Zahlen rechnen. Diese Rechenoperationen haben aber noch ernstzunehmende Defizite: Weder die Addition noch die Multiplikation mit einer natürlichen Zahl lassen sich rückgängig machen. Stellen Sie sich vor, Sie führten ein Konto bei einer Bank, die nur die natürlichen Zahlen kennt: Sie könnten immer brav auf Ihr Konto einzahlen, aber niemals etwas abheben oder gar einen Kredit aufnehmen, weil Ihre Bank weder subtrahieren noch mit negativen Zahlen umgehen kann.

1.1.2 Erste Erweiterung: Die ganzen Zahlen

Als erstes widmen wir uns dem Defizit der Addition.[2] Dazu betrachten wir die

Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \}.$$

Die ganzen Zahlen tragen folgende Zusatzstrukturen:

- die Addition,
- die Multiplikation,
- die Anordnung „$\leq$“ bzw. „$<$“.

Ferner haben wir

- die Inklusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, die mit den Zusatzstrukturen verträglich ist.

Zu jeder ganzen Zahl a gibt es nun die ganze Zahl $(-a)$ mit $a + (-a) = 0$. Das Problem mit der Multiplikation besteht fort: Die Multiplikation mit einer ganzen Zahl lässt sich nicht rückgängig machen, wir können nicht dividieren. Ohne Divsion kann etwa ein Vermögen nicht (gleichmäßig) an mehr als eine Person vererbt werden.

1.1.3 Zweite Erweiterung: Die rationalen Zahlen

Die *Menge der rationalen Zahlen*[3] ist

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch a/b ist nicht eindeutig. Genauer gilt:

Für alle $a, a' \in \mathbb{Z}, b, b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} \iff a \cdot b' = a' \cdot b.$

Die üblichen Zusatzstrukturen erklären wir nun wie folgt:

[2] Genaueres folgt in Abschnitt 1.4.
[3] Die rationalen Zahlen werden in Abschnitt 1.5 eingeführt.

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$,
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$,
- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} :\Longleftrightarrow \begin{cases} ad < bc, & \text{falls } bd > 0 \\ ad > bc, & \text{falls } bd < 0 \end{cases}$.

Eine ganze Zahl a können wir mit dem Bruch $a/1 \in \mathbb{Q}$ identifizieren. Somit erhalten wir

- Inklusionen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, die mit den Zusatzstrukturen verträglich sind.

Zu jeder rationalen Zahl $a/b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gibt es die rationale Zahl $(a/b)^{-1} = b/a$ mit

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ba}{ab} = 1.$$[4]

In Bezug auf die Rechenoperationen „+“ und „·“ sind die rationalen Zahlen bereits so schön wie möglich: Sie bilden einen „Körper“ (s. Definition 1.6.1). Die letzte Zusatzstruktur, die noch Ärger bereitet, ist die Anordnung „$\leq$“: $\mathbb{Q}$ hat „Löcher“. Dies werden wir in Abschnitt 1.6 genau erklären. An dieser Stelle bemerken wir, dass wir einige elementare Fragen in den rationalen Zahlen nicht beantworten können:

- Welche Kantenlänge a hat ein Quadrat vom Flächeninhalt 2? Die gesuchte Kantenlänge erfüllt $a^2 = 2$, d.h. „$a = \sqrt{2}$“. Bekanntlich ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl (s. (2), S. 28).
- Welchen Umfang u hat ein Kreis vom Radius $1/2$? Die Antwort lautet π. Die berühmte Kreiszahl π ist ebenfalls nicht rational.

1.1.4 Dritte Erweiterung: Die reellen Zahlen

Mit Hilfe der Symbole für die natürlichen Zahlen ließen sich leicht Symbole für ganze und rationale Zahlen entwickeln. Mit diesen Symbolen kann man die Rechenvorschriften explizit angeben. Die Erweiterung zu den reellen Zahlen gestaltet sich wesentlich komplizierter. Es gilt

$$\mathbb{R} = \{ \text{Dezimalzahlen mit eventuell unendlich viele Nachkommastellen} \}.$$

Schauen wir uns zunächst die Dezimalbruchentwicklungen rationaler Zahlen an. Es gilt z.B.

$$\frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{1}{3} = 0,\overline{3}, \quad \frac{8}{7} = 1,\overline{142857}.$$

Mit der „Division mit Rest“ überprüft man leicht folgende Tatsache.

Die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl ist endlich oder unendlich periodisch.

Durch die „Neunerperiode“ kommt es zu Mehrdeutigkeiten. Es gilt bekanntlich:

$$1 = 0,\overline{9}, \quad 0,5 = 0,4\overline{9}.$$[5]

Die obige Beobachtung lässt sich umkehren:

[4] Wegen $0 \cdot (a/b) = 0$ für jede rationale Zahl a/b kann es keine Zahl „0^{-1}“ geben.

[5] Man kann die Neunerperioden einfach verbieten. Dazu verweisen wir auf das Buch (12) sowie Aufgabe 6.7.4.

Eine abbrechende oder periodische Dezimalzahl ist rational.

Den Beweis sollen Sie später in Aufgabe 6.7.4 erbringen. Hier rechtfertigen wir diese Behauptung durch folgende Beispiele:

$$0,\overline{5} = \frac{5}{9}, \quad 0,\overline{81} = \frac{81}{99}, \quad 0,\overline{173} = \frac{173}{999}, \quad 5,28\overline{16} = 5 + \frac{7}{25} + \frac{16}{9900}.$$

Die Zahlen in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, also diejenigen reellen Zahlen, die nicht rational sind, nennt man *irrationale Zahlen*. Nach der obigen Diskussion sind das diejenigen Dezimalzahlen mit unendlich vielen, sich nicht periodisch wiederholenden Nachkommastellen. Beispiele sind:

$$\begin{array}{rclrcl} \sqrt{2} & = & 1,4142135\cdots,^{6} & \sqrt{3} & = & 1,7320508\cdots, \\ \pi & = & 3,1415926\cdots,^{7} & e & = & 2,7182818\cdots. \end{array}$$

Wie kann man mit reellen Zahlen rechnen? Wir können eine reelle Zahl beliebig gut durch rationale Zahlen annähern. Für π haben wir etwa

$$a_0 = 3, \quad a_1 = \frac{31}{10}, \quad a_2 = \frac{314}{100}, \quad a_3 = \frac{3141}{1000}, \quad a_4 = \frac{31415}{10000}, \quad \ldots .$$

Dabei unterscheidet sich a_n von π um einen Wert von weniger als 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}$.

Wir möchten z.B. π und $\sqrt{2}$ addieren. Dazu nähern wir $\sqrt{2}$ ebenfalls durch rationale Zahlen an:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{14}{10}, \quad b_2 = \frac{141}{100}, \quad \ldots .$$

Nun bilden wir die Summen $c_n := a_n + b_n$, $n \in \mathbb{N}$, also

$$c_0 = a_0 + b_0 = 4, \quad c_1 = a_1 + b_1 = 4,5, \quad c_2 = a_2 + b_2 = 4,55, \quad \ldots .$$

Die c_n, $n \in \mathbb{N}$, beschreiben eine reelle Zahl, die Summe $\pi + \sqrt{2}$.

Entsprechende Überlegungen kann man für die Multiplikation anstellen. Insgesamt kann man $\mathbb{R}$ wieder mit den üblichen Zusatzstrukturen ausstatten:

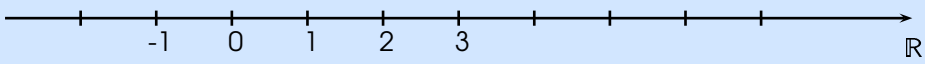
- der Addition,
- der Multiplikation und
- der Anordnung.

Wir haben auch wieder

- Einbettungen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, die mit den Zusatzstrukturen verträglich sind.

Die Entwicklung der reellen Zahlen als Dezimalzahlen kann man in dem Buch (12) nachlesen.

Die Menge der reellen Zahlen stellen wir uns als Gerade vor, auf der die Zahlen von links nach rechts größer werden:



[6] Der (reine) Mathematiker zieht – hoffentlich verständlicherweise – die Aussage „Es gibt eine positive reelle Zahl $\sqrt{2}$ mit der Eigenschaft $\sqrt{2}^2 = 2$." einer ungenauen Darstellung von $\sqrt{2}$ durch eine endliche Dezimalzahl vor.

[7] Weitere Nachkommastellen von π finden Sie am Gebäude Arnimallee 6.

1.2 Grundzüge der axiomatischen Mengenlehre

> Cantors Versuch der Definition einer Menge führte geradewegs zur Russelschen Antinomie und damit ins Verderben. Bei der Grundlegung der Mathematik müssen wir also sehr vorsichtig sein. Der heute gängige Ausweg aus dem Dilemma ist die sogenannte axiomatische Mengenlehre: Wir versuchen gar nicht erst zu definieren, was eine Menge ist, sondern legen lediglich die Eigenschaften, die unsere Mengenlehre erfüllen soll, in einem Satz von Axiomen fest.

Wenn Sie in Ihrem Bekanntenkreis über Ihr Mathematikstudium berichten, z.B. vom Inhalt der ersten Woche, dann müssen Sie auf folgende Rückfragen gefasst sein:

- Was ist eine Zahl?
- Was ist eine Menge?

Es wird Ihnen wahrscheinlich schwerfallen, darauf eine knappe und präzise Antwort zu geben. Der Grund dafür ist, dass Sie (wie auch der Autor) gar nicht so genau wissen, was eine Zahl bzw. eine Menge überhaupt ist.

Als Mathematiker werden wir bei einer Begriffserklärung immer mit einer Definition beginnen. Eine mathematische Definition führt einen neuen Begriff ein. Dabei werden lediglich bereits bekannte mathematische Begriffe verwendet. Führt man dies konsequent zu Ende, so sollte sich die gesamte Mathematik also auf einen oder einige wenige Begriffe zurückführen lassen. Diese fundamentalen Begriffe lassen sich aber nicht im mathematischen Sinne definieren, weil es ja noch keine mathematischen Begriffe gibt, auf die man in so einer Definition zurückgreifen könnte.

Ein Ansatz ist, die Mathematik auf der Mengenlehre aufzubauen. In diesem Fall ist also zuerst der Begriff der Menge zu klären. Nach unseren Vorüberlegungen muss die Definition einer Menge in unserer „Alltagssprache" formuliert werden. Eine berühmte Definition stammt von Georg Cantor.

1.2.1 Definition (Cantors Definition einer Menge)**.** Unter einer „Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Mit dieser Definition können wir sicherlich die folgenden Konstruktionen rechtfertigen:

- Wenn wir bereits eine Menge M gegeben haben und eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ von Elementen aus M untersuchen, dann können wir diejenigen Elemente aus M, die die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzen, zu einer neuen Menge N zusammenfassen. Mit anderen Worten, es gibt

$$N := \{\, m \in M \mid m \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{E} \,\}. \tag{1.1}$$

- Natürlich sind die Mengen selbst nun Gegenstand unseres Denkens. Daher können wir alle Mengen zu einer neuen Menge M zusammenfassen, der *Menge aller Mengen*.[8]

[8] Diese Konstruktion sollte einem sofort verdächtig vorkommen. Da M wieder eine Menge ist, folgt z.B. die mysteriöse Eigenschaft „$M \in M$" (vgl. Bemerkung 1.2.23).

Wir können die beiden obigen Konstruktionen miteinander kombinieren. Sei M die Menge aller Mengen. Gemäß dem Bildungsgesetz (1.1) erhalten wir auch die Menge

$$N = \{ m \in M \mid m \notin m \}.$$

1.2.2 Die Antinomie von Russell und Zermelo.
Frage: Gilt $N \in N$?
Antwort: Da N eine Menge ist, gilt $N \in M$. Mit der Definition von N folgt:

$$N \in N \iff N \notin N.$$

Cantors Definition führt zum Widerspruch in der Mathematik. Genauer gesagt besteht das Problem im Selbstbezug der Definition von N: Die zu überprüfende Eigenschaft $N \in N$ bzw. $N \notin N$ steht bereits in der Definition von N. Der Widerspruch entsteht durch die Verwendung unserer „Alltagssprache" in einer Definition und eine Falle, die die Alltagssprache uns stellt: den Selbstbezug. Letzteres wollen wir an ein paar anderen klassischen Antinomien verdeutlichen. Die erste ist lediglich eine andere Einkleidung der Russelschen Antinomie.

1.2.3 Die Antinomie von Russell und Zermelo II.
In einem Dorf gibt es einen (männlichen) Dorfbarbier. Er rasiert genau diejenigen (männlichen) Dorfbewohner, die sich nicht selbst rasieren.
Fazit: Der Dorfbarbier rasiert sich genau dann selber, wenn er sich nicht selber rasiert.

1.2.4 Currys[9] Paradoxon.
Wenn dieser Satz wahr ist, dann existiert der Weihnachtsmann.

Es handelt sich um eine Aussage der Struktur „$a \Rightarrow b$". Die Wahrheitstabelle für diese Aussage lautet:

a	b	$a \Rightarrow b$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

.

Demnach kann der Satz in Currys Paradoxon nur wahr sein, und wir haben die Existenz des Weihnachtsmanns bewiesen! Die Freude währt allerdings nur so lange, bis wir entdecken, dass wir „existiert der Weihnachtsmann" durch „existiert der Weihnachtsmann nicht" ersetzen können und dann mit demselben Argument die Existenz des Weihnachtsmannes widerlegen.

Diese Beispiele zeigen, dass wir unsere sprachlichen Möglichkeiten beschneiden müssen, um eine einwandfreie Logik zu erhalten. Man beschränkt sich daher auf einige wenige logische Symbole und einfache Schlussregeln.

[9] Haskell Brooks Curry (1900 - 1982), US-amerikanischer Logiker und Mathematiker.

Diese werden in (14), I, §2, und (15), I, §1, vorgestellt. In der logischen Sprache kann man keine selbstbezüglichen Aussagen mehr formulieren, die Russelsche Antinomie ist ausgeräumt (s. (13), 2.4, S. 58).

Wir können zwar keine einfache Definition von „Menge" hinschreiben, aber eine Liste von wünschenswerten Eigenschaften, die Mengen erfüllen sollen. Man könnte nun diese Liste von Eigenschaften als Definition für ein geeignetes System von Mengen nehmen. Dann ließe sich die Existenz eines solchen Systems aber nicht nachweisen. Daher werden die wünschenswerten Eigenschaften in den Rang von Axiomen erhoben. Axiome sind dabei Grundannahmen, von deren Wahrheit wir ausgehen, ohne diese beweisen zu können. Die folgenden Axiome bzw. Folgerungen daraus entstammen der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel[10] (entstanden zwischen 1907 und 1930). Bisher hat die Verwendung dieses Axiomensystems keine neuen Widersprüche gezeitigt. Allerdings hat Gödel[11] bewiesen, dass es uns unmöglich ist, die Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems festzustellen.

Wir müssen zuerst die **Sprache der Mengenlehre** festlegen:

- Wir reden von Mengen. Als Bezeichnung für Mengen verwenden wir im Rest des Abschnitts meist Großbuchstaben.[12]
- Zwischen Mengen können folgende Relationen bestehen:
  - „$A = B$" (lies „A ist gleich B").
  - „$A \in B$" (lies „A ist Element von B").

Die Gleichheit der Mengen A und B bedeutet gemäß dem **Leibnizschen Gesetz**, dass man in jeder Aussage, die die Menge A betrifft, A durch B ersetzen kann, ohne den Wahrheitsgehalt der Aussage zu ändern, und umgekehrt. Über die Elementbeziehung wissen wir noch nichts. Daher unser erstes Axiom.

1.2.5 Axiom (Extensionalitätsaxiom)**.** *Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn Sie dieselben Elemente enthalten.*

$$A = B \iff \forall X : \ (X \in A \iff X \in B).$$

1.2.6 Bemerkung. i) Das Extensionalitätsaxiom liefert eine wichtige Information über die Elementbeziehung. Gleichzeitig macht es den Begriff der Gleichheit von Mengen handhabbar und in vielen Situationen nachprüfbar. Insbesondere können wir eine Menge eindeutig dadurch festlegen, dass wir ihre Elemente angeben. Davon wird in den folgenden Axiomen, Konstruktionen und Beispielen reger Gebrauch gemacht.

ii) Das Extensionalitätsaxiom bringt die Gleicheit von Mengen mit dem logischen Äquivalenzsymbol „$\Longleftrightarrow$" in Verbindung. Aus der Gleichheit der Wahrheitstabellen ((14), S. 27, (15), S. 3) für „$a \iff b$" und „$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$" liest man ab, dass man eine Äquivalenz „$\Longleftrightarrow$" dadurch beweisen kann, dass man die beiden Implikationen „$\Rightarrow$" und „$\Leftarrow$" nachweist. Dies findet nun seine Entsprechung in der Mengenlehre.

[10] Adolf (Abraham Halevi) Fraenkel (1891 - 1965), deutsch-israelischer Mathematiker.

[11] Kurt Friedrich Gödel (1906 - 1978), Mathematiker und Logiker.

[12] Dies soll die Gleichberechtigung aller Mengen ausdrücken. Cantors Definition ließ noch vermuten, dass Mengen und ihre Elemente verschiedenartige Dinge seien. Daher wurden die einen mit Großbuchstaben und die anderen mit Kleinbuchstaben bedacht. Später werden wir (sowohl lateinische als auch griechische) Groß- und Kleinbuchstaben für Mengen benutzen und in der Notation auch wieder zwischen Mengen und ihren Elemente unterscheiden.

1.2.7 Definition. Es seien A und B Mengen. Wir sagen A ist *Teilmenge* von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

$$\forall X : X \in A \Rightarrow X \in B.$$

Schreibweise: $A \subset B$ oder $A \subseteq B$ oder $B \supset A$ oder $B \supseteq A$.

Bemerkung. Leider werden die Symbole „$\subset$" und „$\subseteq$" in der Mathematik meist nicht in Analogie zu den Ungleichheitszeichen „$<$" und „$\leq$" verwendet. Will man eine echte Inklusion, d.h. eine Inklusion, die keine Gleichheit ist, kennzeichnen, so muss man auf das Symbol „$\subsetneq$" zurückgreifen.

1.2.8 Lemma. *Es seien A und B Mengen. Dann gilt genau dann $A = B$, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.*

Beweis. Wie zuvor bemerkt ist die Aussage „$\forall X : X \in A \Longleftrightarrow X \in B$" äquivalent zu „$\forall X : (X \in A \Rightarrow X \in B) \wedge (X \in B \Rightarrow X \in A)$". Diese Aussage ist ihrerseits äquivalent zu „$(\forall X : X \in A \Rightarrow X \in B) \wedge (\forall X : X \in B \Rightarrow X \in A)$". Letztere besagt aber genau „$(A \subset B) \wedge (B \subset A)$". □

1.2.9 Axiom (Teilmengenaxiom)**.** *Seien A eine Menge und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, die die Elemente von A haben können. Dann existiert die Menge*

$$B := \{ X \in A \mid X \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{E} \}.$$

1.2.10 Beispiel. Wir illustrieren den Gebrauch des Teilmengenaxioms in einigen konkreten Situationen. Dabei kommen Mengen vor, deren Existenz erst durch spätere Axiome gesichert werden wird.

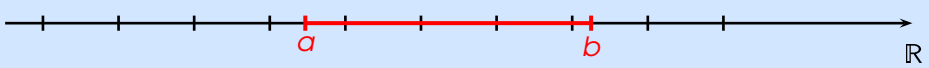
i) $M := \{ a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ ist durch 3 teilbar} \} = \{ 0, \pm 3, \pm 6, \dots \}$.

ii) (Endliche Mengen) Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

$$M := \{ k \in \mathbb{N} \mid k \leq n \} = \{ 0, 1, \dots, n \}.$$

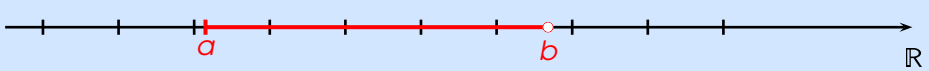
iii) Wir betrachten reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Das *abgeschlossene Intervall zwischen a und b* ist dann

$$[a, b] := \{ c \in \mathbb{R} \mid a \leq c \leq b \}.$$



Das *nach rechts halboffene Intervall zwischen a und b* ist

$$[a, b) := \{ c \in \mathbb{R} \mid a \leq c < b \}.$$



iv) (Die leere Menge) Es sei M eine Menge. Wir setzen

$$\varnothing := \{ X \in M \mid X \neq X \}.$$

Die Menge $\varnothing$ ist dadurch ausgezeichnet, dass sie keine Elemente enthält:

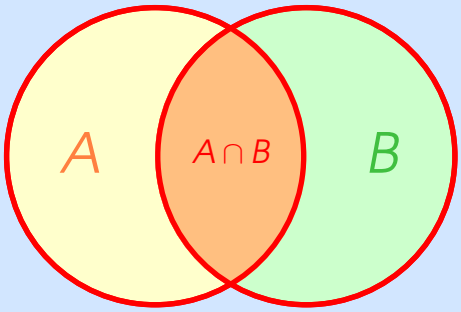
$$\forall X : X \notin \varnothing.$$

Wir nennen $\varnothing$ die *leere Menge*.

v) (Durchschnitte)

1.2.11 Definition. Es seien A und B Mengen. Der *Durchschnitt von A und B* ist die Menge

$$A \cap B := \{ X \in A \mid X \in B \}.$$



Die Bildung des Durchschnitts ist durch das Teilmengenaxiom 1.2.9 abgesichert. Die Definition sieht noch etwas unsymmetrisch aus. Allerdings gilt:

1.2.12 Lemma. *Für zwei Mengen A und B gilt*

$$A \cap B = B \cap A.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} X \in A \cap B &\iff X \in A \wedge X \in B \\ &\iff X \in B \wedge X \in A \\ &\iff X \in B \cap A. \end{aligned}$$

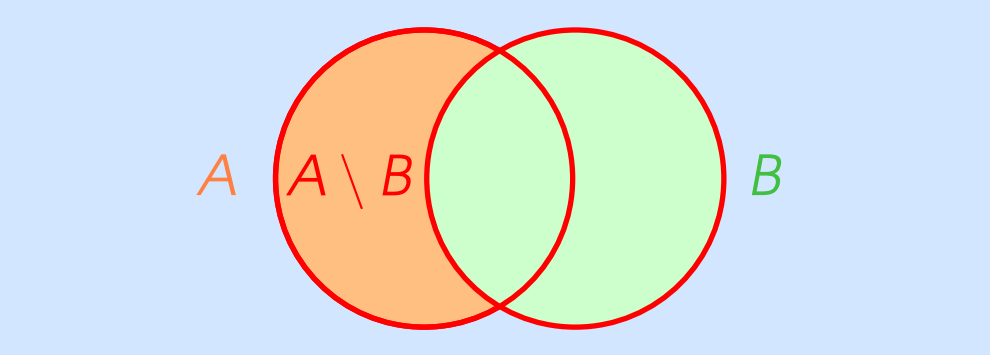
□

Der obige Beweis macht deutlich, dass die Mengenoperation „$\cap$“ dem logischen „$\wedge$“ entspricht. Dementsprechend folgt auch die Kommutativität von „$\cap$“ aus der von „$\wedge$“, die sich ihrerseits anhand von Wahrheitstabellen verifizieren lässt.

vi) (Mengendifferenzen)

1.2.13 Definition. Es seien A und B Mengen. Die *Differenz von A und B* ist die Menge

$$A \setminus B := \{ X \in A \mid X \notin B \}.$$



Die Bildung der Mengendifferenz ist nicht mehr kommutativ. Das Analogon in der Logik ist „$(.) \wedge \neg(.)$“.

Bisher wissen wir noch nicht, dass es überhaupt eine Menge gibt. Dies ist Inhalt des folgenden Axioms.

1.2.14 Axiom (Nullmengenaxiom)**.** *Die leere Menge*

$$\varnothing = \{ X \mid X \neq X \}$$

existiert.

1.2.15 Bemerkung. Wie wir in Beispiel 1.2.10 iv) gesehen haben, ist die Existenz der leeren Menge äquivalent dazu, dass es überhaupt eine Menge gibt.

Die Vereinigung von Mengen ist nicht durch unsere bisherigen Axiome abgedeckt. Mit dem **Vereinigungsmengenaxiom**, dem **Ersetzungsaxiom** und dem **Paarmengenaxiom** der Mengenlehre folgt:

1.2.16 Satz (Vereinigungsmengen)**.** i) *Seien I eine Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine durch I indizierte Familie von Mengen. Dann existiert auch die* Vereinigungsmenge

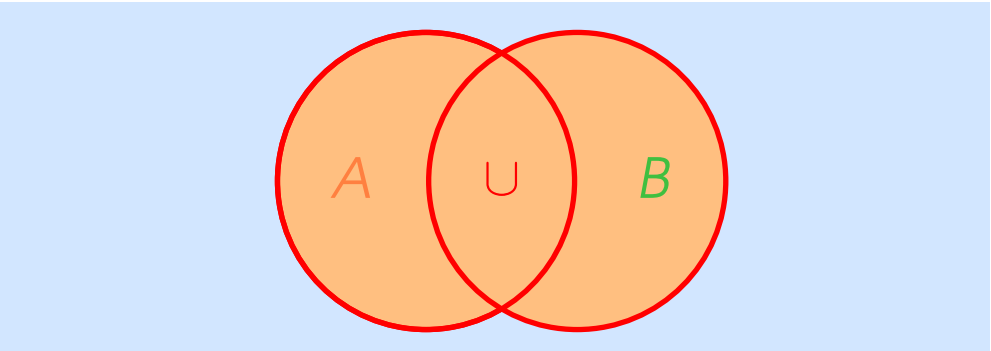
$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{ X \mid \exists i \in I : X \in A_i \}.$$

ii) *Zu zwei Mengen A und B existiert deren* Vereinigung

$$A \cup B := \{ X \mid X \in A \vee X \in B \}.$$

1.2.17 Bemerkung. i) Mit einer *durch I indizierten Familie* meinen wir, dass für jeden Index $i \in I$ eine Menge A_i gegeben ist.

ii) Die Mengenoperation „$\cup$“ entspricht dem logischen „$\vee$“.



1.2.18 Axiom (Potenzmengenaxiom)**.** *Zu jeder Menge A existiert die* Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$*, deren Elemente die Teilmengen von A sind.*

$$\mathcal{P}(A) := \{ X \mid X \subset A \}.$$

1.2.19 Beispiel. i) Sei A eine Menge. Dann gilt $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ und $A \in \mathcal{P}(A)$.
ii) $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. (Die Potenzmenge der leeren Menge ist nicht leer, sondern enthält (genau) ein Element!)
iii) $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{ \varnothing, \{\varnothing\} \}$.
iv) $\mathcal{P}(\{ 0, 1 \}) = \{ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\} \}$.

1.2.20 Bemerkung. Die Konstruktion aus Beispiel 1.2.19 lässt sich iterieren, um **endliche** Mengen mit sehr vielen Elementen zu kreieren (s. Aufgabe 6.2.4). Zusammen mit dem Teilmengenaxiom erhalten wir endliche Mengen mit jeder gewünschten Anzahl von Elementen.[13]

Mit dem **Paarmengenaxiom** kann man zwei Mengen A und B ihr *geordnetes Paar* (A, B) zuordnen. Die charakteristische Eigenschaft ist

$$\forall U, V, X, Y : (U, V) = (X, Y) \iff (U = X) \wedge (V = Y). \tag{1.2}$$

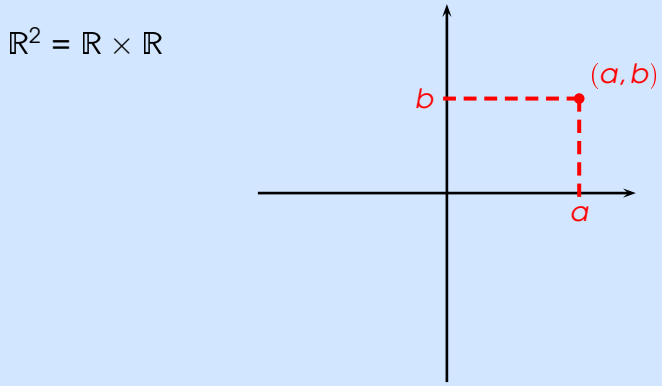
Gegeben zwei Mengen A und B, so bilden die geordneten Paare mit erster Komponente in A und zweiter Komponente in B eine Menge:

1.2.21 Satz. *Zu zwei Mengen A und B existiert das* kartesische Produkt

$$A \times B := \{ (X, Y) \mid X \in A \wedge Y \in B \}.$$

Das kartesische Produkt wird als Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ konstruiert.

1.2.22 Bemerkung. Aus der Schule ist das kartesische Produkt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit seinen kartesischen Koordinaten bekannt.



1.2.23 Bemerkung. Das Russelsche Paradoxon basierte auf der Konstruktion der „Menge" aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Das Paradoxon wurde bereits mit der logischen Sprache eliminiert. Die Frage, ob es eine Menge M gibt, die sich selbst enthält ($M \in M$), kann mit den bis jetzt angegebenen Axiomen nicht geklärt werden. Das Axiomensystem der Mengenlehre

[13] Abgesehen von der Tatsache, dass wir noch nicht über die natürlichen Zahlen verfügen und daher momentan gar nicht zählen können.

beinhaltet jedoch das **Fundierungsaxiom**, aus dem folgt, dass es **keine** Menge M mit $M \in M$ gibt.

Den axiomatischen Aufbau der Mengenlehre ist z.B. in den Büchern (5) und (16) dargestellt. Bevor man sich jedoch darein vertieft, sollte man erst etwas Erfahrung mit der Mathematik machen.

1.3 Die natürlichen Zahlen

Wie in 1.2.20 bemerkt, reichen die bisherigen Axiome aus, um endliche Mengen zu konstruieren. Die Existenz einer unendlichen Menge ist noch nicht gewährleistet. Das Unendlichkeitsaxiom liefert uns die Existenz einer solchen Menge, genauer einer Menge von natürlichen Zahlen. Mit den natürlichen Zahlen können wir dann mathematisch genau sagen, was mit endlichen und unendlichen Mengen überhaupt gemeint ist (s. Zusatzaufgabe 6.3.4 und Definition 1.9.1).

1.3.1 Definition. Gegeben seien eine Menge N, ein Element $0 \in N$ und eine Selbstabbildung[14] $\nu\colon N \longrightarrow N$.

i) Die Daten $(N, 0, \nu)$ erfüllen die *Peano-Axiome*, wenn gilt:

(P1) Das Element 0 ist nicht im Bild von ν enthalten. $\forall n \in N : \nu(n) \neq 0$.

(P2) Die Abbildung ν ist injektiv. $\forall n_1, n_2 \in N : \nu(n_1) = \nu(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$.

(P3) Es sei $A \subset N$ eine Teilmenge, so dass gilt:

- $0 \in A$.
- Gilt $n \in A$, dann auch $\nu(n) \in N$.

Dann folgt $A = N$. $\forall A \subset N : \big((0 \in A) \wedge (\forall n : n \in A \Rightarrow \nu(n) \in A)\big) \Rightarrow A = N$.

Falls die Peano-Axiome (P1)-(P3) erfüllt sind, dann nennen wir ν die *Nachfolgerabbildung*.

ii) Ein Tripel $(N, 0, \nu)$, das die Peano-Axiome erfüllt, heißt eine *Menge von natürlichen Zahlen*.

Aus dem naiven Umgang mit den natürlichen Zahlen sind die Peano-Axiome bekannt. Es ist interessant zu wissen, dass die Peano-Axiome die natürlichen Zahlen (inklusive der Zusatzstrukturen Addition, Multiplikation und Anordnung) vollständig bestimmen. Dies werden wir im Folgenden herausarbeiten. Zunächst zeigt das **Unendlichkeitsaxiom**:

1.3.2 Satz. *Es gibt eine Menge von natürlichen Zahlen.*

1.3.3 Bemerkung. Die Peano-Axiome sind selbst nicht Bestandteil des Axiomensystems der Mengenlehre, sondern aus den Axiomen der Mengenlehre **folgt**, dass es eine Menge gibt, die den Peano-Axiomen genügt.

1.3.4 Lemma. *Es sei $(N, 0, \nu)$ eine Menge von natürlichen Zahlen. Dann gilt:*

$$\text{Bild}(\nu) := \{\, \nu(n) \mid n \in N \,\} = N \setminus \{0\}.$$

[14] Für den Begriff „Abbildung" verweisen wir auf (14), Definition 2.4.2, S. 45, und (15), S. 9.

Beweis. Wir definieren $B := \text{Bild}(\nu) \cup \{0\}$. Es gilt $0 \in B$, und $n \in B$ impliziert $\nu(n) \in B$, weil ja jedes Element der Form $\nu(n)$, $n \in N$, in B enthalten ist. Damit gilt $B = N$ nach dem dritten Peano-Axiom. Da wegen (P1) $0 \notin \text{Bild}(\nu)$, folgt

$$\text{Bild}(\nu) = \big(\text{Bild}(\nu) \cup \{0\}\big) \setminus \{0\} = N \setminus \{0\},$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Für das Folgende fixieren wir eine Mengen $\mathbb{N}$ von natürlichen Zahlen, setzen $1 := \nu(0)$ und $n+1 := \nu(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Das Prinzip der vollständigen Induktion

Es sei $\mathscr{A}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Familie von Aussagen. Es gelte:
- (Induktionsanfang – I.A.) $\mathscr{A}(0)$ ist wahr.
- (Induktionsschritt – I.S.) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathscr{A}(n) \Rightarrow \mathscr{A}(n+1)$.
  (Die Aussage $\mathscr{A}(n)$ wird dabei Induktionsvoraussetzung – I.V. – genannt.)

Dann ist $\mathscr{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(Zur Rechtfertigung betrachte man

$$A := \{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathscr{A}(n) \text{ ist wahr} \,\} \subset \mathbb{N}.$$

Das dritte Peano-Axiom (P3) impliziert $A = \mathbb{N}$.)

1.3.5 Bemerkung. Der Induktionsschritt funktioniert auch, wenn die Aussage $\mathscr{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ falsch ist. Das folgt aus der Wahrheitstabelle für „$a \Rightarrow b$“ (s. S. 6). Der Induktionsanfang ist also wesentlich. Manchmal können sich auch andere Fehler in eine Induktion einschleichen (s. Aufgabe 6.2.3).

Wir führen die vollständige Induktion an zwei Beispielen vor. Dabei greifen wir wieder einigen Eigenschaften der natürlichen und reellen Zahlen vor.

1.3.6 Satz (Der Satz vom kleinen Gauß[15]). *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis (durch vollständige Induktion über n).

$$n = 0: \qquad \sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}.$$

$$n \to n+1: \qquad \sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n + 1 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

[15] Johann Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), (bedeutendster) deutscher Mathematiker und Physiker. Gauß hat diese Formel im Alter von neun Jahren entdeckt, als der Lehrer der Klasse die Aufgabe, alle Zahlen von eins bis hundert zu summieren, zur Beschäftigung gestellt hat.

1.3.7 Satz (Bernoullische[16]Ungleichung). *Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $x > -1$. Dann gilt*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis (durch vollständige Induktion über n).

$$n = 0: \qquad (1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x.$$

$$n \to n+1: \qquad (1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{1+x>0 \text{ \& I.V.}}{\geq} (1+nx)\cdot(1+x) =$$

$$= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \overset{nx^2 \geq 0}{\geq} 1 + (n+1)x.$$

□

Rekursive Definition

1.3.8 Satz (Dedekindscher Rekursionssatz). *Es seien A eine Menge, $f: A \longrightarrow A$ eine Selbstabbildung und $a_0 \in A$. Dann existiert genau eine Abbildung $F: \mathbb{N} \longrightarrow A$ mit*

- $F(0) = a_0$
- $F(n+1) = f(F(n))$, $n \in \mathbb{N}$.

Der Dedekindsche Rekursionssatz erlaubt die rekursive Definition von Folgen. Dies wird in den Beispielen klar werden.

Beweis. Eine Abbildung $F: \mathbb{N} \longrightarrow A$ ist durch einen Funktionsgraphen

$$\Gamma_F \subset \mathbb{N} \times A$$

gegeben (s. (2), S. 8; (14), S. 46). Dieser Funktionsgraph hat die Eigenschaft

0) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $a_n \in A$ mit $(n, a_n) \in \Gamma_F$.

Die Rekursionsbedingungen liefern die folgenden Bedingungen an Γ_F:

i) $(0, a_0) \in \Gamma_F$.

ii) $\forall (n,a) \in \mathbb{N} \times A: (n,a) \in \Gamma_F \Rightarrow (n+1, f(a)) \in \Gamma_F$.

Wir betrachten zuerst diejenigen Teilmengen von $\mathbb{N} \times A$, die i) und ii) erfüllen. Sei also

$$G := \left\{ H \subset \mathbb{N}\times A \,\middle|\, \text{i) } (0,a_0) \in H \wedge \text{ii) } \forall (n,a) \in \mathbb{N}\times A: (n,a) \in H \Rightarrow (n+1, f(a)) \in H \right\}.$$

Die Konstruktion dieser Menge wird durch das Potenzmengenaxiom 1.2.18 (für $\mathbb{N} \times A$) und das Teilmengenaxion 1.2.9 erlaubt.

$$\mathbb{N} \times A \in G, \text{ also ist } G \text{ nicht leer.}$$

Wir setzen

$$\Gamma := \bigcap_{H \in G} H = \left\{ (n,a) \in \mathbb{N} \times A \,\middle|\, \forall H \in A: (n,a) \in H \right\}.$$

[16]Die Bernoullis sind ein schweizer Mathematiker- und Wissenschaftler-Klan niederländischer Abstammung. Die genannte Ungleichung geht auf Jakob I. Bernoulli (1655 - 1705) zurück.

Die Menge Γ erfüllt offenbar wieder i) und ii). Wir weisen die verbleibende Eigenschaft 0) durch vollständige Induktion über n nach.

$n = 0$. Auf Grund von i) gilt $(0, a_0) \in \Gamma$. Sei nun $a \neq a_0$. Wir definieren $\Gamma' := \Gamma \setminus \{(0, a)\}$. Da mit $a \neq a_0$ auch $(0, a) \neq (0, a_0)$ gilt (s. (1.2)), hat Γ' weiterhin Eigenschaft i). Eigenschaft ii) für Γ' folgt aus Eigenschaft ii) für Γ und der Tatsache, dass gemäß (P1) $n + 1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Konstruktion von Γ' gilt $\Gamma' \subset \Gamma$. Da $\Gamma' \in G$, gilt nach Konstruktion von Γ auch $\Gamma \subset \Gamma'$. Nach Lemma 1.2.8 haben wir $\Gamma' = \Gamma$. Dies heißt aber gerade $(0, a) \notin \Gamma$.

$n \to n + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung existiert genau ein Element $(n, a_n) \in \Gamma$. Wegen Eigenschaft ii) von Γ finden wir in Γ auch das Element $(n + 1, a_{n+1})$ mit $a_{n+1} := f(a_n)$. Sei nun $b \neq a_{n+1}$. Wir bilden $\Gamma' := \Gamma \setminus \{(n + 1, b)\}$. Auf Grund des ersten Peano-Axioms (P1) gilt $n+1 \neq 0$ und folglich $(0, a_0) \neq (n+1, b)$. Somit erfüllt Γ' noch Eigenschaft i). Schauen wir uns jetzt Eigenschaft ii) an: Seien $m \neq n$ und $(m, a) \in \Gamma'$. Wegen $(m + 1, f(a)) \in \Gamma$ und $(m + 1, f(a)) \neq (n + 1, b)$, weil $m \neq n$, folgt $(m + 1, f(a)) \in \Gamma'$. Sei weiter $(n, a) \in \Gamma'$. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung gilt $a = a_n$. Da $(n + 1, f(a_n)) = (n + 1, a_{n+1}) \in \Gamma$ und $(n + 1, b) \neq (n + 1, f(a_n))$ haben wir auch $(n + 1, f(a_n)) \in \Gamma'$. Also haben wir Eigenschaft ii) für Γ' verifiziert. Wie zuvor folgt $\Gamma' = \Gamma$ und $(n + 1, b) \notin \Gamma$.

Wir schreiben

$$\Gamma = \{\, (n, a_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Dazu gehört die Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{N} &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto a_n. \end{aligned}$$

Diese Abbildung erfüllt nach Konstruktion $F(0) = a_0$ und $F(n + 1) = a_{n+1} = f(a_n) = f(F(n))$. Wir müssen noch die Eindeutigkeit zeigen. Sei also $F'\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ eine weitere Abbildung mit $F'(0) = a_0$ und $F'(n+1) = f(F'(n))$. Wir zeigen durch Induktion über n, dass $F(n) = F'(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. $F = F'$.

$n = 0$: $\quad F(0) = a_0 = F'(a_0)$.

$n \to n + 1$: $F(n + 1) = f(F(n)) \overset{\text{I.V.}}{=} f(F'(n)) = F'(n + 1)$. □

1.3.9 Bemerkung. Man kann den Dedekindschen Rekursionssatz auch zu Ausgangsdaten

$$a_0 \in A \quad \text{und} \quad f_n\colon A^{\times(n+1)} := \{\, (a_0, \ldots, a_n) \mid a_i \in A,\ i = 0, \ldots, n \,\} \longrightarrow A,\ n \in \mathbb{N},$$

formulieren und definiert damit eine Abbildung $F\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ mit

$$F(0) = a_0 \quad \text{und} \quad F(n + 1) = f_n\big(F(0), \ldots, F(n)\big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit dieser Version können wir Rekursionen definieren, in denen der Wert $F(n+1)$ aus den $n + 1$ vorhergehenden $F(0)$,...,$F(n)$ berechnet wird. Wir können auch die Rekursionsvorschrift in jedem Schritt ändern.

1.3.10 Beispiel. i) (Addition von natürlichen Zahlen) Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir wollen die Abbildung $m+_$ erklären. Dazu wenden wir den Dedekindschen Rekursionssatz auf $\nu\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und $a_0 = m$ an. Damit erhalten wir eine Abbildung $\alpha_m\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\alpha_m(0) = m$ und $\alpha_m(n + 1) = \nu(\alpha_m(n)) = \alpha_m(n) + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Nun definieren wir

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\longmapsto m + n := \alpha_m(n). \end{aligned}$$

ii) (Multiplikation von natürlichen Zahlen) Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir möchten die Multiplikation mit m einführen. Wir benutzen den Dedekindschen Rekursionssatz

mit $\alpha_m\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und $a_0 = 0$. Dies führt zu einer Abbildung $\mu_m\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\mu_m(0) = 0$ und $\mu_m(n+1) = m + \mu_m(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Die Multiplikation ist jetzt durch

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m,n) &\longmapsto m \cdot n := \mu_m(n) \end{aligned}$$

gegeben.

iii) (Die Fakultät) Für jede natürliche Zahl wird ihre *Fakultät* rekursiv durch

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

erklärt. Wir wenden die Variante aus Bemerkung 1.3.9 mit $a_0 = 0$ und

$$\begin{aligned} f_n\colon \mathbb{N}^{\times(n+1)} &\longrightarrow \mathbb{N}, \\ (k_0, \ldots, k_n) &\longmapsto (n+1) \cdot k_n, \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$, an.

1.3.11 Satz (Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen)**.** *Sei $(N, 0_N, \nu)$ eine Menge von natürlichen Zahlen. Dann existiert genau eine **bijektive** Abbildung*

$$F\colon \mathbb{N} \longrightarrow N$$

mit

$$F(0) = 0_N \quad \textit{und} \quad F(n+1) = \nu(F(n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit einer Abbildung $F\colon \mathbb{N} \longrightarrow N$ mit $F(0) = 0$ und $F(n+1) = \nu(F(n))$, $n \in \mathbb{N}$, folgt direkt aus dem Dedekindschen Rekursionssatz. Natürlich können wir den Rekursionssatz auch für die Menge N und die Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto n+1$, anwenden. So erhalten wir eine Abbildung

$$G\colon N \longrightarrow \mathbb{N}$$

mit

$$G(0) = 0 \quad \text{und} \quad G(\nu(n)) = G(n) + 1, \quad n \in N.$$

Wir untersuchen $G \circ F\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &(G \circ F)(0) = 0 \quad \text{und} \\ &(G \circ F)(n+1) = G(F(n+1)) = G(\nu(F(n))) = G(F(n)) + 1 = (G \circ F)(n) + 1. \end{aligned}$$

Dieselben Eigenschaften hat $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.3.8 gilt $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Mit demselben Recht kann man $F \circ G = \mathrm{id}_N$ schließen. Die Abbildung F ist umkehrbar, d.h. bijektiv (vgl. (14), Folgerung 2.4.6, S. 50). □

Der nächste Satz enthält die Rechenregeln für die Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen.

1.3.12 Satz. *Die in Beispiel* 1.3.10 *eingeführten Rechenoperationen erfüllen folgende Gesetzmäßigkeiten:*

i) *(Neutralelement der Addition)* $\forall n \in \mathbb{N} : n + 0 = n = 0 + n$.
ii) *(Kommutativgesetz der Addition)* $\forall m, n \in \mathbb{N} : m + n = n + m$.
iii) *(Assoziativgesetz der Addition)* $\forall l, m, n \in \mathbb{N} : (l + m) + n = l + (m + n)$.
iv) *(Neutralelement der Multiplikation)* $\forall n \in \mathbb{N} : n \cdot 1 = n = 1 \cdot n$.
v) *(Kommutativgesetz der Multiplikation)* $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \cdot n = n \cdot m$.
vi) *(Assoziativgesetz der Multiplikation)* $\forall l, m, n \in \mathbb{N} : (l \cdot m) \cdot n = l \cdot (m \cdot n)$.
vii) *(Distributivgesetz)* $\forall l, m, n \in \mathbb{N} : l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$.

Beweis. Aus der rekursiven Definition der Addition (Beispiel 1.3.10 i) ergibt sich folgende Gleichung, die wir des Öfteren im Beweis bemühen werden:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m+(n+1) = (m+n)+1. \tag{1.3}$$

i) Es gilt $n+0 = F_n(0) = n$ nach Definition. Die Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto 0+n$, erfüllt $0+0 = 0$ und $0+(n+1) = (0+n)+1$. Aus der Eindeutigkeitsaussage im Rekursionssatz folgt, dass die Abbildung die Identität ist, d.h. $0+n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Wir beweisen die Gültigkeit der Aussagen $\mathscr{A}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, durch Induktion über n. Dabei ist

$$\mathscr{A}(n) := (\forall m \in \mathbb{N} : m+n = n+m).$$

Im Induktionsschritt wird ebenfalls eine vollständige Induktion vorkommen, so dass es sich um eine doppelte Induktion handelt.

$n = 0$: Dieser Fall wurde in i) behandelt.

$n \to n+1$: Wir beweisen durch Induktion über m, dass $m+(n+1) = (n+1)+m$ für jede natürliche Zahl m gilt.

$m = 0$: Dies ist wieder in i) enthalten.

$m \to m+1$: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(m+1)+(n+1) &\overset{(1.3)}{=} \big((m+1)+n\big)+1 \overset{\text{I.V. für } n}{=} \big(n+(m+1)\big)+1 \overset{(1.3)}{=} \\
&\overset{(1.3)}{=} \big((n+m)+1\big)+1 \overset{\text{I.V.}}{=} \big((m+n)+1\big)+1 \overset{(1.3)}{=} \\
&\overset{(1.3)}{=} \big(m+(n+1)\big)+1 \overset{\text{I.V. für } m}{=} \big((n+1)+m\big)+1 \overset{(1.3)}{=} \\
&\overset{(1.3)}{=} (n+1)+(m+1).
\end{aligned}$$

iii) Wir fixieren l und m und beweisen durch vollständige Induktion, dass $(l+m)+n = l+(m+n)$ für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Der Fall $n = 0$ folgt direkt aus i).

Der Induktionschritt $n \to n+1$ gestaltet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
(l+m)+(n+1) &\overset{(1.3)}{=} \big((l+m)+n\big)+1 \overset{\text{I.V.}}{=} \big(l+(m+n)\big)+1 \overset{(1.3)}{=} \\
&\overset{(1.3)}{=} l+\big((m+n)+1\big) \overset{(1.3)}{=} l+\big(m+(n+1)\big).
\end{aligned}$$

iv) Für $m, n \in \mathbb{N}$ haben wir $m \cdot 0 = \mu_m(0) = 0$ und $m \cdot (n+1) = \mu_m(n+1) = m+\mu_m(n) = m+m \cdot n = m \cdot n+m$. Für $n = 0$ liefert dies $m \cdot 1 = m$. Jetzt zeigen wir durch Induktion über n, dass $1 \cdot n = n$.

$n = 0$: $\quad 1 \cdot 0 = 0$.

$n \to n+1$: $1 \cdot (n+1) = 1 \cdot n+1 \overset{\text{I.V.}}{=} n+1$.

v) Hier benötigen wir wieder eine doppelte Induktion. Durch Induktion über n wird gezeigt:

$$\forall n : \quad \mathscr{A}(n) := (\forall m \in \mathbb{N} : m \cdot n = n \cdot m).$$

$n = 0$: Wir haben $m \cdot 0 = 0$ nach Definition. Dass auch $0 \cdot m$ für alle m gilt, folgt leicht aus der Rekursionsvorschrift.

$n \to n+1$: Durch vollständige Induktion über m weisen wir nach, dass $m \cdot (n+1) = (n+1) \cdot m$, $m \in \mathbb{N}$. Der Fall $m = 0$ ergibt sich aus den Vorüberlegungen.

Für den Induktionsschritt $m \to m+1$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
(m+1) \cdot (n+1) &= (m+1) \cdot n+m+1 \overset{\text{I.V. für } n}{=} n \cdot (m+1)+m+1 = \\
&= n \cdot m+n+m+1 \overset{\text{I.V.+ii)}}{=} m \cdot n+m+n+1 = \\
&= m \cdot (n+1)+n+1 \overset{\text{I.V. für } m}{=} (n+1) \cdot m+n+1 \\
&= (n+1) \cdot (m+1).
\end{aligned}$$

vii) Wegen des Kommutativgesetzes für die Multiplikation ist die Aussage gleichwertig mit der Aussage: $\forall l, m, n \in \mathbb{N} : (m+n) \cdot l = m \cdot l + n \cdot l$. Wir halten m und n fest und führen Induktion über l.

$l = 0$: Hier gilt $(m+n) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = m \cdot 0 + n \cdot 0$.

$l \to l+1$: $(m+n)\cdot(l+1) = (m+n)\cdot l + m + n \overset{\text{I.V.}}{=} m\cdot l + n\cdot l + m + n \overset{\text{ii)}}{=} m\cdot l + m + n\cdot l + n = m\cdot(l+1) + n\cdot(l+1)$.

vi) Wiederum fixieren wir l, m und beweisen durch Induktion über n, dass $(l \cdot m) \cdot n = l\cdot(m \cdot n)$.

$n = 0$: In diesem Fall erhalten wir auf beiden Seiten der Gleichung null.

$n \to n+1$: Wir dürfen bereits das Distributivgesetz verwenden: $(l\cdot m)\cdot(n+1) = (l \cdot m) \cdot n + l \cdot m \overset{\text{I.V.}}{=} l\cdot(m \cdot n) + l \cdot m = l\cdot(m \cdot n + m) = l\cdot(m\cdot(n+1))$. □

Die letzte wichtige Struktur auf den natürlichen Zahlen, die wir benötigen, ist ihre Anordnung.

1.3.13 Definition. Es sei A eine Menge. Eine *Anordnung von A* ist eine Relation[17] „$\leq$" mit folgenden Eigenschaften:

- (Transitivität) $\forall a, b, c \in A : (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$.
- (Antisymmetrie) $\forall a, b \in A : (a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow a = b$.
- (Totalität) $\forall a, b \in A : (a \leq b) \vee (b \leq a)$.

1.3.14 Bemerkung. Die Totalität impliziert die Reflexivität: $\forall a \in A : a \leq a$.

1.3.15 Schreibweise. Es seien $a, b \in A$. Wenn $a \leq b$ und $a \neq b$ gilt, dann schreiben wir $a < b$ Wir schreiben auch $a \geq b$ für $b \leq a$ und $a > b$ für $b < a$..

1.3.16 Bemerkung. Antisymmetrie und Totalität sagen aus, dass für zwei **verschiedene** Elemente $a, b \in A$ **entweder** $a < b$ **oder** $b < a$ gilt.

Mittels der Addition von natürlichen Zahlen können wir folgende Anordnung auf $\mathbb{N}$ erklären.

1.3.17 Definition. $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 \leq n_2 :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n_2 = n_1 + k$.

1.3.18 Satz. *Die Relation „$\leq$" ist eine Anordnung der natürlichen Zahlen. Des Weiteren gilt:*

a) *Seien $l, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und gilt $n_1 \leq n_2$ bzw. $n_1 < n_2$, dann gilt auch $n_1 + l \leq n_2 + l$ bzw. $n_1 + l < n_2 + l$.*

b) *Für $l, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $n_1 \leq n_2$ folgt $n_1 \cdot l \leq n_2 \cdot l$.*

Im Beweis werden wir eine Tatsache über die Addition benötigen, die wir voranstellen.

1.3.19 Behauptung. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, k \longmapsto n + k$, injektiv.*

[17] Der Begriff „Relation" wird in (14), Definition 2.3.1, S. 38, und (15), S. 8, erklärt.

Beweis. Wie nicht anders zu erwarten, wird diese Aussage durch Induktion über n bewiesen. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen.

$n \to n+1$: Es seien $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, so dass $(n+1)+k_1 = (n+1)+k_2$. Nach Assoziativ- und Kommutativgesetz gilt dann auch $(n+k_1)+1 = (n+k_2)+1$. Da „+1" nach dem zweiten Peano-Axiom injektiv ist, ergibt sich $n+k_1 = n+k_2$. Nach Induktionsvoraussetzung heißt das $k_1 = k_2$. □

Beweis von Satz 1.3.18. Wir überprüfen erst die beiden Zusätze. Seien $n_1 \leq n_2$ und $k \in \mathbb{N}$, so dass $n_2 = n_1 + k$.

Zusatz a). Auf Grund von Behauptung 1.3.19 genügt es, die Version mit „$\leq$" zu verifizieren. Es gilt $n_2 + l = (n_1 + k) + l = (n_1 + l) + k$. Diese Gleichung zeigt $n_1 + l \leq n_2 + l$.

Zusatz b). Wir haben $n_2 \cdot l = (n_1 + k) \cdot l = n_1 \cdot l + k \cdot l$ und folglich $n_1 \cdot l \leq n_2 \cdot l$.

Transitivität von „$\leq$". Seien $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, so dass $n_1 \leq n_2$ und $n_2 \leq n_3$. Es gibt somit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 = n_1 + k_1$ und $n_3 = n_2 + k_2$. Wir finden

$$n_3 = n_2 + k_2 = (n_1 + k_1) + k_2 = n_1 + (k_1 + k_2) \text{ und damit } n_1 \leq n_3.$$

Antisymmetrie von „$\leq$". Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \leq n_2$ und $n_2 \leq n_1$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 = n_1 + k_1$ und $n_1 = n_2 + k_2$. Wir berechnen $n_1 = n_1 + (k_1 + k_2)$. Da die Addition von n_1 nach Behauptung 1.3.19 eine injektive Abbildung liefert, gilt $k_1 + k_2 = 0$. Dann muss aber $k_1 = k_2 = 0$ und daher $n_1 = n_2$ gelten. Denn wäre etwa $k_1 \neq 0$, dann existierte wegen Lemma 1.3.4 ein k_1' mit $k_1 = k_1' + 1$. Also $k_1 + k_2 = k_1' + 1 + k_2 = (k_1' + k_2) + 1 \neq 0$ wegen (P1).

Totalität von „$\leq$". Wir bilden die Menge

$$P := \{\, n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N} : (m \leq n) \vee (n \leq m) \,\}.$$

Die behauptete Totalität ist äquivalent zu $P = \mathbb{N}$. Für jede natürliche Zahl m gilt $0 \leq m$. Wir folgern $0 \in P$. Nun sei $n \in P$. Wir untersuchen $n+1$. Für $m = 0$ gilt $0 \leq n+1$. Für $m \neq 0$ gibt es nach Lemma 1.3.4 ein m' mit $m = m' + 1$. Wegen $n \in P$ haben wir $m' \leq n$ oder $m' \geq n$. Nach Zusatz a) folgt $m = m' + 1 \leq n + 1$ oder $m = m' + 1 \geq n + 1$. Aus (P3) folgt $P = \mathbb{N}$. □

1.3.20 Bemerkung. Für $l, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt sogar

$$n_1 \leq n_2 \iff n_1 + l \leq n_2 + l.$$

Wir müssen „$\Leftarrow$" zeigen. Wir erinnern daran, dass „$a \Rightarrow b$" gleichbedeutend mit „$\neg b \Rightarrow \neg a$" ist ((14), 2.1.4, S. 28) . Demnach ist „$n_1 > n_2 \Rightarrow n_1 + l > n_2 + l$" zu zeigen. Diese Aussage ist bereits im Satz enthalten.

1.3.21 Übung. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Gilt $m < n$, so auch $m + 1 \leq n$.

Die Anordnung der natürlichen Zahlen hat noch eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft.

1.3.22 Satz (Das Prinzip vom kleinsten Element)**.** *Sei $P \subset \mathbb{N}$ eine **nichtleere** Teilmenge. Dann existiert ein $n_0 \in P$, so dass*

$$\forall n \in P : n_0 \leq n.$$

Beweis. Wir bilden die Menge der unteren Schranken für P:

$$S := \{\, m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in P : m \leq n \,\}.$$

Unsere Behauptung sagt $S \cap P \neq \varnothing$. Wir glauben das nicht und nehmen $S \cap P = \varnothing$ an. Sicherlich gilt $0 \in S$. Sei ferner $m \in S$. Dann gilt $m \leq n$ für jedes $n \in P$. Da $S \cap P = \varnothing$, haben wir $m \neq n$ und somit $m < n$ für alle $n \in P$. Nach Übung 1.3.21 gilt auch $m + 1 \leq n$ für $n \in P$, d.h. $m + 1 \in S$. Das dritte Peano-Axiom sagt nun $S = \mathbb{N}$. Wegen $S \cap P = \varnothing$ bleibt kein Platz für P, so dass $P = \varnothing$. Aber genau dies hatten wir in unserer Annahme ausgeschlossen. Die Behauptung muss also doch richtig sein. □

1.3.23 Definition. Eine Anordnung „$\leq$" auf einer Menge A, die das Prinzip vom kleinsten Element erfüllt, darf sich *Wohlordnung* nennen.

1.4 Die ganzen Zahlen

Der fundamentale Begriff der Äquivalenzrelation gestattet es uns, den ersten Schritt des in Abschnitt 1.1 beschriebenen Programms durchzuführen und die ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen zu konstruieren.

1.4.1 Definition. i) Es sei A eine Menge. Eine Relation „$\sim$" auf A heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- (Reflexivität) $\forall a \in A : a \sim a$.
- (Symmetrie) $\forall a, b \in A : a \sim b \Rightarrow b \sim a$.
- (Transitivität) $\forall a, b, c \in A : a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

ii) Es seien A eine Menge, „$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf A und $a \in A$. Die *Äquivalenzklasse von a* ist die Menge

$$[a] := \{ b \in A \mid b \sim a \}.$$

Ein Element $c \in [a]$ heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse.

1.4.2 Bemerkung. Auf Grund der Reflexivität gilt $a \in [a]$, $a \in A$, d.h. eine Äquivalenzklasse ist niemals leer.

1.4.3 Lemma. *Es seien A eine Menge, „$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf A und $a, b \in A$. Dann gilt entweder $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \varnothing$.*

Beweis. Es seien $a, b \in A$, so dass $[a] \cap [b] \neq \varnothing$. Wir zeigen $[a] \subset [b]$. Dazu wählen wir ein Element $c \in [a] \cap [b]$. Sei $d \in [a]$. Es gilt $d \sim a$ und $c \sim a$. Wegen der Symmetrie haben wir auch $a \sim c$, so dass die Transitivität $d \sim c$ liefert. Weiterhin gilt $c \sim b$. Wiederum mit Transitivität ergibt sich $d \sim b$, d.h. $d \in [b]$. Jedes Element d von $[a]$ ist auch Element von $[b]$, also $[a] \subset [b]$.

In diesem Argument dürfen wir die Rollen von a und b vertauschen und sehen damit, dass auch $[b] \subset [a]$ und letztendlich $[a] = [b]$ gilt. □

1.4.4 Bemerkung. Bemerkung 1.4.2 und Lemma 1.4.3 zeigen, dass die Menge A disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen ist.

1.4.5 Beispiel. i) Die einfachste Äquivalenzrelation ist die Gleichheit: $\forall a, b \in A : a \sim b :\Longleftrightarrow a = b$. Hier gilt $[a] = \{a\}$ für alle $a \in A$.

ii) Wir definieren die Relation „$\sim$" auf $\mathbb{N}$ durch

$$n_1 \sim n_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : \begin{cases} n_2 = n_1 + 12k, & \text{falls } n_1 \leq n_2 \\ n_1 = n_2 + 12k, & \text{falls } n_1 \geq n_2 \end{cases}.$$

Der Leser mag zur Übung überprüfen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. (Nur die Transitivität ist nicht trivial und erfordert einige Fallunterscheidungen. Leichter wird's mit den ganzen Zahlen ((14), S. 40).)

1.4.6 Lemma. *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $\overline{n} \in \{0, 1, ..., 11\}$, so dass $n \sim \overline{n}$. Die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1, ..., 11\} & \longrightarrow & \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\} \\ k & \longmapsto & [k] \end{array}$$

ist also eine Bijektion.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist offensichtlich. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.3.22 gibt es in der Menge $[n]$ ein kleinstes Element $\overline{n}$. Wenn $\overline{n} \geq 12$ ist, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\overline{n} = 12 + k$. Offenbar gilt $k < \overline{n}$ und $k \sim n$. Das widerspricht aber der Tatsache, dass $\overline{n}$ das kleinste Element in $[n]$ ist. □

Die gegebene Äquivalenzrelation wird durch eine (Analog-)Uhr realisiert: Eine Uhr identifiziert zwei Stunden genau dann, wenn sie sich um ein Vielfaches von 12 unterscheiden.

Im Folgenden werden wir eine Äquivalenzrelation benutzen, um aus den natürlichen Zahlen die ganzen zu konstruieren.

1.4.7 Definition. Es sei „$\sim$" die Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Longleftrightarrow \quad a + d = b + c.$$

1.4.8 Satz. *Die Relation „$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. **Reflexivität.** Es sei (a, b) ein Element von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Es gilt

$$(a, b) \sim (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad a + b = b + a.$$

Dass diese Gleichheit für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt, ist das Kommutativgesetz der Addition (Satz 1.3.12).

Symmetrie. Es seien $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so dass $(a, b) \sim (c, d)$, d.h.

$$a + d = b + c.$$

Dann gilt natürlich auch

$$b + c = a + d$$

und nach dem Kommutativgesetz

$$c + b = d + a.$$

Damit ist

$$(c,d) \sim (a,b)$$

gezeigt.

Transitivität. Gegeben seien $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$.

$$\begin{aligned} \text{Das bedeutet} \quad & a+d = b+c \\ \text{und} \quad & c+e = d+f. \end{aligned}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen liefert

$$a+d+c+e = b+c+d+f.$$

Nach Anwendung des Kommutativ- und Assoziativgesetzes erhalten wir

$$(a+e)+(c+d) = (b+f)+(c+d).$$

Die Injektivität der Addition von $c+d$ (Behauptung 1.3.19) zeigt

$$a+e = b+f.$$

Daraus folgt wie gewünscht $(a,b) \sim (e,f)$. □

1.4.9 Definition. $\mathbb{Z} := \{\, [a,b] \mid (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\}$.

Die Anschauung bei dieser Konstruktion ist, dass $[a,b]$ für $a-b$ steht. (Dies werden wir unten explizit machen.)

1.4.10 Definition. Wir statten $\mathbb{Z}$ wie folgt mit *Addition* und *Multiplikation* aus:

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ ([a,b],[c,d]) &\longmapsto [a+c, b+d]; \\ \cdot\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ ([a,b],[c,d]) &\longmapsto [ac+bd, ad+bc]. \end{aligned}$$

Bei dieser Definition waren wir etwas sorglos: Wir haben Repräsentanten benutzt, um die Abbildung zu erklären. Nun gibt es aber (unendlich) viele Möglichkeiten, eine gegebene ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ in der Form $[a,b]$ zu schreiben. Um z.B. zu zeigen, dass „+" eine Abbildung ist, müssen wir nachweisen, dass für ganze Zahlen $x,y \in \mathbb{Z}$ und $a,a',b,b',c,c',d,d' \in \mathbb{N}$ mit $[a,b] = x = [a',b']$ und $[c,d] = y = [c',d']$ auch $[a+b,c+d] = [a'+b',c'+d']$ gilt. Im Allgemeinen sagt man, dass eine Vorschrift auf einer Menge von Äquivalenzklassen, die mit Hilfe von Repräsentanten eingeführt wird, *wohldefiniert* ist, wenn sie nicht von der Auswahl eben dieser Repräsentanten abhängt.

Nicht jede Vorschrift, die uns einfällt, ist wohldefiniert. Z.B. könnten wir

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [a,b] &\longmapsto [a,0] \end{aligned}$$

anschauen. Es gilt $[5,1] = [4,0]$. Für $[5,1]$ liefert die Vorschrift das Ergebnis $[5,0]$ und für $[4,0]$ wieder $[4,0]$. Leider ist aber $[5,0] \neq [4,0]$. Damit ist f **keine** Abbildung.

1.4.11 Satz. *Die Vorschriften „+" und „·" aus Definition 1.4.10 sind wohldefiniert, d.h. für $a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{N}$ mit $[a,b] = [a',b']$ und $[c,d] = [c',d']$ gilt auch*

$$\begin{aligned}[a+b, c+d] &= [a'+b', c'+d'] \\ [ac+bd, ad+bc] &= [a'c'+b'd', a'd'+b'c'].\end{aligned}$$

Beweis. Wir führen den Beweis für die Multiplikation. Die Addition ist wesentlich einfacher.

Fall 1: $c = c'$, $d = d'$.

$$\begin{aligned}ac+bd+a'd+b'c &= (a+b')c+(a'+b)d = \\ &= (a'+b)c+(a+b')d = \\ &= ad+bc+a'c+b'd.\end{aligned}$$

Dies zeigt $[ac+bd, ad+bc] = [a'c+b'd, a'd+b'c]$.

Fall 2: Im allgemeinen Fall dürfen wir auf Grund von Fall 1 $a = a'$ und $b = b'$ voraussetzen. Eine analoge Rechnung zeigt $ac+bd+ad'+bc' = ad+bc+ac'+bd'$. □

1.4.12 Beobachtung. *Für $[a,b] \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$[a,b] + [b,a] = [a+b, a+b] = [0,0].$$

1.4.13 Definition. Die Relation „$\leq$" auf $\mathbb{Z}$ ist gegeben durch:

$$[a,b] \leq [c,d] \quad :\Longleftrightarrow \quad a+d \leq b+c.^{18}$$

Wir müssen uns vergewissern, dass die Definition von „$\leq$" sinnvoll ist. Seien z.B. $a, a', b, b', c, d \in \mathbb{N}$ mit $[a,b] = [a',b']$. Definitionsgemäß gilt $a+b' = a'+b$. Mit Satz 1.3.18 und Bemerkung 1.3.20 schließen wir

$$\begin{aligned}& a+d \leq b+c \\ \Longleftrightarrow\ & a'+a+d \leq a'+b+c \\ \Longleftrightarrow\ & a'+a+d \leq a+b'+c \\ \Longleftrightarrow\ & a'+d \leq b'+c.\end{aligned}$$

1.4.14 Satz. i) *Die Relation „$\leq$" ist eine Anordnung von $\mathbb{Z}$.*

ii) *Für zwei natürliche Zahlen $n, n' \in \mathbb{N}$ gilt*

$$n \leq n' \text{ bzw. } n < n' \quad \Longleftrightarrow \quad [n,0] \leq [n',0] \text{ bzw. } [n,0] < [n',0].$$

iii) *Ist $[a,b] \geq [0,0]$, dann gibt es genau eine natürliche Zahl n mit $[a,b] = [n,0]$.*

iv) *Für $[a,b] \leq [0,0]$ existiert eine und nur eine natürliche Zahl n, so dass $[a,b] = [0,n]$.*

[18] Auf der rechten Seiten bezeichnet „$\leq$" die Anordnung der natürlichen Zahlen.

Beweis. Teil i) lassen wir als Übung (s. Aufgabe 6.3.3). Teil ii) ist offensichtlich.

iii) Nach Definition bedeutet $[a,b] \geq [0,0]$, dass $a \geq b$. Daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a = b + n$. Wegen Behauptung 1.3.19 ist n eindeutig bestimmt. Offenbar haben wir $[a,b] = [n,0]$.

Punkt iv) wird analog beweisen. □

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \iota\colon \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & [n,0] \end{array}$$

hat folgende Eigenschaften:

- ι ist injektiv.
- $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : \iota(n_1 + n_2) = \iota(n_1) + \iota(n_2)$.
- $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : \iota(n_1 \cdot n_2) = \iota(n_1) \cdot \iota(n_2)$.
- $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 \leq n_2 \Longleftrightarrow \iota(n_1) \leq \iota(n_2)$.

Vermöge ι können wir $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ auffassen. Wir vereinbaren folgende, etwas missbräuchliche

Schreibweise. $n := [n,0] = \iota(n)$, $-n := [0,n]$, $n \in \mathbb{N}$.
Allgemeiner: $-x := (-1) \cdot x$, $x \in \mathbb{Z}$.

Man beachte, dass diese Konventionen miteinander verträglich sind, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : (-1) \cdot n = [0,1] \cdot [n,0] = [0,n] = -n.$$

Mit diesen Konventionen ist auch die Schreibweise

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

wieder gerechtfertigt.

1.4.15 Satz. *Das Tupel $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein* kommutativer Ring mit Eins*, d.h. es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:*

i) *(Neutralelement der Addition)* $\forall x \in \mathbb{Z} : x + 0 = x = 0 + x$.
ii) *(Kommutativgesetz der Addition)* $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x + y = y + x$.
iii) *(Assoziativgesetz der Addition)* $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (x + y) + z = x + (y + z)$.
iv) *(Existenz von inversen Elementen)* $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0 = y + x$.
Schreibweise: $-x := y$.
v) *(Neutralelement der Multiplikation)* $\forall x \in \mathbb{Z} : x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.
vi) *(Kommutativgesetz der Multiplikation)* $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = y \cdot x$.
vii) *(Assoziativgesetz der Multiplikation)* $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
viii) *(Distributivgesetz)* $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Beweis. Die Regeln i), ii), iii) folgen sofort aus der Definition und den entsprechenden Rechenregeln für natürliche Zahlen (Satz 1.3.12). Regel iv) haben wir bereits in Beobachtung 1.4.12 festgehalten.

Die Regeln v)-viii) ergeben sich aus den Regeln der Multiplikation natürlicher Zahlen (Satz 1.3.12) und der Beobachtung, dass

$$(-x)y = x(-y) = -(xy)$$

für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt. □

Wir halten folgende Eigenschaft der Anordnung fest (s. Aufgabe 6.3.3):

$$\begin{aligned} \forall a,b,c \in \mathbb{Z} : a < b &\Rightarrow a + c < b + c. \\ \forall a,b,c \in \mathbb{Z} : a \leq b &\Rightarrow \begin{cases} ac \leq bc, & \text{falls } c \geq 0 \\ ac \geq bc, & \text{falls } c \leq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

1.5 Die rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen lassen sich jetzt in ganz ähnlicher Weise aus den ganzen gewinnen wie die ganzen aus den natürlichen.

Wir kürzen $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ab.

1.5.1 Definition. Die Relation „$\sim$" auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ wird erklärt durch:

$$(a,b) \sim (c,d) \quad :\Longleftrightarrow \quad ad = bc.$$

1.5.2 Satz. *Bei „$\sim$" handelt es sich um eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.*

Beweis. S. Aufgabe 6.3.2. □

1.5.3 Definition. i) $\frac{a}{b} := [a,b]$, $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
ii) $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.
iii) Die Rechenoperationen auf $\mathbb{Q}$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} +: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\longmapsto \frac{ad + bc}{bd}; \\ \cdot: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\longmapsto \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

1.5.4 Satz. *Die Operationen „+" und „·" sind wohldefiniert.*

Beweis. S. Aufgabe 6.3.2. □

1.5.5 Definition. Für zwei rationale Zahlen a/b und c/d setzen wir:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ad \leq bc, & \text{falls } bd > 0 \\ ad \geq bc, & \text{falls } bd < 0 \end{cases}.$$

1.5.6 Satz. *Die Relation „$\leq$" ist eine Anordnung von $\mathbb{Q}$.*

Beweis. S. Aufgabe 6.3.3. □

Die genauen Eigenschaften der rationalen Zahlen und ihrer Anordnung werden wir im nächsten Abschnitt formulieren (Satz 1.6.8). Zum Abschluss dieses Abschnitts definieren wir die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \iota\colon \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ k & \longmapsto & \dfrac{k}{1}. \end{array}$$

Sie hat folgende Eigenschaften:

- ι ist injektiv.
- $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : \iota(k_1 + k_2) = \iota(k_1) + \iota(k_2)$.
- $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : \iota(k_1 \cdot k_2) = \iota(k_1) \cdot \iota(k_2)$.
- $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : k_1 \leq k_2 \Longleftrightarrow \iota(k_1) \leq \iota(k_2)$.

Wir können damit $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ auffassen. Die Rechenoperationen und die Anordnung von $\mathbb{Q}$ erweitern die entsprechenden Zusatzstrukturen auf $\mathbb{Z}$. Wir werden in Zukunft oft k statt $k/1$, $k \in \mathbb{Z}$, schreiben.

1.6 Die reellen Zahlen: Die Axiome

In diesem Abschnitt formulieren wir die Eigenschaften, die die reellen Zahlen haben sollen.

Wir beginnen mit den Körperaxiomen.

1.6.1 Definition. Ein Quintupel $(K, 0, 1, +, \cdot)$, das aus einer Menge K, Elementen $0, 1 \in K$ und Abbildungen $+\colon K \times K \longrightarrow K$ und $\cdot\colon K \times K \longrightarrow K$ besteht, nennt sich *Körper*, wenn folgende Regeln gelten:

(a) $(K, 0, +)$ ist eine *abelsche Gruppe*, d.h. es gilt
(Assoziativgesetz) $\forall x, y, z \in K : (x + y) + z = x + (y + z)$.
(Neutralelement) $\forall x \in K : x + 0 = x = 0 + x$.
(Inverse Elemente) $\forall x \in K \exists y \in K : x + y = 0 = y + x$.
Schreibweise: $-x := y$; Für $x, y \in K$ schreiben wir kurz $x - y$ statt $x + (-y)$.
(Kommutativgesetz) $\forall x, y \in K : x + y = y + x$.
(b) $0 \neq 1$.
(m1) (Assoziativgesetz) $\forall x, y, z \in K : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
(m2) (Neutralelement) $\forall x \in K : x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.
(m3) (Inverse Elemente) $\forall x \in K \setminus \{0\} \exists y \in K : x \cdot y = 1 = y \cdot x$.
Schreibweise: $x^{-1} := y$; Für $x \in K, y \in K \setminus \{0\}$ schreiben wir auch x/y oder $\dfrac{x}{y}$ statt $x \cdot y^{-1}$.
(m4) (Kommutativgesetz) $\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$.
(d) (Distributivgesetz) $\forall x, y, z : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Wir werden im Folgenden einen Körper einfach mit K anstatt mit $(K, 0, 1, +, \cdot)$ notieren.

1.6.2 Bemerkung. Es sei K ein Körper. Wir setzen $K^\star := K \setminus \{0\}$.

i) $\forall x \in K : x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$. In der Tat gilt $0 = 0+0$. Deshalb gilt $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Wir addieren $-(0 \cdot x)$ auf beiden Seiten und erhalten $0 = 0 \cdot x$.

ii) $\forall x, y \in K^\star : x \cdot y \in K^\star$. Da $x \neq 0$, existiert das zu x inverse Element x^{-1}. Wir berechnen $x^{-1} \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y \neq 0$. Wegen i) muss $x \cdot y \neq 0$ gelten.

iii) Nach ii) haben wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \cdot : K^\star \times K^\star & \longrightarrow & K^\star \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y. \end{array}$$

Aus den Körperaxiomen folgt, dass auch $(K^\star, 1, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

iv) Die Schreibweise in Definition 1.6.1 (wie auch in den Sätzen 1.3.12 und 1.4.15) suggeriert, dass das inverse Element eindeutig bestimmt ist. Seien $x \in K$ und $y, y' \in K$ zwei Elemente mit $x + y = y + x = 0 = x + y' = y' + x$. Dann gilt natürlich $y+(x + y) = y+(x + y')$ und mit dem Assoziativgesetz $(y + x) + y = (y + x) + y'$. Die letzte Gleichung wird zu $0 + y = 0 + y'$ und daher zu $y = y'$. Ähnlich argumentiert man bei der Multiplikation.

v) Für jedes Element $x \in K$ gilt $-x = (-1) \cdot x$. Das folgt aus $0 = 0 \cdot x = (1+(-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x+(-1) \cdot x$. Aus dem Distributivgesetz ergibt sich weiter $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ für alle $x, y \in K$.

1.6.3 Definition. Ein Paar $(K, \leq)$, das sich aus einem Körper K und einer Anordnung auf K zusammensetzt, heißt *angeordneter Körper*, wenn folgende Zusatzbedingungen erfüllt sind:

(o1) $\forall x, y, z \in K : x > y \Rightarrow x + z > y + z$.

(o2) $\forall x, y \in K : x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$.

1.6.4 Eigenschaften. *In einem angeordneten Körper $(K, \leq)$ gelten folgende Regeln:*

i) $\forall x, y \in K : x > y \Longleftrightarrow x - y > 0$.

ii) $\forall u, v, x, y \in K : u > v \wedge x > y \Rightarrow u + x > v + y$.
Insbesondere folgt: $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$.

iii) $\forall a, x, y \in K : a > 0 \wedge x > y \Rightarrow ax > ay$.

iv) $\forall x \in K : (x > 0 \Rightarrow -x < 0) \wedge (x < 0 \Rightarrow -x > 0)$.

v) $\forall x, y \in K : (x > 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy < 0) \wedge (x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy > 0)$.

vi) $\forall x \in K^\star : x^2 := x \cdot x > 0$.

vii) $1 > 0$.

viii) $\forall a, x, y \in K : a < 0 \wedge x > y \Rightarrow ax < ay$.

ix) $\forall x \in K^\star : x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$.

x) $\forall x, y \in K : x > y > 0 \Rightarrow x^{-1} < y^{-1}$.

xi) $\forall x, y \in K : x > y > 0 \Rightarrow x/y > 1$.

Beweis. i) Für die Richtung „$\Rightarrow$" wenden wir (o1) auf $x > y$ und $z = -y$ an und für „$\Leftarrow$" auf $x - y > 0$ und $z = y$.

ii) Mit (o1) erhalten wir die Implikationen $u > v \Rightarrow u + x > v + x$ und $x > y \Rightarrow x + v > y + v$. Mit der Transitivität von „$\leq$" folgt $u + x > v + y$. (Genauer folgt erst einmal $u + x \geq v + y$. Wäre $u + x = v + y$, so auch $u + x = v + x$ und damit $u = v$.)

iii) Wegen i) haben wir $x - y > 0$. Mit (o2) schließen wir $ax - ay = a(x - y) > 0$, so dass – wiederum nach i) – $ax > ay$.

iv) Wir addieren $-x$ zu der Ungleichung $x > 0$ und wenden (o1) an. Es folgt $0 = x+(-x) > -x$. Analog zeigt man $x < 0 \Rightarrow -x > 0$.

v) $x > 0 \wedge y < 0$: Nach iv) gilt $-y > 0$ und damit nach (o2) $-(xy) = x(-y) > 0$. Aus iv) folgt $xy = -(-(xy)) < 0$.

$x < 0 \wedge y < 0$: Dann haben wir wegen iv) $-x > 0$ und $-y > 0$. Nach (o2) gilt folglich $xy = (-x)(-y) > 0$.

vi) Dieser Teil ergibt sich für $x > 0$ aus (o2) und für $x < 0$ aus v).

vii) Wegen $1 \cdot 1 = 1$ folgt die Aussage direkt aus vi).

viii) Wir haben nach i) $x - y > 0$. Nach v) $ax - ay = a(x - y) < 0$, so dass ebenfalls nach i) $ax < ay$.

ix) Wäre $x^{-1} \leq 0$, dann folgte zunächst $x^{-1} < 0$ aus $x^{-1} \neq 0$. Mit v) schließen wir $1 = x^{-1} \cdot x < 0$, im Widerspruch zu vii).

x) Nach (o2) gilt $xy > 0$ und somit $1/xy > 0$ nach ix). Multiplizieren wir die Ungleichung $x > y$ mit $1/xy$ so wird daraus nach iii) $1/y > 1/x$.

xi) Wir haben $x > y$ und nach ix) auch $1/y > 0$. Mit (o2) erhalten wir $x/y > y/y = 1$. □

1.6.5 Definition. i) Der *Absolutbetrag* ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} |\cdot|\colon K & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{array}.$$

ii) Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sign}\colon K & \longrightarrow & \{-1,0,1\} \subset K \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases} \end{array},$$

wird als *Vorzeichenfunktion* angesprochen.

Der Verifikation der folgenden Tatsachen überlassen wir dem Leser als Übung (Aufgabe 6.4.2).

1.6.6 Eigenschaften. i) $\forall x \in K : x = \operatorname{sign}(x) \cdot |x|$.
ii) $\forall x, y \in K : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\operatorname{sign}(x \cdot y) = \operatorname{sign}(x) \cdot \operatorname{sign}(y)$.
iii) $\forall x \in K : (|x| \geq 0) \wedge (|x| = 0 \iff x = 0)$.
iv) $\forall x, \varepsilon \in K, \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$.

1.6.7 Satz (Dreiecksungleichung)**.**

$$\forall x, y \in K : |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Beweis. Für jedes $x \in K$ gilt $x \leq |x|$. Damit schließen wir nach Eigenschaft 1.6.4 ii), dass $x + y \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in K$ gilt.

Fall 1: $x + y \geq 0$. Dann haben wir $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.

Fall 2: $x+y < 0$. Jetzt gilt $|x+y| = -(x+y) = -x+(-y) \leq |-x|+|-y| = |x|+|y|$. □

Der folgende Satz fasst die Rechenregeln und die Eigenschaften der Anordnung des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zusammen. Den Beweis stellen wir als Übung.

1.6.8 Satz. *Das Paar $(\mathbb{Q}, \leq)$ ist ein angeordneter Körper.*

Warum sind wir dennoch nicht mit dem Körper $\mathbb{Q}$ zufrieden? Die Antwort, die diesmal in Termen der Anordnung formuliert ist, lautet, dass $\mathbb{Q}$ „Löcher" hat. Dazu greifen wir das Beispiel $\sqrt{2}$ wieder auf.

1.6.9 Beobachtung. *Durch $\sqrt{2}$ wird $\mathbb{Q}$ in die beiden Teile*

$$\begin{aligned} L &:= \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \vee x^2 < 2 \,\} \text{ und} \\ R &:= \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 > 2 \,\} \end{aligned}$$

unterteilt: $L \neq \varnothing$, $R \neq \varnothing$, $\mathbb{Q} = L \cup R$ und $L \preceq R$, i.e. $\forall x \in L, y \in R : x \leq y$.
Es gibt kein Element $z \in \mathbb{Q}$ mit $L \preceq z \preceq R$, d.h. kein $z \in \mathbb{Q}$, so dass $x \leq z \leq y$ für alle $x \in L$, $y \in R$ gilt.

Beweis. Die Behauptungen $L \neq \varnothing$ und $R \neq \varnothing$ sind klar. Die Gleichung $L \cup R = \mathbb{Q}$ folgt, weil es keine rationale Zahl z mit $z^2 = 2$ gibt, so dass für jede rationale Zahl z entweder $z^2 < 2$ oder $z^2 > 2$ gilt.

Schritt 1. Zeigen wir $L \preceq R$. Seien $x \in L$ und $y \in R$. Falls $x \leq 0$, so gilt $x \leq 0 < y$. Wenn $x > 0$, dann haben wir $x^2 < 2 < y^2$. Wir schließen

$$y - x = \frac{y^2 - x^2}{y + x} > 0.$$

Schritt 2. Sei $z \in \mathbb{Q}$ mit $L \preceq z \preceq R$. Es ist zu überprüfen, dass $z^2 = 2$ folgt. (Denn wir wissen ja, dass es in $\mathbb{Q}$ keine solche Zahl gibt.)

$$\text{Sei} \quad \eta := \frac{2z+2}{z+2} = z - \frac{z^2-2}{z+2}. \tag{1.4}$$

Wegen $z > 0$ gilt auch $\eta > 0$. Ferner

$$\eta^2 - 2 = \frac{(2z+2)^2 - 2(z+2)^2}{(z+2)^2} = \frac{2(z^2-2)}{(z+2)^2}. \tag{1.5}$$

Nehmen wir $z^2 - 2 > 0$ an, dann folgt $z > \eta$ aus (1.4) und $\eta^2 > 2$ aus (1.5). Die Eigenschaften $\eta > 0$ und $\eta^2 > 2$ besagen $\eta \in R$. Unser z soll $z \preceq R$ erfüllen. Wir haben aber gerade $z > \eta$ und $\eta \in R$ nachgewiesen. Die Annahme $z^2 > 2$ führt also zum Widerspruch,

Ebenso vergewissert man sich, dass $z^2 < 2$ unmöglich ist. Der einzige Ausweg ist $z^2 = 2$. □

Nach diesem motivierenden Beispiel können wir genau sagen, was es für einen angeordneten Körper bedeutet, keine Löcher zu haben.

1.6.10 Definition. Ein angeordneter Körper $(K, \leq)$ wird *ordnungsvollständig* genannt, wenn es zu je zwei Teilmengen $A, B \subset K$ mit den Eigenschaften $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ und $A \preceq B$ immer noch ein Element „zwischen A und B" gibt, d.h. $z \in K$ mit $A \preceq z \preceq B$ existiert .

Wie die vorherigen Diskussionen zeigen, ist der Körper der rationalen Zahlen nicht ordnungsvollständig. Dies ist der Defekt von $\mathbb{Q}$, an dem wir Anstoß genommen haben.

1.6.11 Übung. Es sei $(K, \leq)$ ein ordnungsvollständiger Körper. In K haben wir das Element $2 = 1 + 1$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ wie auch jede andere Quadratwurzel in K existiert.

Wir benötigen noch eine alternative Charakterisierung der Ordnungsvollständigkeit.

1.6.12 Definition. Es seien K ein angeordneter Körper und $A \subset K$ eine Teilmenge.

i) Eine Zahl $s \in K$ heißt *obere* (bzw. *untere*) *Schranke von A*, wenn gilt: $\forall x \in A : x \leq s$ (bzw. $s \leq x$).

ii) Eine Zahl $s \in K$ heißt *Supremum von A*, wenn sie die kleinste obere Schranke von A ist, d.h.

- s ist obere Schranke von A und
- für jede obere Schranke s' von A findet man $s \leq s'$.

Schreibweise: $\sup(A) := s$.

iii) Entsprechend definiert man das *Infimum* $\inf(A)$ *von A* als die größte untere Schranke von A, sofern existent.

iv) Die Menge A heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn sie eine obere (bzw. untere) Schranke besitzt. Ist A sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, so nennen wir A *beschränkt*.

v) Sei A eine Menge mit Supremum $\sup(A)$. Gilt $\sup(A) \in A$, so wird das Supremum auch *Maximum* genannt und mit $\max(A)$ notiert. Entsprechend heißt das Infimum von A *Minimum von A*, wenn es in der Menge A enthalten ist. In diesem Fall schreibt man $\min(A)$ für $\inf(A)$.

1.6.13 Bemerkung. Das Supremum oder Infimum von A muss selbst, wenn es existiert, nicht zu A gehören.

1.6.14 Satz. *Für einen angeordneten Körper K sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) *K ist ordnungsvollständig.*

ii) *Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von A besitzt ein Supremum.*

iii) *Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von A besitzt ein Infimum.*

Beweis. Wir weisen die Äquivalenz von i) und ii) nach. Der Leser mag zur Übung die Äquivalenz von i) und iii) überprüfen.

„i)⇒ii)". Es sei $A \subset K$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge. Die zweite Eigenschaft besagt, dass

$$S := \{\, s \in K \mid s \text{ ist obere Schranke von } A \,\}$$

nicht leer ist. Offensichtlich gilt $A \preceq S$. Auf Grund der Ordnungsvollständigkeit von K existiert $s \in K$ mit $A \preceq s \preceq S$. Offenbar ist s das Supremum von A.

„ii)⇒i)". Es seien $A, B \subset K$, so dass $A \neq \varnothing \neq B$ und $A \preceq B$. Jedes Element von B ist offenbar eine obere Schranke für A. Für das Supremum $s = \sup(A)$ gilt folglich $s \preceq B$. Die Ungleichung $A \preceq s$ ist bereits in der Definition des Supremums enthalten. □

1.7 Die reellen Zahlen: Eine Konstruktion

Wir führen nun die Konstruktion der reellen Zahlen als Menge der Dedekindschen Schnitte der rationalen Zahlen durch. Im Anhang des nächsten Kapitels werden wir eine weitere Konstruktion über Cauchy-Folgen rationaler Zahlen präsentieren.

1.7.1 Definition. Eine Teilmenge $R \subset \mathbb{Q}$ heißt (*Dedekindscher*) *Schnitt*, wenn sie folgenden Anforderungen genügt:
(s0) $R \neq \varnothing$, $R \neq \mathbb{Q}$.
(s1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \alpha \in R \wedge \beta \geq \alpha \Rightarrow \beta \in R$.
(s2) R enthält kein kleinstes Element, d.h. $\inf(R) \notin R$, falls es $\inf(R)$ gibt.

1.7.2 Bemerkung. i) Sei R ein Schnitt. Wir setzen $L := \mathbb{Q} \setminus R$. Nach Definition gilt
$L \cap R = \varnothing$,
$L \neq \varnothing$, $R \neq \varnothing$ (nach (s0)),
$L \preceq R$ (nach (s1)).
Falls existent, gilt $\sup(L) = \inf(R)$ und $\sup(L) \in L$ wegen (s2) und $L \cup R = \mathbb{Q}$.
Ein Paar (L, R) mit diesen Eigenschaften wird in der Literatur Dedekindscher Schnitt genannt. Wie gerade gesehen genügt die Angabe von R.
ii) Für eine Teilmenge $R \subset \mathbb{Q}$, die nur (s0) und (s1) erfüllt, führen wir

$$R^* := \begin{cases} R, & \inf(R) \text{ existiert nicht} \\ R \setminus \{\inf(R)\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

ein. Die Menge R^* ist dann ein Schnitt.

1.7.3 Beispiel. i) Für jede rationale Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist

$$S_\alpha := \{ \beta \in \mathbb{Q} \mid \beta > \alpha \}$$

ein Dedekindscher Schnitt.
ii) Wir haben in Beobachtung 1.6.9 den Dedekindschen Schnitt zu $\sqrt{2}$ untersucht.

1.7.4 Definition. i) Die *Menge der reellen Zahlen* ist

$$\mathbb{R} := \{ R \subset \mathbb{Q} \mid R \text{ ist Dedekindscher Schnitt} \}.$$

ii) Die Relation „$\leq$" auf $\mathbb{R}$ wird durch

$$\forall R_1, R_2 \in \mathbb{R} : R_1 \leq R_2 :\Longleftrightarrow R_1 \supset R_2$$

festgelegt.

Wir bemerken, dass die Bildung von $\mathbb{R}$ nach dem Potenzmengenaxiom 1.2.18 und dem Teilmengenaxiom 1.2.9 zulässig ist.

1.7.5 Lemma. *Die Relation „$\leq$" ist eine Anordnung der reellen Zahlen.*

Beweis. Die Antisymmetrie und die Transitivität folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften der Mengeninklusion „$\subset$".

Totalität. Es seien $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$. Wenn $R_1 \supset R_2$ gilt, folgt $R_1 \leq R_2$, und wir sind fertig. Ansonsten existiert ein Element $\alpha \in R_2 \setminus R_1$. Wegen (s1) und $\alpha \notin R_1$ muss $\alpha < \beta$ für jedes $\beta \in R_1$ sein. Diese Ungleichung besagt aber nach (s1) für R_2, dass $\beta \in R_2$. Es folgt $R_2 \supset R_1$ und somit $R_2 \leq R_1$. □

Wir wollen $\mathbb{R}$ als ordnungsvollständigen Körper konstruieren. Das nächste Resultat zeigt, dass wir in Hinblick auf die Anordnung die richtige Definition getroffen haben.

1.7.6 Satz. *Die Menge $\mathbb{R}$ ist bzgl. der Anordnung „$\leq$" ordnungsvollständig.*[19]

Beweis. Wir wenden Kriterium iii) aus Satz 1.6.14 an. Es sei $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge. Es ist die Existenz von $\inf(\mathscr{A})$ nachzuweisen.

Sei

$$C := \bigcup_{R \in \mathscr{A}} R.$$

Es gilt: i) $\forall R \in \mathscr{A} : R \subset C$;
ii) Für $C' \in \mathbb{R}$ bedeutet $C' \leq \mathscr{A}$, dass $C' \supset R$ für alle $R \in \mathscr{A}$ und daher $C' \supset C$.

Wenn C eine reelle Zahl ist, sagt i) $R \geq C$ für alle $R \in \mathscr{A}$ und ii) $C' \leq C$ für jede untere Schranke C' von $\mathscr{A}$. Wir müssen jetzt noch (s0) - (s2) verifizieren.

(s0). Die Menge $\mathscr{A}$ ist nicht leer und nach unten beschränkt. Seien $R \in \mathscr{A}$ und $S \in \mathbb{R}$ mit $S \leq \mathscr{A}$. Dann haben wir $R \subset C \subset S$. Die zweite Inklusion haben wir hierbei aus ii) gefolgert. Da $R \neq \varnothing$, folgt $C \neq \varnothing$, und da $S \neq \mathbb{Q}$, folgt $C \neq \mathbb{Q}$.

(s1). Seien $\alpha \in C$ und $\beta \geq \alpha$. Es gibt ein $R \in \mathscr{A}$ mit $\alpha \in R$. Eigenschaft (s1) für R zeigt $\beta \in R$, so dass wegen $R \subset C$ auch $\beta \in C$ gilt.

(s2). Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha \leq C$. Wir müssen $\alpha \notin C$ beweisen. Dies ist gleichbedeutend mit $\alpha \notin R$ für alle $R \in \mathscr{A}$. Für $R \in \mathscr{A}$ haben wir $R \subset C$ und somit $\alpha \leq R$. Da R nach (s2) kein kleinstes Element enthält, schließen wir $\alpha \notin R$. □

Der obige Beweis springt zwischen den Interpretationen einer reellen Zahl als Element von $\mathbb{R}$ und Teilmenge von $\mathbb{Q}$ hin und her. Dies macht ihn konzeptionell anspruchsvoller als die bisherigen Beweise. Jetzt müssen wir uns noch um die Rechenoperationen auf den reellen Zahlen kümmern. Wir werden nur die notwendigen Konstruktionen angeben. Die Verifikationen, dass sie wirklich einen Körper ergeben, sind recht langwierig. Ein Teil steht in (2), Kapitel 4. Ganz ausführlich geht es in (9) und (11) zu.

Die Addition

[19] Wir hatten „Ordnungsvollständigkeit" nur für Körper definiert. In der Tat werden in der Definition nur die Anordnung „$\leq$" nicht aber die Rechenoperationen benutzt. Daher macht der Satz Sinn, obwohl wir $\mathbb{R}$ noch nicht mit den für einen Körper notwendigen Extras ausgestattet haben.

1.7.7 Definition. i) Für $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$ sei

$$R_1 + R_2 := \{\, \alpha + \beta \in \mathbb{Q} \mid \alpha \in R_1,\ \beta \in R_2 \,\}.$$

ii) Sei $R \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\widetilde{R} := \{\, \alpha \in \mathbb{Q} \mid \forall \beta \in R : \alpha + \beta > 0 \,\}$$

und

$$-R := \widetilde{R}^{\star} \quad \text{(s. Bemerkung 1.7.2 ii)}.$$

1.7.8 Bemerkung. Für S_0 erhalten wir

$$\widetilde{S}_0 = \{\, \alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha \geq 0 \,\}$$

und $S_0 = \widetilde{S}_0^{\star}$. Das Herausnehmen des Infimums ist damit eventuell notwendig.

Die Multiplikation

1.7.9 Definition. i) Das *Produkt* der beiden reellen Zahlen R_1, R_2 ist

$$R_1 \cdot R_2 := \{\, \alpha \cdot \beta \mid \alpha \in R_1, \beta \in R_2 \,\}, \text{ falls } R_1 \geq S_0 \text{ und } R_2 \geq S_0,$$

und

$$R_1 \cdot R_2 := \begin{cases} -\big((-R_1) \cdot R_2\big), & \text{falls } R_1 < S_0 \text{ und } R_2 \geq S_0 \\ -\big(R_1 \cdot (-R_2)\big), & \text{falls } R_1 \geq S_0 \text{ und } R_2 < S_0 \\ (-R_1) \cdot (-R_2), & \text{falls } R_1 < S_0 \text{ und } R_2 < S_0 \end{cases}.$$

ii) Für $R \in \mathbb{R}$ mit $R > S_0$ setzen wir

$$\widehat{R} := \{\, \alpha \in \mathbb{Q} \mid \forall \beta \in R : \alpha \cdot \beta \geq 1 \,\} \quad \text{und} \quad R^{-1} := \widehat{R}^{\star}.$$

iii) Für $R \in \mathbb{R}$ mit $R < S_0$ sei $R^{-1} := -((-R)^{-1})$.

1.7.10 Bemerkung. Es kann vorkommen, dass $\inf(\widehat{R}) \in \widehat{R}$. Ein Beispiel ist $R = S_1$. Daher wenden wir wieder die „$\star$-Konstruktion" aus Bemerkung 1.7.2 ii) an.

Der Körper der reellen Zahlen

Es gilt $S_0 \neq S_1$. Abermals ohne Beweis stellen wir fest, dass $(\mathbb{R}, 0 := S_0, 1 := S_1, +, \cdot)$ auch (d) erfüllt und mit der Anordnung „$\leq$" auch (o1) und (o2) (Definition 1.6.3). In Satz 1.7.6 haben wir bewiesen, dass $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig ist. Wir fassen alles nochmal zusammen in

1.7.11 Satz. *Das Tupel $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein ordnungsvollständiger angeordneter Körper.*

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \iota\colon \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & S_\alpha \end{array}$$

hat folgende Eigenschaften:

- ι ist injektiv.
- $\iota(\alpha_1 + \alpha_2) = S_{\alpha_1+\alpha_2} = S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2} = \iota(\alpha_1) + \iota(\alpha_2)$.
- $\iota(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = S_{\alpha_1\cdot\alpha_2} = S_{\alpha_1} \cdot S_{\alpha_2} = \iota(\alpha_1) \cdot \iota(\alpha_2)$.
- $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Longleftrightarrow S_{\alpha_1} \supset S_{\alpha_2} \Longleftrightarrow \iota(\alpha_1) \leq \iota(\alpha_2)$.

Somit können wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ als Erweiterung von $\mathbb{Q}$ auffassen. Mit $\mathbb{R}$ haben wir nun endlich den Zahlbereich gefunden, in dem wir die Analysis erfolgreich betreiben können Wir ändern nun unsere Notation wieder ab und bezeichnen reelle Zahlen mit Kleinbuchstaben und fassen rationale Zahlen als Elemente von $\mathbb{R}$ auf. Lediglich in den folgenden beiden Beweisen werden wir noch auf Dedekindsche Schnitte zurückgreifen. Wenn wir die Interpretation einer reellen Zahl x als Dedekindschen Schnitt herausstellen wollen, so schreiben wir R_x dafür. Bei einer rationalen Zahl α schreiben wir wie gehabt S_α. Das nächste Resultat besagt, dass die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen.

1.7.12 Satz. *Es seien x, y reelle Zahlen, und es gelte $x < y$. Dann existiert eine rationale Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit*

$$x < \alpha < y.$$

Beweis. Seien R_x und R_y die Schnitte. Nach Voraussetzung gilt $R_x \supsetneq R_y$. Wir wählen $\beta \in R_x \setminus R_y$. Nach (s2) für R_x existiert $\alpha \in R_x$ mit $\alpha < \beta$. Nach (s1) für R_x gilt $S_\alpha \subset R_x$. Da $\alpha \in R_x$ und $\alpha \notin S_\alpha$ gilt sogar $S_\alpha \subsetneq R_x$, d.h. $R_x < S_\alpha$.

Sei $\gamma \in R_y$. Es kann nicht $\gamma \leq \beta$ gelten, da sonst $\beta \in R_y$ aus (s1) folgt. Somit gilt $\beta < \gamma$ für alle $\gamma \in R_y$ und daher $S_\beta \supset R_y$. Zusammengenommen haben wir $S_\alpha < S_\beta \leq R_y$. Damit ist $x < \alpha < y$ gezeigt. □

Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf das Resultat 1.9.13, das aussagt, dass die Menge der reellen Zahlen „viel größer" ist als die Menge der rationalen Zahlen.

1.7.13 Folgerung (Satz des Archimedes[20]). *Zu jeder positiven reellen Zahl x existiert eine natürliche Zahl n mit $x < n$.*

Beweis. Analog zum Beweis des letzten Satzes finden wir ein $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $x < \alpha$. (Man nehme einfach $\alpha \in R_x$.) Wir schreiben $\alpha = m/n$ mit $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. (Dies ist möglich, weil $\alpha > 0$.) Wenn $n = 1$ gilt, sind wir fertig. Ansonsten haben wir $n > 1$ und damit $1/n < 1$ nach Eigenschaft 1.6.4 ix). Dann folgt mit 1.6.4 x) $m/n < m$ und zusammen $x < m/n < m$. □

Für die Geschichte dieses Satzes verweisen wir auf Abschnitt II.F in (10).

1.7.14 Folgerung (Satz des Eudoxos[21]). *Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existiert eine natürliche Zahl n, so dass*

$$\frac{1}{m} < \varepsilon, \quad \forall m \geq n.$$

[20] Archimedes von Syrakus (≈ 287 - 212 v.u.Z.), antiker griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur.

Beweis. Die Behauptung

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ist wegen Eigenschaft 1.6.4 x) äquivalent zu

$$m > n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wir schließen sofort mit dem Satz von Archimedes. □

Potenzen und der binomische Lehrsatz

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer wichtigen Formel, deren Beweis eine weitere schöne Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion ist.

1.7.15 Definition. Es seien $0 \leq k \leq n$ natürliche Zahlen. Der *Binomialkoeffizient (zu n und k)* ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

1.7.16 Lemma. *Für $0 \leq k < n$ gilt*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} + \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{(k+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{(k+1)!} + \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

Damit ist die Formel überprüft. □

1.7.17 Definition. i) Es sei x eine reelle Zahl. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n\end{array}$$

wird mit der Rekursionsvorschrift

- $x^0 := 1$
- $x^{n+1} := x\cdot x^n (= x^n\cdot x)$, $n \in \mathbb{N}$,

erklärt.

ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ setzen wir

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}.$$

[21] Eudoxos von Knidos ($\approx$ 390 - 338 v.u.Z.), berühmter griechischer Mathematiker, Astronom, Geograph, Arzt, Philosoph und Gesetzgeber der Antike.

1.7.18 Bemerkung. Insbesondere haben wir mit der Definition $0^0 = 1$ festgelegt.

1.7.19 Satz (Der binomische Lehrsatz)**.** *Es seien a und b reelle Zahlen. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist unmittelbar klar. Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n \overset{\text{I.V.}}{=} (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \\
&= a \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} + b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{k+1} \cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{k+1} \cdot b^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} = \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} + b^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} + b^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k} + b^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Bei einigen Umformung haben wir die offensichtliche Tatsache $\binom{l}{0} = \binom{l}{l} = 1$, $l \in \mathbb{N}$, benutzt und bei der vorletzten Lemma 1.7.16. □

1.7.20 Übung. Leiten Sie die Bernoullische Ungleichung für $x \geq 0$ aus dem binomischen Lehrsatz ab.

1.8 Das Supremum mit Hilfe von Dezimalzahlen

Da die Existenz des Supremums einer nichtleeren nach oben beschränkten Menge A eine zentrale Rolle für die Entwicklung der Analysis spielt (s. Abschnitt 2.3), wollen wir sie hier zusätzlich in der Sprache der Dezimalzahlen herleiten.

Sei

$$C = c_0, c_1 c_2 c_3 \cdots$$

eine obere Schranke von A. Wir definieren induktiv

$$\begin{aligned} s_0 &:= \max\{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in A : n \leq x \,\} \leq c_0 + 1, \\ s_{n+1} &:= \max\{\, s \in \{0, \ldots, 9\} \mid \exists x \in A : s_0, s_1 \cdots s_n s \leq x \,\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

1.8.1 Satz. *Es gilt*

$$\sup(A) = s := s_0, s_1 s_2 s_3 \cdots .$$

Beweis. **Fall 1.** Es gibt eine Neunerperiode. Dann definieren wir

$$n_0' := \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1 \wedge \forall k \geq n : s_k = 9 \,\}$$

als Beginn der Neunerperiode nach dem Komma und $n_0 := n_0' - 1$. Es gilt

$$s = s_0, s_1 \cdots s_{n_0 - 1}(s_{n_0} + 1).$$

Nach Konstruktion der Zahlen s_n, $n \in \mathbb{N}$, gilt $s > x$ für alle $x \in A$.

Nun sei $s' < s$. Wir schreiben $s' = s_0', s_1' s_2' \cdots$ als Dezimalbruch ohne Neunerperiode. Seien

$$\sigma_l := s_0, s_1 \cdots s_{n_0} \underbrace{9 \cdots 9}_{l\text{-mal}}, \quad l \in \mathbb{N},$$

$k_0 := \min\{\, k \in \mathbb{N} \mid k \geq n_0' \wedge s_k' < 9 \,\}$ und $l_0 := k_0 - n_0$. Damit

$$s' < \sigma_{l_0}.$$

Auf der anderen Seite gibt es nach Definition von s für jedes $l \in \mathbb{N}$ ein $x_l \in A$ mit $\sigma_l \leq x_l$. Somit haben wir $s' < x_{l_0}$, und s' ist keine obere Schranke für A.

Fall 2. Es gibt keine Neunerperiode. Es seien $x \in A$, $x \neq s$ und $x = x_0, x_1 x_2 \cdots$ die Dezimalbruchentwicklung ohne Neunerperiode. Sei weiter

$$n_0 := \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq s_n \,\}.$$

Es gilt

$$x \geq x_0, x_1 \cdots x_{n_0}.$$

Nach Definition von s ist daher $x_{n_0} > s_{n_0}$ ausgeschlosssen, und wir haben $x_{n_0} < s_{n_0}$ und $x < s$. Damit ist s eine obere Schranke für A. Seien $s' < s$ und $s' = s_0', s_1' s_2' \cdots$ die Dezimalbruchentwicklung ohne Neunerperiode. Definieren wir jetzt $n_0 := \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid s_n' < s_n \,\}$, so gilt

$$s' < s_0, s_1 \cdots s_{n_0}.$$

Nun wurde s_{n_0} so gewählt, dass ein $x \in A$ mit $x \geq s_0, s_1 \cdots s_{n_0}$ existiert. Da folglich $x > s'$, ist s' keine obere Schranke für A. □

Anhang. Mächtigkeiten

In diesem Abschnitt führen wir die notwendigen Begriffe ein, um von der „Größe" einer Menge zu reden. Dadurch erlangen wir zusätzliche Informationen zu den Konstruktionen, die wir bisher durchgeführt haben.

1.9.1 Definition. i) Wir definieren die Teilmengen $A_n \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$\begin{aligned} A_0 &:= \varnothing, \\ A_{n+1} &:= A_n \cup \{n+1\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \text{also } A_n &= \{1, \dots, n\}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

ii) Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $\alpha\colon A_n \longrightarrow M$ gibt. In diesem Fall nennen wir

$$\#M := n$$

die *Anzahl der Elemente von M*.[22]

iii) Eine Menge M, die nicht endlich ist, ist *unendlich*.

Schreibweise: $\#M = \infty$.

iv) Eine Menge M ist *abzählbar*, wenn sie leer ist oder es eine Surjektion $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$ gibt.

v) Die Menge M ist *abzählbar unendlich*, wenn sie abzählbar und unendlich ist.

vi) Eine Menge M, die nicht abzählbar ist, wird *überabzählbar* (*unendlich*) genannt.

1.9.2 Lemma. *Es seien A und B endliche Mengen und $\alpha\colon A \longrightarrow B$ eine injektive Abbildung. Es folgt*

$$\#A \leq \#B.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über $n := \#B$. Für $n = 0$ ist B die leere Menge. Die einzige Menge A, die überhaupt eine Abbildung nach B zulässt ist, ist die leere Menge. Damit ist der Induktionsanfang gemacht.

Für den Induktionsschluß nehmen wir $A = A_m$ mit $m \geq 1$ an. Wir schreiben $m = m' + 1$. Die Abbildung α induziert eine injektive Abbildung

$$\alpha'\colon A_{m'} \longrightarrow B \setminus \{\alpha(m)\}.$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $\#(B \setminus \{\alpha(m)\}) = \#B - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $m' \leq \#B - 1$ und daher $m = m' + 1 \leq \#B$. □

1.9.3 Folgerung. *Die Menge $\mathbb{N}$ ist unendlich.*

Als nächstes betrachten wir eine nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir die Abbildung

$$\begin{aligned} f_n\colon A^{\times(n+1)} &\longrightarrow A \\ (a_0, \dots, a_n) &\longmapsto \begin{cases} \min(A), & \text{falls } A = \{a_0, \dots, a_n\} \\ \min(A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}), & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

[22] Diese Definition ist nach Zusatzaufgabe 6.3.4 sinnvoll.

Wir definieren eine Abbildung $F\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ mit
- $F(0) := \min(A)$,
- $F(n+1) = f_n(F(0), ..., F(n))$, $n \in \mathbb{N}$.

1.9.4 Lemma. *Die Abbildung F ist surjektiv. Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist somit abzählbar.*

Beweis. Es sei

$$N = \{\, a \in A \mid \forall n \in \mathbb{N} : F(n) \neq a \,\} = A \setminus \mathrm{Bild}(F)$$

die Menge der Elemente von A, die nicht im Bild von F liegen. Falls N nicht leer ist, sei $n_0 = \min(N)$ (s. Satz 1.3.22). Die Menge

$$G = \{\, a \in A \mid a < n_0 \,\} \subset \mathrm{Bild}(F)$$

ist nicht leer, da $\min(A) = F(0) \in G$. Das größte Element von G ist

$$g_M := \max(G) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \forall g \in G : g \leq n \,\}.$$

Nach Definition von N und G gibt es ein Element $k \in \mathbb{N}$ mit $F(k) = g_M$. Es gilt $F(k+1) = \min(A \setminus \{\, F(0), ..., F(k) \,\}) \leq n_0$. Die Gleichung $F(k+1) = n_0$ widerspricht der Definition von N. Aus $F(k+1) < n_0$ folgt $F(k+1) \in G$. Da

$$g_M = F(k) = \min\big(A \setminus \{\, F(0), ..., F(k-1) \,\}\big)$$

und

$$F(k+1) = \min\big(A \setminus \{\, F(0), ..., F(k-1), g_M = F(k) \,\}\big)$$

folgt $g_M = F(k) < F(k+1)$. Dies wiederum widerspricht der Definition von g_M. Wir schließen daher, dass N leer und F surjektiv ist. □

1.9.5 Satz. *Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.*

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$E := \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1 \wedge F(n) = \min(A) \,\}.$$

Fall 1. Die Menge E ist nicht leer. Wir setzen $n := \min(E)$. Die Einschränkung $F_{|\{\,0,...,n-1\,\}}$ von F auf $\{\, 0, ..., n-1 \,\}$ ist immer noch surjektiv. Wir behaupten, dass sie auch injektiv ist. Es sei $k < l$. Wegen $F(k) = \min(A \setminus \{\, F(0), ..., F(k-1) \,\})$ und $F(l) = \min(A \setminus \{\, F(0), ..., F(l-1) \,\})$, folgt $F(k) < F(l)$. Damit sind die Mengen A und $\{\, 0, ..., n-1 \,\}$ gleichmächtig, und A ist eine endliche Menge mit n Elementen.

Fall 2. Die Menge E ist leer. Dann gilt $F(n) < F(n+1)$ für jede natürliche Zahl n. Induktiv folgt, dass $F(m) < F(n)$ für natürliche Zahlen $m < n$. Somit ist F injektiv, und A ist abzählbar unendlich. □

1.9.6 Folgerung. *Eine abzählbare Menge A ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.*

Beweis. Es sei $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ eine Surjektion. Wir definieren

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon A & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ a & \longmapsto & \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) = a \,\}. \end{array}$$

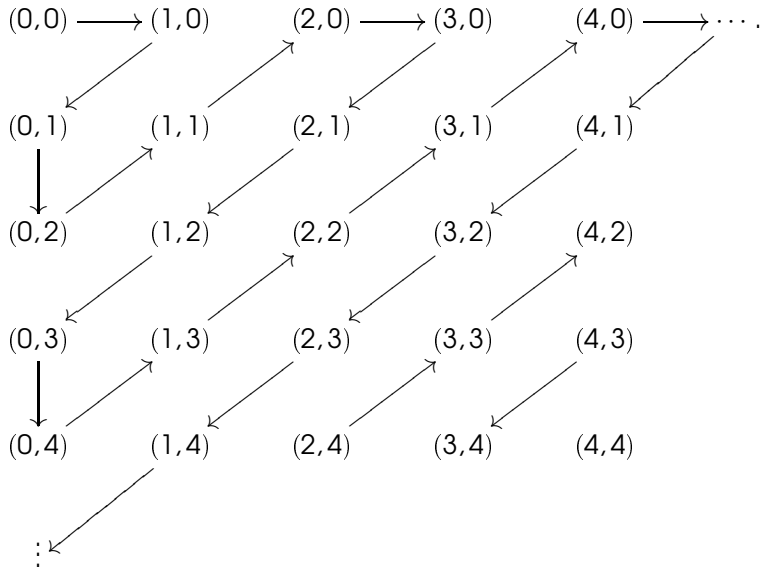
Diese Abbildung ist injektiv. Daher sind die Mengen A und Bild$(\alpha) \subset \mathbb{N}$ gleichmächtige Mengen, und wir schließen mit dem vorhergehenden Satz. □

1.9.7 Satz. *Das kartesische Produkt $A \times B$ zweier abzählbarer Menge A und B ist abzählbar.*

Beweis. Wir müssen eine Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ angeben. Das geschieht mit Cantors Diagonalverfahren. Wir betrachten

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{cases} (a+1,0), & \text{falls } b = 0 \text{ und } a+b \text{ gerade} \\ (a+1,b-1), & \text{falls } b > 0 \text{ und } a+b \text{ gerade} \\ (0,b+1), & \text{falls } a = 0 \text{ und } a+b \text{ ungerade} \\ (a-1,b+1), & \text{falls } a > 0 \text{ und } a+b \text{ ungerade} \end{cases} . \end{array}$$

Zusammen mit dem Startwert $F(0) = (0,0)$ ergibt sich nach dem Dedekindschen Rekursionssatz (Satz 1.3.8) eine Abbildung $F\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die man sich wie folgt veranschaulichen kann:



Wir zeigen durch Induktion über s die Aussage

$$\mathcal{A}(s) : \forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a+b = s) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} : F(n) = (a,b)).$$

$s = 0$. Aus $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $a + b = 0$ folgt $a = b = 0$, und wir haben $F(0) = (0,0)$.

$s \to s+1$. **Fall 1.** $s+1$ ist gerade. Wir zeigen durch Induktion über a:

$$\mathcal{B}(a) : (a > s+1) \vee (\exists n \in \mathbb{N} : F(n) = (a, s+1-a)).$$

$a = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung an s, ist $(0,s)$ im Bild von F enthalten. Sei etwa $F(n) = (0,s)$. Die Rekursionsvorschrift liefert $F(n+1) = (0,s+1)$.

$a \to a+1$. Falls $a+1 > s+1$, ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist $a+1 \leq s+1$ und daher auch $a \leq s+1$. Nach Induktionsvoraussetzung an a existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F(n) = (a, s+1-a)$. Die Rekursionsvorschrift zeigt $F(n+1) = (a+1, s-a)$.

Der zweite Fall, in dem $s+1$ ungerade ist, lässt sich genauso abhandeln. □

1.9.8 Folgerung. *Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.*

Beweis. Wir haben eine Surjektion $\sigma\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(a,b) \longmapsto [a,b]$. Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, folgt die Behauptung.

Da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ abzählbar ist und die Abbildung $\sigma\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star \longrightarrow \mathbb{Q}$, $(a,b) \longrightarrow a/b$, surjektiv, ist auch $\mathbb{Q}$ abzählbar.

Die beiden Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ enthalten die natürlichen Zahlen, und sind deshalb nicht endlich. □

1.9.9 Folgerung. *Eine seien A_n, $n \in \mathbb{N}$, abählbare Mengen. Dann ist auch die Menge*

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

abzählbar.

Beweis. Es seien $\sigma_n\colon \mathbb{N} \longrightarrow A_n$, $n \in \mathbb{N}$, Abzählungen. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \sigma\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ (m,n) & \longmapsto & \sigma_n(m) \end{array}$$

ist dann eine Surjektion. □

Im nächsten Schritt bemerken wir, dass die Potenzmenge $\boldsymbol{\mathcal{P}}(M)$ einer Menge M echt größer ist als die Menge M selbst. Zunächst beobachten wir, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon M & \longrightarrow & \boldsymbol{\mathcal{P}}(M) \\ m & \longmapsto & \{m\} \end{array}$$

injektiv ist. Damit hat $\boldsymbol{\mathcal{P}}(M)$ „mindestens so viele" Elemente wie M.

1.9.10 Satz. *Für jede Menge M gilt: Es gibt **keine** Surjektion*

$$\sigma\colon M \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}(M).$$

Beweis. Sei $\sigma\colon M \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}(M)$ eine Abbildung. Wir definieren

$$A := \{\, m \in M \mid m \notin \sigma(m) \,\} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(M).$$

Sei $a \in M$, so dass $\sigma(a) = A$. Es ergibt sich der Widerspruch

$$a \in \sigma(a) \quad \Longleftrightarrow \quad a \notin \sigma(a).$$

Daher kann es ein solches Element a nicht geben, und A liegt nicht im Bild von σ. □

1.9.11 Bemerkung. i) In obigem Beweis haben wir offenbar die Idee benutzt, die bei der Formulierung der Russelschen Antinomie verwandt wurde. Allerdings hatten wir diesmal den Ausweg, dass das fragliche Objekt gar nicht existierte.

ii) Der Satz zeigt, dass es überabzählbare Mengen gibt (z.B. $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{N})$). Er zeigt auch, dass es sehr viele verschiedene Größen unendlicher Mengen gibt. Definieren wir rekursiv $P_0 := \mathbb{N}$, $P_{n+1} := \boldsymbol{\mathcal{P}}(P_n)$, $n \in \mathbb{N}$, so sind die Mengen P_n für $n \geq 1$ überabzählbar und für $m < n$ gibt es immer eine injektive Abbildung $P_m \longrightarrow P_n$ aber keine surjektive.

iii) Die Anzahl der Elemente von $\mathbb{N}$ wird mit $\aleph_0$ bezeichnet, die von $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{N})$ mit $\aleph_1$. Die „Zahlen" $\aleph_0$ und $\aleph_1$ sind Beispiele für sogenannte Kardinalzahlen.

Bevor wir noch ein interessantes Phänomen in diesem Zusammenhang diskutieren, zeigen wir:

1.9.12 Satz. *Es gibt eine Bijektion*

$$\alpha\colon \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1] = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

Beweis. Jede Zahl $x \in [0,1)$ lässt sich in eindeutiger Weise als Dualbruch

$$0, s_0 s_1 s_2 \cdots, \quad s_n \in \{0,1\},\ n \in \mathbb{N},$$

schreiben, wenn man Einserperioden für $x \neq 1$ verbietet. Mit Hilfe der Theorie der Reihen lässt sich die Dualbruchentwicklung genauso rechtfertigen wie die Dezimalbruchentwicklung (s. Aufgabe 6.7.4). Explizit erhalten wir die s_n, $n \in \mathbb{N}$, wie folgt:

$$\begin{aligned} s_0 &:= \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \end{cases}, \\ s_{n+1} &:= \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, s_0 s_1 \cdots s_n + \frac{1}{2^{n+2}} \\ 1, & \text{falls } 0, s_0 s_1 \cdots s_n + \frac{1}{2^{n+2}} \leq x \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zunächst finden wir die Surjektion

$$\begin{aligned} \alpha\colon \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{N}) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto 0, s_0 s_1 \cdots \quad \text{mit } s_n = 0 \text{ für } n \notin A \text{ und } s_n = 1 \text{ für } n \in A. \end{aligned}$$

Es gilt z.B. $\alpha(\varnothing) = 0$ und $\alpha(\mathbb{N}) = 1$. In $\alpha(A)$ können Einserperioden auftreten. Das müssen wir uns jetzt genauer anschauen.

Es seien $A \subset \mathbb{N}$ eine nichtleere endliche Menge und $a := \max(a)$. Dann definieren A und

$$A^\star := (A \setminus \{a\}) \cup \left\{ n \in \mathbb{N} \,|\, n > a \right\}$$

dieselbe reelle Zahl. Wir erklären $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{e}}(\mathbb{N})$ als Menge der nichtleeren endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{per}}$ als Menge aller echten Teilmengen $A \subsetneq \mathbb{N}$, für die ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left\{ n \in \mathbb{N} \,|\, n > k \right\} \subset A.$$

Die Abbildung α induziert eine Bijektion

$$\alpha'\colon \boldsymbol{\mathcal{P}}'(\mathbb{N}) := \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{N}) \setminus \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{per}}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1].$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{e}}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{per}}(\mathbb{N}) \\ A & \longmapsto & A^{\star} \end{array}$$

ist bijektiv. (Der Leser möge sich zur Übung die Umkehrabbildung überlegen.)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir weiter $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(n)}(\mathbb{N}) \subset \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{e}}(\mathbb{N})$ als die Menge aller nichtleeren Teilmengen mit höchstens $n+1$ Elementen. Wir zeigen durch Induktion über n, dass $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{(n)}(\mathbb{N})$ abzählbar ist. Für $n = 0$ ist das offensichtlich. Für den Induktionsschluss benutzen wir die Surjektion

$$\begin{array}{rcl} \sigma\colon \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(0)}(\mathbb{N}) \times \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(n)}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(n+1)}(\mathbb{N}) \\ (A, B) & \longmapsto & A \cup B \end{array}$$

und Satz 1.9.7.

Nach Folgerung 1.9.9 ist

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{e}}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{P}}^{(n)}(\mathbb{N})$$

abzählbar.

Es folgt leicht (Stichwort: Hilberts[23] Hotel), dass $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{e}}(\mathbb{N})$ und $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{e}}(\mathbb{N}) \cup \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathrm{per}}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind und damit auch $\boldsymbol{\mathcal{P}}'(\mathbb{N})$ und $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{N})$. □

1.9.13 Folgerung. *Die reellen Zahlen sind überabzählbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass $[0, 1]$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind. Dazu suchen wir uns zwei Mengen E_0, E_1 mit $E_0, E_1 \notin \mathbb{R}$ und $E_0 \neq E_1$ (z.B. $E_0 = \mathbb{R}$ und $E_1 = \mathbb{R} \cup \{\mathbb{R}\}$). Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{ E_0, E_1 \} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} E_0, & \text{falls } x = 0 \\ E_1, & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2x-1} + 3, & \text{falls } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \end{array}$$

ist bijektiv. Da auch die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \beta\colon \mathbb{R} \cup \{ E_0, E_1 \} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ x+2, & \text{falls } x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } x = E_0 \\ 1, & \text{falls } x = E_1 \end{cases} \end{array}$$

bijektiv ist, haben wir unsere Behauptung belegt. □

Die Erweiterungen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ haben nicht zu einer Vergrößerung der Mächtigkeit geführt. Dagegen erhält man beim Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ eine echt größere Menge.

Die Mächtigkeiten der Teilmengen von $\mathbb{N}$ haben wir verstanden: Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist entweder endlich oder gleichmächtig mit $\mathbb{N}$. Die reellen Zahlen enthalten endliche Mengen, abzählbar unendliche Mengen und Mengen, die gleichmächtig mit $\mathbb{R}$ sind. Sind das schon alle Möglichkeiten?

[23] David Hilbert (1862 - 1943), deutscher Mathematiker

1.9.14 Die Kontinuumshypothese (Cantor 1878). *Es gibt keine Kardinalzahl zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$, d.h. eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist entweder endlich oder abzählbar unendlich oder gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.*

Die Kontinuumshypothese lässt sich im Axiomensystem der Mengenlehre weder beweisen noch wiederlegen. Genauer hat Gödel 1938 gezeigt, dass das Axiomensystem, das aus den Axiomen der Mengenlehre und der Kontinuumshypothese besteht, widerspruchsfrei ist, sofern das für das Axiomensystem der Mengenlehre gilt.[24] Dasselbe gilt für das Axiomensystem, dass aus den Axiomen der Mengenlehre und der **Negation** der Kontinuumshypothese besteht. Dies ist ein Resultat von Cohen aus dem Jahr 1960.[25]

[24] Man erinnere sich, dass letzteres sich nach Gödel nicht beweisen lässt.

[25] Paul Joseph Cohen (1934 - 2007), US-amerikanischer Logiker und Mathematiker. Cohen wurde für seine Arbeit zur Kontinuumshypothese die Fields Medaille, die höchste Auszeichnung für Mathematiker, verliehen.

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Folgen: Definitionen und erste Beispiele

In diesem Abschnitt stellen wir den Begriff der Folge vor und besprechen einige Beispiele, darunter die berühmte Fibonacci-Folge.

2.1.1 Definition. Eine *Folge reeller Zahlen* ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Schreibweise: Mit $a_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, schreiben wir eine Folge in der Form $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 0}$.

2.1.2 Bemerkung. Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mathbb{N}_{\geq m} := \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq m \,\}$$

und betrachten Abbildungen $f\colon \mathbb{N}_{\geq m} \longrightarrow \mathbb{R}$, die wir auch als Folgen bezeichnen. Diese werden in der Form $(a_n)_{n\geq m}$ notiert.

Der Begriff der Folgen und ihrer Grenzwerte ist der Grundstein für die Entwicklung der Analysis. Um eine Anschauung für Folgen zu gewinnen, kann man sich eine Folge als Messreihe vorstellen. Dabei werden in festen Zeitintervallen (Minuten, Monate, Jahre) Messwerte erhoben. Die Zahl a_0 ist der Ausgangswert, die Zahl a_1 der Messwert nach dem ersten Zeitintervall usw. In der Mathematik erstreckt sich diese Messreihe idealisiert ins Unendliche.

2.1.3 Beispiel. i) $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$. Die ersten Folgenglieder sind $1, 3, 5, 7, 9$. Die Folge liefert alle ungeraden natürlichen Zahlen in aufsteigender Reihenfolge.

ii) $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dies ist die Folge aller Zweierpotenzen. Sie beginnt mit $1, 2, 4, 8, 16$.

iii) $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\geq 1}$. Die ersten Folgenglieder sind $0,\ 1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5$.

iv) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$. Die Folge beginnt mit $-1,\ 1/2,\ -1/3,\ 1/4,\ -1/5$.

v) $0, 1, 0, 11, 0, 111, 0, 1111, 0, 11111, \ldots$. Der Leser möge sich das Bildungsgesetz für diese Folge überlegen.

Rekursiv definierte Folgen

2.1.4 Beispiel (Fibonaccis Kaninchen). Eine der berühmtesten Folgen ist die Fibonacci-Folge. Sie stammt aus dem Jahr 1202. Fibonacci beschreibt in seinem „Liber abaci" in einer Art Gedicht[1] die Entwicklung einer Kaninchenpo-

[1] Eine englische Übersetzung findet man in (17).

pulation und stellt die Aufgabe, das Bildungsgesetz der zugehörigen Folge zu ermitteln. Das Modell basiert auf folgenden Annahmen:

- Kaninchen werden nach einem Monat geschlechtsreif.
- Die Tragzeit beträgt einen Monat.
- Ein Paar Kaninchen produziert jeden Monat ein weiteres Paar Kaninchen als Nachkommen.
- Kaninchen sind unsterblich.
- Es kommen keine Kaninchen von außen hinzu, und es entweichen keine Kaninchen.
- Zu Beginn gibt es ein Paar Kaninchen.

Die Glieder der Fibonacci-Folgen sind

$$a_n := \#(\text{Kaninchenpaare nach } n \text{ Monaten}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die obigen Annahmen führen zu den Startwerten

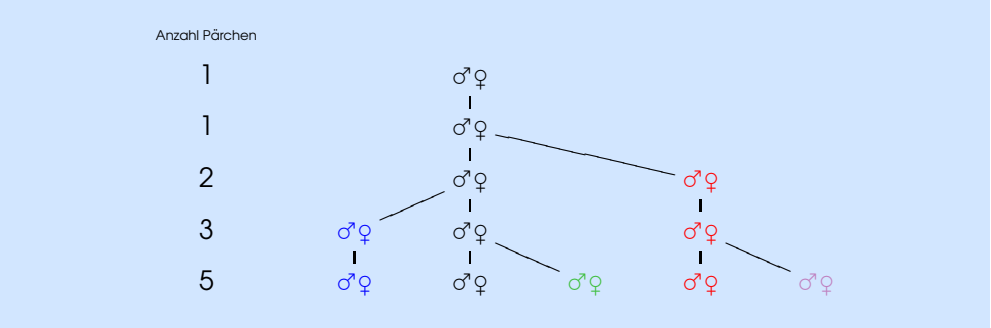
- $a_0 = 1$,
- $a_1 = 1$

und der Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

(Zum Zeitpunkt $n+1$ gibt es die Kaninchenpaare, die es zum Zeitpunkt n gab (Unsterblichkeit usw.) sowie die Neugeborenen. Diese stammen von den Kaninchen, die zum Zeitpunkt n geschlechtsreif waren, also schon zum Zeitpunkt $n-1$ vorhanden waren.) Die ersten Folgenglieder sind

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 8,\ a_6 = 13,\ a_7 = 21,\ a_8 = 34,\ a_9 = 55.$$



Die Fibonacci-Folge mag zwar die Vermehrung der Kaninchen nicht adäquat beschreiben, es gibt aber zahlreiche Prozesse in den Naturwissenschaften, die den Gesetzmäßigkeiten der Fibonacci-Folge genügen (Zusatzaufgabe 6.4.5).

Es ist im Übrigen möglich, die Rekursionsvorschrift aufzulösen und eine explizite Formel, die Formel von Moivre–Binet, für a_n anzugeben (s. Aufgabe 6.4.4).

2.1.5 Beispiel. i) Es seien $r, a_0 \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir bilden die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Startwert a_0 und Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} - a_n = r \cdot a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wenn wir uns die Folge wieder als Populationsmodell vorstellen, dann sagt die Formel, dass die Zu- bzw. Abnahme der Population proportional zum Bestand ist. Der Proportionalitätsfaktor ist r.

Ebenso beschreibt die Folge den radioaktiven Zerfall mit Zerfallsrate r.

Man kann sich die Folge auch als Kontostand vorstellen: Man beginnt mit dem Startkapital a_0 und lässt das Geld bei konstantem Zinssatz r auf der Bank.

Mit $q := 1 + r$ schreiben wir die Rekursionsvorschrift um zu

$$a_{n+1} = q \cdot a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $q = 0$ gilt $a_n = 0$ für $n > 0$. Wir setzen ab jetzt $q \neq 0$ voraus.

Behauptung. *Es gilt $a_n = q^n \cdot a_0$, $n \geq 0$.*

Dies verifizieren wir mit einem kleinen Induktionsbeweis. Es gilt $q^0 = 1$ (s. Definition 1.7.17), und wir haben $a_0 = q^0 \cdot a_0$. Das ist der Induktionsanfang.

Wir haben $a_{n+1} = q \cdot a_n = q \cdot (q^n \cdot a_0) = (q \cdot q^n) \cdot a_0 = q^{n+1} \cdot a_0$. Damit ist auch der Induktionsschritt gemacht. □

ii) Wir fixieren $q, a_0 \in \mathbb{R}$ wie vorher und zusätzlich $d \in \mathbb{R}$. Wir untersuchen die modifizierte Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} - a_n = r \cdot a_n + d.$$

Eine mögliche Interpretation lautet wie folgt: Die Zahl a_n beschreibe die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten. Diese nimmt ab ($r < 0$) und wird durch tägliche Gabe von Tabletten ($\rightsquigarrow d$) wieder erhöht.

Man kann sich die Folge auch als Sparplan bei der Bank vorstellen. Es gilt wieder der konstante Zinssatz r. Neben dem Startkapital a_0 wird zu vorgegebenen Zeitpunkten die Summe d hinzugefügt.

Mit $q = 1 + r$ schreiben wir die Rekursionsvorschrift als

$$a_{n+1} = q \cdot a_n + d.$$

Für $q = 0$ gilt $a_n = d$, $n > 0$. Wir nehmen ab jetzt $q \neq 0$ an. Es gilt

$$\begin{aligned}
a_1 &= q \cdot a_0 + d \\
a_2 &= q \cdot a_1 + d = q \cdot (q \cdot a_0 + d) + d = q^2 \cdot a_0 + q \cdot d + d \\
&\vdots \\
a_n &= q^n \cdot a_0 + q^{n-1} \cdot d + \cdots + q \cdot d + d = \\
&= q^n \cdot a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^k \cdot d = q^n \cdot a_0 + d \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k.
\end{aligned}$$

Die Summe ganz rechts spielt eine zentrale Rolle in der Theorie der Reihen. Für $q = 1$ haben wir $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = n$. Für andere Werte von q gilt:

2.1.6 Satz. *Sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis. $n = 0$. $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$.

$n \to n + 1$. $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1} + (1 - q^{n+1})/(1 - q)$, nach Induktionsvoraussetzug. Weiter

$$q^{n+1} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1}(1 - q) + 1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - q^{n+2} + 1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}.$$

Damit ist der Induktionsschritt getan. □

2.1.7 Folgerung. *Für die in Beispiel 2.1.5, ii), definierte Folge gilt*

$$a_n = \begin{cases} a_0 + d \cdot n, & \text{falls } q = 1 \\ q^n \cdot a_0 + d \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{falls } q \neq 1 \end{cases}, \quad n \geq 1.$$

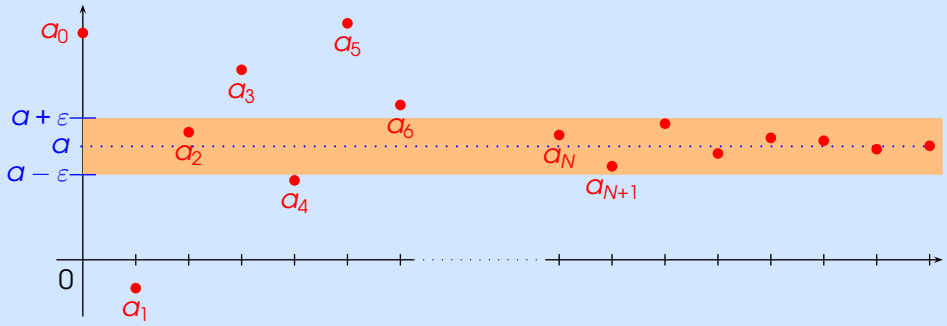
2.2 Folgen: Konvergenz

In den Beispielen haben wir gesehen, dass Folgen Prozesse in den Naturwissenschaften oder dem Finanzwesen beschreiben können. In diesen Fällen interessiert man sich für Zukunftsprognosen bzw. die Langzeitentwicklung einer Folge. Mathematisch formalisiert man dies durch die Begriffe der Konvergenz und des Grenzwerts.

2.2.1 Definition. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* a, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Konvergenz einer Folge.



2.2.2 Satz (Eindeutigkeit des Grenzwerts)**.** *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a, a' \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere sowohl gegen a als auch gegen a'. Dann folgt $a = a'$.*

Beweis. Wir geben uns $\varepsilon > 0$ vor. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq N: \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung 1.6.7 erhalten wir für $n \geq \mathbb{N}$

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| = |a_n - a| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Wegen $0 \leq |a - a'|$ bedeutet die Ungleichung $|a - a'| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, dass $|a - a'| = 0$ und damit $a - a' = 0$, d.h. $a = a'$ (s. Eigenschaften 1.6.6). □

Der obige Beweis ist typisch für den Gebrauch der Dreiecksungleichung in der Analysis. Ähnliche Schlussweisen werden uns im Folgenden sehr oft begegnen. Satz 2.2.2 ermöglicht die Vereinbarungen:

2.2.3 Definition. i) Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann heißt a der *Grenzwert* der Folge.
Schreibweise: $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

ii) Eine Folge heißt *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Man nennt sie *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

iii) Eine *Nullfolge* ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert.

2.2.4 Bemerkung. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Die Folge a_n konvergiert genau dann gegen a, wenn $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

2.2.5 Beispiel. i) (Konstante Folgen) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Wir bilden die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := a$, $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge ist offensichtlich konvergent mit Grenzwert a.

ii) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist eine Nullfolge: Nach dem Satz des Eudoxos (Folgerung 1.7.14) gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein N mit $1/N < \varepsilon$, so dass

$$\forall n \geq N: \quad \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

iii) Die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist ebenfalls eine Nullfolge: Für $n \geq 1$ haben wir

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

und wir schließen wie in ii).

iv) Die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen 1: Für $n \geq 1$ berechnen wir

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n}\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \left|\frac{-1}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

und wir beenden das Argument wie in ii).

v) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent: Nehmen wir an, sie konvergierte gegen $a \in \mathbb{R}$. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|(-1)^n - a| < 1/2$ für alle $n \geq N$. Dies führt zum Widerspruch

$$\begin{aligned} 2 &= |(-1)^{N+1} - (-1)^N| = |(-1)^{N+1} - a + a - (-1)^N| \leq \\ &\leq |(-1)^{N+1} - a| + |a - (-1)^N| = |(-1)^{N+1} - a| + |(-1)^N - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Eine notwendige Bedingung für Konvergenz

Wir beginnen das interessante und reichhaltige Studium der Konvergenz von Folgen mit einer einfachen Eigenschaft konvergenter Folgen.

2.2.6 Definition. i) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit

$$a_n \leq s \quad (\text{bzw. } s \leq a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gibt.

ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *beschränkt*, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

2.2.7 Bemerkung. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, wenn eine reelle Zahl $s > 0$ mit $|a_n| < s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.

2.2.8 Satz. *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $a \in \mathbb{R}$ ihr Grenzwert. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$ und setzen

$$s := \max\{\, |a_0|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a| \,\}.$$

Für $n \leq N - 1$ gilt $|a_n| \leq s$ nach Definition von s. Für $n \geq N$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq s.$$

Die Behauptung ist damit verifiziert. □

2.2.9 Beispiel. Wir untersuchen die Folge

$$\left(a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}.$$

Diese Folge ist höchst interessant. Zum einen ist die Untersuchung auf Konvergenz bereits recht aufwändig. Zum anderen ist ihr Grenzwert (vgl. Aufgabe 6.6.1 und 6.7.2), die Eulersche Zahl e, eine der berühmtesten und wichtigsten Zahlen der Mathematik.

Im Moment wollen wir nur nachweisen, dass die Folge beschränkt ist. Sie ist offensichtlich durch 1 nach unten beschränkt. [2]

Unsere nächste Behauptung lautet, dass die Folge durch 3 nach oben beschränkt ist. Mit der binomischen Formel 1.7.19 berechnen wir

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n-k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k}.$$

Nun gilt für $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!},$$

da die Faktoren $n/n,\ldots,(n-k+1)/n$ kleiner gleich 1 sind. Wir haben somit die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

abgeleitet. Als nächstes zeigen wir die Aussage

$$\forall k \geq 1 : \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

durch Induktion über k. Für $k = 1$ haben wir $1/1! = 1 = 1/2^0$. Im Induktionsschluss $k \to k + 1$ gehen wir wie folgt vor:

$$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k!} \overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \overset{k+1\geq 2}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}.$$

[2] Mit der Bernoullischen Ungleichung 1.3.7 berechnen wir die untere Schranke 2. Diese ist wegen $a_1 = 2$ optimal.

Zusammengenommen haben wir

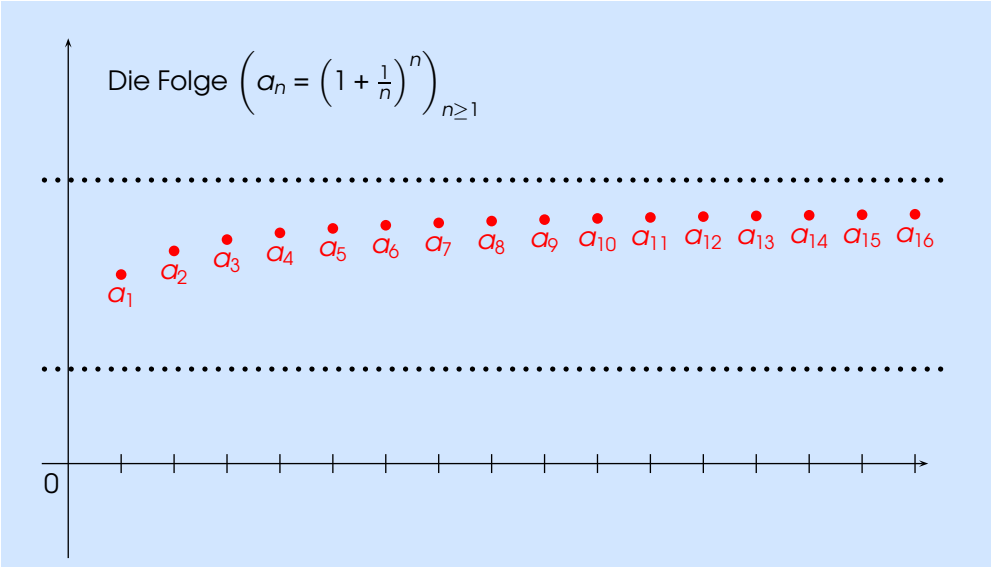
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

bewiesen. Schließlich haben wir

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}\leq 2.$$

Dabei haben wir Satz 2.1.6 benutzt. Dies ergibt die obere Schranke 3 für die Folgenglieder a_n, $n \geq 1$.

Die benutzten Abschätzungen sind recht grob. In der Tat gilt für den Grenzwert $e = 2,728....$



2.2.10 Bemerkung. Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt aber nicht konvergent. Das obige Kriterium ist somit nicht hinreichend für die Konvergenz.

2.2.11 Beispiel. Die Folge $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt (nach dem Satz des Archimedes 1.7.13) und somit auch nicht konvergent.

2.2.12 Satz. *Es sei $q \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $|q| > 1$. Dann ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt und folglich divergent.*

Beweis. Wir schreiben $|q| = 1 + x$ mit $x > 0$. Gemäß Eigenschaften 1.6.6 ii) und Bernoullischer Ungleichung 1.3.7 gilt

$$|q^n| = |q|^n = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Sei $s > 0$ eine reelle Zahl. Nach dem Satz des Archimedes 1.7.13 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n > \frac{s-1}{x}.$$

Für dieses n haben wir $|q^n| > s$. □

2.2.13 Bemerkung. Für $|q| = 1$ haben wir die beiden Fälle $q = 1$ und $q = -1$. Für $q = 1$ handelt es sich bei der Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ um die konstante Folge mit Folgengliedern 1. Sie konvergiert daher gegen 1. Für $q = -1$ ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent (s. Beispiel 2.2.5 v).

2.2.14 Satz. *Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Für $|q| = 0$, also $q = 0$, ist dies klar. Für $q \neq 0$ haben wir $|1/q| > 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{1}{q}\right|^n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \geq N.$$

Für $n \geq N$ finden wir somit

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon,$$

und unsere Behauptung ist gezeigt. □

Wir haben jetzt das Konvergenzverhalten für alle Folgen der Form $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $q \in \mathbb{R}$, verstanden. Wir ergänzen unsere Diskussion mit dem folgenden Beispiel.

2.2.15 Beispiel. Für jede reelle Zahl $q \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Fakultät wächst also schneller als jede Potenzfunktion $n \mapsto q^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Um die Behauptung nachzuprüfen, wählen wir zunächst eine natürliche Zahl N_0, für die

$$\frac{|q|}{N_0} < \frac{1}{2} \tag{2.1}$$

gilt. Wir zeigen durch Induktion über n, dass

$$\frac{|q|^{n+N_0}}{(n+N_0)!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{|q|^{N_0}}{N_0!}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Für $n = 0$ ist die Ungleichung offensichtlich. Für den Schluss $n \to n+1$ schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\frac{|q|^{n+1+N_0}}{(n+1+N_0)!} &= \frac{|q|}{n+1+N_0} \cdot \frac{|q|^{n+N_0}}{(n+N_0)!} \\
&\overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{|q|}{n+1+N_0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{|q|^{N_0}}{N_0!} \\
&\overset{(2.1)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{|q|^{N_0}}{N_0!} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{|q|^{N_0}}{N_0!}.
\end{aligned}$$

Da der behauptete Grenzwert für $q = 0$ trivialerweise richtig ist, setzen wir in den folgenden Betrachtungen $q \neq 0$ voraus. Sei nun eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzen

$$C := \frac{|2q|^{N_0}}{N_0!}. \tag{2.3}$$

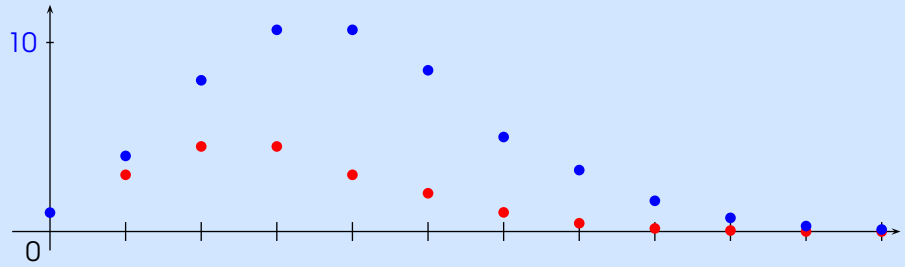
Wie wir zuvor gesehen haben, ist $((1/2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Folglich existiert eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{C}, \quad n \geq N. \tag{2.4}$$

Wir wählen $N \geq N_0$. Für $n \geq N$ gilt dann

$$\frac{|q|^n}{n!} \overset{(2.2)}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N_0} \cdot \frac{|q|^{N_0}}{N_0!} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{|2q|^{N_0}}{N_0!} \overset{(2.3)\,\&\,(2.4)}{<} \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon.$$

Die Folgen $(3^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(4^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$



Rechenregeln für Grenzwerte

2.2.16 Satz. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{und} \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

i) *Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und für den Grenzwert gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

ii) *Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und hat als Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

iii) *Wenn $b_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$ gilt, dann konvergiert $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. i) Für $\varepsilon > 0$ können wir ein $N \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann haben wir auch

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ii) Konvergente Folgen sind nach Satz 2.2.8 beschränkt. Sei $s \in \mathbb{R}$ eine positive reelle Zahl, für die

$$|a| \leq s \quad \text{sowie} \quad |a_n| < s \quad \text{und} \quad |b_n| < s, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt. Des Weiteren wählen wir eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2s} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2s}, \quad n \geq N.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| \\ &\leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - a \cdot b| \\ &= |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2s} \cdot s + s \cdot \frac{\varepsilon}{2s} = \varepsilon. \end{aligned}$$

iii) Wegen Teil ii) reicht es, die Konvergenz der Folge $(1/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Wert $1/b$ nachzuweisen. Es gilt

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b \cdot b_n}.$$

Da für große n der Wert von b_n dem Wert von b sehr nahe kommt, liegt die Konvergenz nahe. Wir formalisieren wie folgt. Sei $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < |b|/2$ für alle $n \geq N_0$. Gilt $b < 0$, bedeutet das $b/2 = -|b|/2 < b_n - b < -b/2$. Es folgt $b_n < b/2 < 0$ und $|b_n| = -b_n > -b/2 = |b|/2$. Für $b > 0$ gilt $b_n > b/2 > 0$ und damit auch $|b_n| = b_n > b/2 = |b|/2$. In jedem Fall haben wir $|1/b_n| < 2/|b|$, $n \geq N_0$.

Weiter seien $\varepsilon > 0$ und $N \geq N_0$ so groß, dass $|b_n - b| < \varepsilon \cdot |b|^2/2$, $n \geq N$. Wir schätzen ab:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n \cdot b}\right| = |b_n - b| \cdot \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2} \cdot \frac{2}{|b|^2} = \varepsilon.$$

Es folgt die Konvergenz der Folge $(1/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $1/b$. □

2.2.17 Folgerung. i) *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $c \in \mathbb{R}$. Die Folge $(c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen*

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

ii) *Für zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis. i) Wir wenden Satz 2.2.16 iii) mit der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := c$, $n \in \mathbb{N}$, an. Teil ii) folgt sofort aus i) und Satz 2.2.16 i). □

2.2.18 Satz (Monotonieverhalten des Grenzwerts)**.** *Gegeben seien die konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gelte*

$$a_n \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis. Falls die Behauptung falsch ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n =: b < a := \lim_{n\to\infty} a_n,$$

und wir setzen $\delta := (a-b)/2$. Man beachte, dass dann $a - \delta = b + \delta$ gilt. Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \delta \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \delta, \quad n \geq N.$$

Dann gilt für $n \geq N$ (s. 1.6.6 iv)

$$b_n < b + \delta = a - \delta < a_n.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Behauptung richtig ist. □

2.2.19 Bemerkung. Gilt in der Voraussetzung des Satzes sogar $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt daraus **nicht** $a < b$. Man betrachte z.B. die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := 0 \quad \text{und} \quad b_n := \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Offenbar haben wir

$$a_n = 0 < \frac{1}{n} = b_n, \quad n \geq 1,$$

und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2.3 Cauchy-Folgen

Bisher können wir Konvergenz nur nachweisen, wenn wir den potentiellen Grenzwert kennen. Es ist wünschenswert, Konvergenzkriterien zu haben, die nur die Kenntnis der Folgenglieder voraussetzen. Solche Kriterien wollen wir nun angeben.

Ein hinreichendes Kriterium für Konvergenz

2.3.1 Definition. i) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
ii) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist *streng monoton wachsend*.
iii) Entsprechend werden die Begriffe *monoton fallend* und *streng monoton fallend* eingeführt.

2.3.2 Satz. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:*
- *Die Folge ist nach oben beschränkt und monoton wachsend.*
- *Die Folge ist nach unten beschränkt und monoton fallend.*

Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Beweis. Wir beweisen den Satz unter der Annahme, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend ist. Die Menge

$$A := \{\, a_n \,|\, n \in \mathbb{N} \,\} \subset \mathbb{R}$$

ist nach Voraussetzung nach oben beschränkt und zudem nicht leer. Sie besitzt also ein Supremum. Wir definieren $a := \sup(A)$ und behaupten, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Supremums ist $a-\varepsilon$ keine obere Schranke für A. Damit existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_N > a-\varepsilon$. Aus der Monotonie der Folge und der Definition des Supremums ergibt sich

$$a - \varepsilon < a_N \le a_n \le a, \quad n \ge N,$$

und daher auch

$$|a_n - a| = a - a_n < \varepsilon, \quad n \ge N.$$

Damit ist die Konvergenz der Folge bewiesen. □

2.3.3 Beispiel. Die Monotonie lässt sich besonders gut bei rekursiv definierten Folgen nachweisen. Betrachten wir zum Beispiel die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die über die Rekursionsbedingungen

- $a_1 = 1$,
- $a_{n+1} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot a_n$, $n \ge 1$,

definiert ist. Man verifiziert leicht durch Induktion, dass alle Folgenglieder positiv sind. Die Folge ist also durch 0 nach unten beschränkt. Um zu beweisen, dass sie auch monoton fallend ist, müssen wir zeigen, dass $(2n-1)(2n+1)/(2n)^2 \le 1$ für alle $n \ge 1$ erfüllt ist. Dazu muss man lediglich

$$(2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1 < 4n^2 = (2n)^2, \quad n \ge 1,$$

beachten. Nach dem Satz ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Häufungspunkte

2.3.4 Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\#\{\, n \in \mathbb{N} \,||a_n - a| < \varepsilon \,\} = \infty.$$

2.3.5 Beispiel. i) Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt, nämlich $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. (Beweis?)

ii) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat (genau) zwei Häufungspunkte, und zwar -1 und 1.

iii) Es gibt Folgen reeller Zahlen, die jede reelle Zahl als Häufungspunkt haben (s. Aufgabe 6.6.2).

2.3.6 Definition. i) Eine *Auswahlfolge* ist eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die streng monoton wächst und für die $n_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

ii) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Auswahlfolge. Wir nennen die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die *durch* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *definierte Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.3.7 Satz. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann existiert eine Auswahlfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die eine der folgenden Aussagen zutrifft:*
- *Die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.*
- *Die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend.*

Beweis. Wir betrachten

$$S := \{\, n \in \mathbb{N} \mid \forall l \geq n : a_n \geq a_l \,\}.$$

Fall 1. $\#S = \infty$. Wir konstruieren die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv mit
- $n_0 := \min(S)$.
- $n_{k+1} := \min\{\, n \in S \mid n > n_k \,\}$, $k \in \mathbb{N}$. (Man beachte, dass $\{\, n \in S \mid n > n_k \,\}$ nicht leer ist, weil S unendlich viele Elemente enthält.)

Die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach Definition streng monoton wachsend und somit eine Auswahlfolge. Wegen $n_k \in S$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

Fall 2. $\#S < \infty$. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $N > s$ für alle $s \in S$ und führen die Auswahlfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ über die rekursive Definition
- $n_0 := N$.
- $n_{k+1} := \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid n > n_k \wedge a_n > a_{n_k} \,\}$, $k \in \mathbb{N}$,

ein.

Wir müssen kurz begründen, dass diese Rekursion möglich ist. Für $m \notin S$, etwa $m \geq N$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ und $a_n > a_m$. Für ein solches m ist die Menge $\{\, n \in \mathbb{N} \mid n > m \wedge a_n > a_m \,\}$ nicht leer.

Da die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Definition streng monoton wachsend ist, ist sie eine Auswahlfolge. Weiter ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach Konstruktion streng monoton wachsend. □

2.3.8 Bemerkung. i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Auswahlfolge, so dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann ist $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Wenn umgekehrt a ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, dann definieren wir die Auswahlfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch
- $n_0 := 0$, $n_1 := 1$.
- $n_{k+1} := \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid n > n_k \wedge |a_n - a| < \frac{1}{k} \,\}$, $\quad k \geq 1$.

Die zugehörige Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen a.

Zusammenfassend können wir festhalten:

Häufungspunkte=Grenzwerte von Teilfolgen.

Der folgende, bedeutende Satz ist eine gewisse Umkehrung der Beobachtung aus Satz 2.2.8.

2.3.9 Satz (Satz von Bolzano–Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt einen Häufungspunkt bzw. eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Nach Satz 2.3.7 können wir eine Auswahlfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ finden, so dass die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend oder streng monoton wachsend ist. Da die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gemäß unserer Voraussetzung beschränkt ist, folgt aus Satz 2.3.2, dass sie konvergiert. □

2.3.10 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\forall m, n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.3.11 Lemma. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Sei weiter $\varepsilon > 0$. Wir fixieren eine natürliche Zahl N, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N.$$

Für $m, n \geq N$ ergibt sich aus der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| = |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist daher eine Cauchy-Folge. □

2.3.12 Satz (Vollständigkeit der reellen Zahlen[3])**.** *Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen ist konvergent.*

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von reellen Zahlen.

Schritt 1. Wir zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Zunächst geben wir uns $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|a_n - a_m| < 1, \quad \forall m, n \geq N,$$

vor und setzen

$$s := \max\{\, |a_0|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N| \,\}.$$

Für $0 \leq n < N$ gilt $|a_n| \leq s$ nach Definition, und für $n \geq N$ hat man $|a_n - a_N| < 1$, so dass

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| \leq s.$$

Schritt 2. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß 2.3.9 existiert eine Auswahlfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Sei $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Wir behaupten, dass auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \geq K,$$

und ein $N \geq n_K$ mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m, n \geq N.$$

Für $n \geq N$ folgt

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dies zeigt die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

[3] Diese Vollständigkeit bezieht sich auf die Zusatzstruktur $|.|$ und nicht auf die Anordnung.

Das Cauchy-Kriterium ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium, mit dem man die Konvergenz einer Folge ermitteln kann. Es sieht allerdings recht kompliziert aus, und man könnte sich fragen, ob man mit mehr Arbeit ein einfacheres Kriterium ableiten kann. Das folgende Beispiel illustriert, dass das nicht möglich ist und wie subtil Konvergenzfragen sein können.

2.3.13 Beispiel (Die harmonische Reihe). Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wird vermöge folgender Rekursionsvorschrift eingeführt:

- $a_1 := 1$.
- $a_{n+1} := a_n + \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$.

Es gilt also

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zunächst bemerken wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **keine** Cauchy-Folge ist. In der Tat gilt

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

für jedes $n \geq 1$. Fixieren wir allerdings $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$|a_{n+k} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+k} \leq k \cdot \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge erfüllt somit die Bedingung

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon,$$

die **nicht hinreichend** für Konvergenz ist. Das Cauchy-Kriterium verlangt, dass wir N uniform für alle $k \in \mathbb{N}$ wählen können.

2.4 Folgen: $\pm\infty$ als Grenzwert

In einigen Situationen ist es günstig, die „Werte" ∞ oder $-\infty$ als Grenzwerte zuzulassen. Die Formalisierung wird in diesem Abschnitt vorgestellt.

2.4.1 Definition. Man nennt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent* gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn es für jede reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$a_n \geq s \quad (\text{bzw. } a_n \leq s), \quad n \geq N.$$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

2.4.2 Beispiel. i) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

ii) $\lim_{n\to\infty} -(2^n) = -\infty$.

iii) Die Folge $((-1)^n \cdot n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht bestimmt divergent.

iv) Die harmonische Reihe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \cdots + 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, ist bestimmt divergent gegen $+\infty$.

Man kann verschiedene sinnvolle Rechenregeln für das Rechnen mit $\pm\infty$ aufstellen und somit die Grenzwertsätze 2.2.16 und 2.2.17 verallgemeinern. Als Beispiel präsentieren wir die Regel „$1/\infty = 0 = 1/(-\infty)$".

2.4.3 Satz. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bestimmt divergent gegen ∞ oder $-\infty$. Ferner gelte $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Unter diesen Voraussetzungen ist die Folge $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Beweis. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bestimmt konvergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$). Wir wählen $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > 1/\varepsilon$ (bzw. $a_n < -1/\varepsilon$), $n \geq N$. In beiden Fällen folgt $|a_n| > 1/\varepsilon$, $n \geq N$, und damit auch

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Nullfolge entlarvt. □

2.5 Berechnung von Quadratwurzeln

Bisher haben wir uns vor allem mit den theoretischen Aspekten von Folgen beschäftigt und diese an einigen Beispielen illustriert. Die anschließende Diskussion zeigt eine Anwendung. Wie wir gesehen haben, können wir die irrationalen Zahlen mit den Dezimalbrüchen mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich nicht periodisch wiederholen, identifizieren. Damit sind solche Zahlen expliziten und exakten Rechnungen unzugänglich. Andererseits tauchen irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ und π in technischen Anwendungen auf. Es ist daher notwendig (und für die Anwendungen auch hinreichend), irrationale reelle Zahlen bis auf einen vorgegebenen Fehler zu approximieren. Nun ist eine rekursiv definierte Folge nichts anderes als ein Algorithmus, der die Folgenglieder generiert. Konvergiert die Folge zudem, so sind die Folgenglieder Approximationen des Grenzwerts. Für die technische Anwendung muss die Rekursion so gewählt werden, dass der Grenzwert die gewünschte Zahl ist. Außerdem ist es wünschenswert, eine Abschätzung für den Fehler, d.h. für die Differenz zwischen dem n-ten Folgenglied und dem Grenzwert zu haben, um zu wissen, wieviele Iterationen man benötigt, um den Grenzwert bis zu einer vorgegebenen Genauigkeit anzunähern. All dies wollen wir am Beispiel der Quadratwurzeln illustrieren.

Es sei x eine positive reelle Zahl. Für jede positive reelle Zahl α ist $(1/2)(\alpha + x/\alpha)$ ebenfalls eine positive reelle Zahl. Dies überprüft man leicht mit den Eigenschaften 1.6.4. Mit anderen Worten, wir haben die Selbstabbildung

$$\begin{array}{rccl} f\colon \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{>0} \\ \alpha & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\cdot\left(\alpha + \dfrac{x}{\alpha}\right). \end{array}$$

Nach dem Dedekindschen Rekursionssatz definiert die Vorschrift

- $a_0 := 1$,
- $a_{n+1} := (1/2)(a_n + x/a_n)$, $n \in \mathbb{N}$,

eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **positiver** reeller Zahlen. Diese Folge wird nun im Detail analysiert.

2.5.1 Satz. i) *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent.*
ii) *Der Grenzwert* $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ *ist positiv.*
iii) *Es gilt* $a^2 = x$.
Schreibweise: $\sqrt{x} := a$.

Beweis. Wir beweisen zunächst Teil i) in zwei Schritten.

Schritt 1. Wir zeigen, dass $a_n^2 \geq x$ für $n \geq 1$ gilt. Es gilt also $a_{n+1}^2 \geq x$ für $n \geq 0$ zu überprüfen. Mit der Rekursionsvorschrift argumentieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - x &= \frac{1}{4}\cdot\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)^2 - x = \frac{1}{4}\cdot\left(a_n^2 + 2x + \frac{x^2}{a_n^2}\right) - x = \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(a_n^2 - 2x + \frac{x^2}{a_n^2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(a_n - \frac{x}{a_n}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Schritt 2. Die Folge ist ab dem Index $n = 1$ monoton fallend. In der Tat haben wir für $n \geq 1$

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(a_n - \frac{x}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\cdot(a_n^2 - x) \geq 0.$$

Dabei ergibt sich die letzte Ungleichung aus Schritt 1.

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Grund ihrer Definition durch 0 nach unten beschränkt ist, garantiert Satz 2.3.2 die Konvergenz. Ferner folgt mit Satz 2.2.18, dass

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

ii) Wir müssen noch $a = 0$ ausschließen. Dazu genügt es, $a^2 \neq 0$ zu zeigen. Nach Satz 2.2.16 konvergiert die Folge $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a^2. Mit Satz 2.2.18 und Schritt 1 im Beweis von Teil i) erhalten wir

$$a^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 \geq x > 0.$$

iii) Wegen Teil i) und Teil ii) konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (1/2)(a_n + x_n/a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, und ihr Grenzwert ist $(1/2)(a + x/a)$. Auf der anderen Seite gilt $b_n = a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass sich $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ ergibt. Insgesamt erhalten wir die Gleichung

$$a = \frac{1}{2}\cdot\left(a + \frac{x}{a}\right).$$

Wir multiplizieren mit $2a$ und finden

$$2a^2 = a^2 + x.$$

Daraus folgt $a^2 = x$. □

2.5.2 Bemerkung. i) Der Satz zeigt, dass es zu jeder positiven reellen Zahl x eine positive Wurzel $\sqrt{x}$ gibt. Diese Aussage kann man bereits leicht aus der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ ableiten. Natürlich haben wir auch die negative Wurzel $-\sqrt{x}$.

ii) Jede positive reelle Zahl hat genau eine positive und eine negative Wurzel: Für zwei reelle Zahlen a und b mit $a^2 = b^2$ folgt

$$(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2 = 0.$$

In Bemerkung 1.6.2, i) und ii), wurde dargelegt, dass ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann Null wird, wenn einer der Faktoren Null ist. Damit haben wir $a + b = 0$ oder $a - b = 0$, i.e. $b = \pm a$.

Kommen wir zur Fehlerabschätzung. Der *relative Fehler* f_n im n-ten Schritt ist

$$f_n := \frac{a_n - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad n \in \mathbb{N}.^4$$

Aus $(1 + f_n)\sqrt{x} = a_n$ folgt die Rekursionsvorschrift

$$(1 + f_{n+1}) \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cdot \left((1 + f_n) \cdot \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1 + f_n} \right)$$

also

$$f_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(f_n - 1 + \frac{1}{f_n + 1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_n^2}{f_n + 1} \leq \frac{1}{2} \cdot \min\{ f_n, f_n^2 \}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man spricht von *quadratischer Konvergenz*. Man beachte, dass diese Abschätzung zeigt, dass das Verfahren auch funktioniert, wenn man in jedem Schritt gewisse Rundungs- und Rechenfehler zulässt. (Schließlich kann auch die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl mehr Nachkommastellen haben, als man verarbeiten kann oder möchte.)

Wir bemerken auch, dass man anstatt mit $a_0 = 1$ mit jeder beliebigen anderen positiven reellen Zahl beginnen kann. Soweit bekannt kann man mit einer besseren Näherung für $\sqrt{x}$ starten.

2.5.3 Beispiel. i) Wenn der relative Fehler $f_n = 0,01$ ($\triangleq$ 1%) beträgt, dann folgt $f_{n+1} \leq 0,5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5} = 0,00005$ ($\triangleq$ 0,005%) und $f_{n+2} \leq 0,5 \cdot 25 \cdot 10^{-10} = 1,25 \cdot 10^{-9}$.

ii) Wir möchten $\sqrt{11}$ berechnen. Wir lassen einen **absoluten** Fehler von 10^{-9} zu. Eine grobe Überlegung führt zu $3 < \sqrt{11} < 4$. Wir beginnen mit $a_0 = 4$. Für den absoluten Fehler $F_n = a_n - \sqrt{11}$ gilt

$$F_n = f_n \cdot \sqrt{x} \leq 4 \cdot f_n, \quad n \geq 1.$$

Es gilt

$$f_0 = \frac{4 - \sqrt{11}}{\sqrt{11}} \leq \frac{4 - 3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Somit haben wir $f_1 \leq 1/18$, $f_2 \leq 1/648$, $f_3 \leq 1/839808 < 1,2 \cdot 10^{-6}$, $f_4 < 7,2 \cdot 10^{-13}$. Damit gilt $F_4 < 2,2 \cdot 10^{-12} < 10^{-9}$.

Man ermittelt die folgenden Werte

$$\begin{array}{lll|lll} a_1 & = & \frac{27}{8} = 3,375 & a_3 & = & \frac{4106353}{1238112} \approx 3,316624829 \\ a_2 & = & \frac{1433}{432} \approx 3,31712963 & a_4 & = & \frac{33724269530593}{10168249851072} \approx 3,316624790 \end{array}.$$

2.6 Unendliche Reihen: Definitionen

Die Theorie der unendlichen Reihen formalisiert das Summieren unendlich vieler reeller Zahlen. In diesem Abschnitt stellen wir die relevanten Definitionen vor, die die Theorie der Reihen in diejenige der Folgen einbinden.

[4] Man beachte, dass $f_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, so dass wir auf Betragsstriche verzichten können.

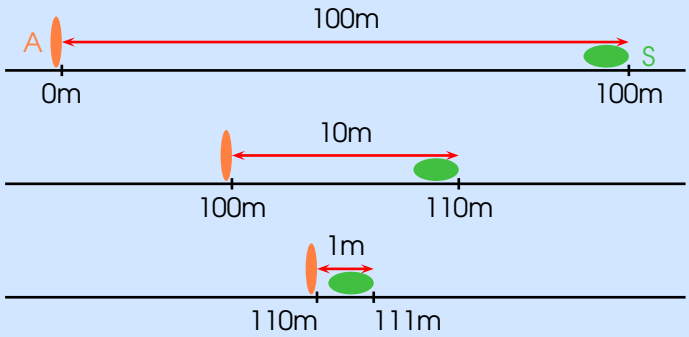
Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte

Zenon formulierte eine Reihe von Paradoxa, die die Unmöglichkeit der Bewegung darlegen sollten. Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte behandelt ein Wettrennen zwischen Achilles, dem schnellsten Läufer der Antike, und einer Schildkröte, das nach folgenden Regeln abläuft:

- Achilles läuft zehnmal schneller als die Schildkröte.
- Die Schildkröte erhält einen Vorsprung von 100m.

Zenon behauptet, das Achilles unter diesen Voraussetzungen die Schildkröte niemals einholen kann. Er begründet dies wie folgt:

- Wenn Achilles die 100m zurückgelegt hat, ist die Schildkröte weitere 10m gelaufen.
- Hat nun Achilles diese 10m zurückgelegt, dann ist die Schildkröte einen weiteren Meter "gerannt".
- Auf diese Weise behält die Schildkröte immer einen, wenn auch sehr kleinen, Vorsprung.



Zenons Trick ist die Beschreibung des Bewegungsvorgangs: Er suggeriert, dass es unendlich lange dauert, bis Achilles die Schildkröte eingeholt hat. Dazu unterteilt er den Bewegungsvorgang in unendlich viele positive Intervalle, die durch die Beschreibung alle gleichberechtigt erscheinen, er verwendet eine "Superzeitlupe".

Nehmen wir an, Achilles läuft mit einer Geschwindigkeit von 10m/s und schauen uns die Zeitintervalle genau an. Das erste Zeitintervall dauert 10s, das zweite 1s, das dritte 0,1s usw. Insgesamt vergehen somit

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 10^{1-k}\right) \text{s}.$$

Wir erwarten (vgl. Satz 2.1.6)

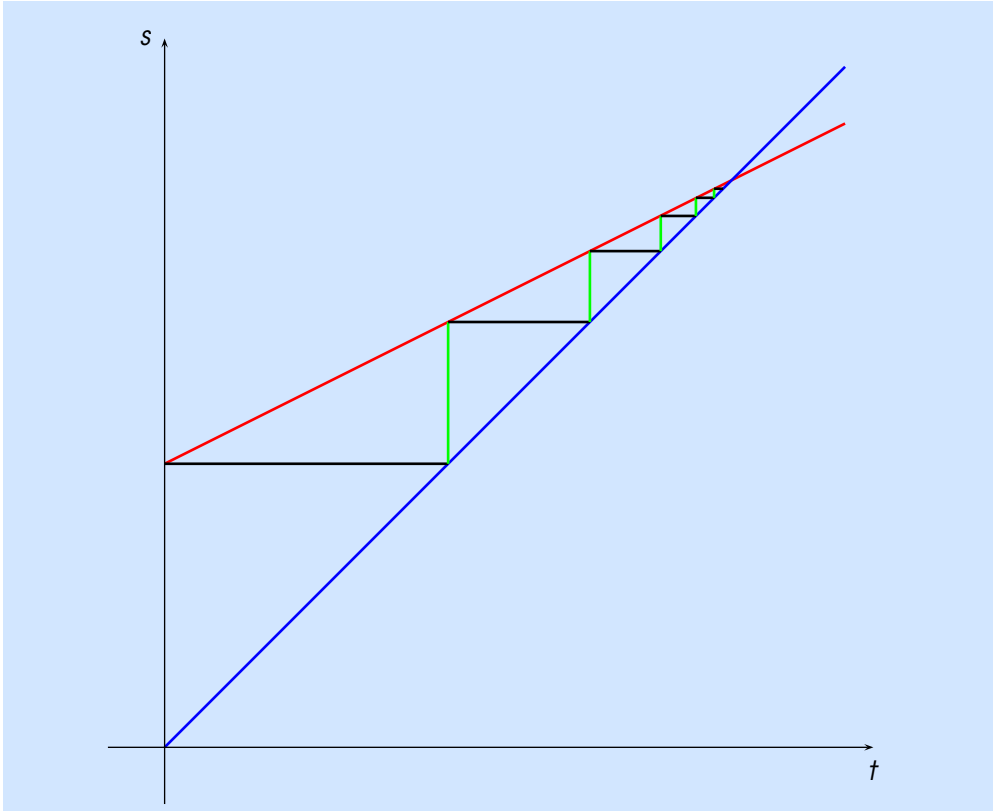
$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^{1-k} = 11,\overline{1} = 11\frac{1}{9}. \tag{2.5}$$

Nach $11,\overline{1}$s sollte Achilles die Schildkröte eingeholt haben.

2.6.1 Bemerkung. Mit Formel (2.5) folgt sofort, dass jede positive reelle Zahl als Summe unendlich vieler **positiver** reeller Zahlen geschrieben werden kann.

Dieses einführende Beispiel sollte nicht allzu verwirrend wirken. Es ist ein frühes Auftreten einer sogenannten **geometrischen Reihe** (s. Beispiel 2.6.6). Archimedes konnte zweihundert Jahre später schon virtuos mit solchen Reihen umgehen (s. (10) II.D). Es sollte vor allem motivieren, einen sauberen Formalismus für das Summieren unendlich vieler reeller Zahlen einzuführen.

Zeichnet man sich das Weg-Zeit-Diagramm für Achilles und die Schildkröte auf, so kann man die Konvergenz sehen:



Ein anderes Beispiel für eine geomerische Reihe ist $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$. Es wurde argumentiert, dass dieser Reihe mit demselben Recht der Wert 0 wie der Wert 1 zugewiesen werden könne und daher $0 = 1$ gelten müsse (s. (10), I.C.4, S. 55). Der berühmte Euler schlug den Wert $1/2$ vor (vgl. (1) 8.1, S. 215, und Beispiel 2.6.6).

Um sinnvoll über solche Fragen reden zu können, brauchen wir erst eine genaue Definition.

2.6.2 Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die *Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *der Partialsummen* wird durch

- $s_0 := a_0$,
- $s_{n+1} := s_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,

also durch

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

erklärt.

Statt von einer Folge von Partialsummen spricht man auch von einer (*unendlichen*) *Reihe*.

Schreibweise: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

2.6.3 Bemerkung. Unendliche Reihen sind also spezielle Folgen. Umgekehrt kann man jede Folge als unendliche Reihe schreiben. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir definieren die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

- $b_0 := a_0$
- $b_{n+1} := a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$,

und behaupten

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigen wir durch Induktion über n. Der Fall $n = 0$ ergibt sich aus der Definition. Der Schritt $n \to n+1$ vollzieht sich wie folgt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} b_k = \sum_{k=0}^{n} b_k + b_{n+1} = a_n + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1}.$$

Die Schwierigkeit in der Theorie der Reihen liegt darin, die Konvergenz anhand der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu ermitteln.

2.6.4 Definition. Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert gegen* $a \in \mathbb{R}$, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Schreibweise: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = a$.

2.6.5 Bemerkung. i) Bei einer konvergenten Reihe wird das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ missbräuchlicherweise für zwei verschiedene Objekte benutzt: zum einen für die Folge der Partialsummen, zum anderen für deren Grenzwert. Dieser Missbrauch ist in der Literatur üblich und sollte nicht zu großen Verwirrungen führen.

ii) Wie bei Folgen lassen wir auch die "Werte" ∞ und $-\infty$ für unendliche Reihen zu und sprechen von *uneigentlich konvergenten* oder *bestimmt divergenten Reihen*.

2.6.6 Beispiel (Geometrische Reihen). Es sei $q \in \mathbb{R}$. Wir studieren die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Satz 2.1.6 gegeben durch

$$s_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}.$$

Damit erkennen wir (s. Satz 2.2.14)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & -1 < q < 1 \\ \infty, & q \geq 1 \end{cases}. \tag{2.6}$$

(Euler hat diese Formel auch für $q = -1$ verwendet und damit $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = 1/2$ gerechtfertigt.)

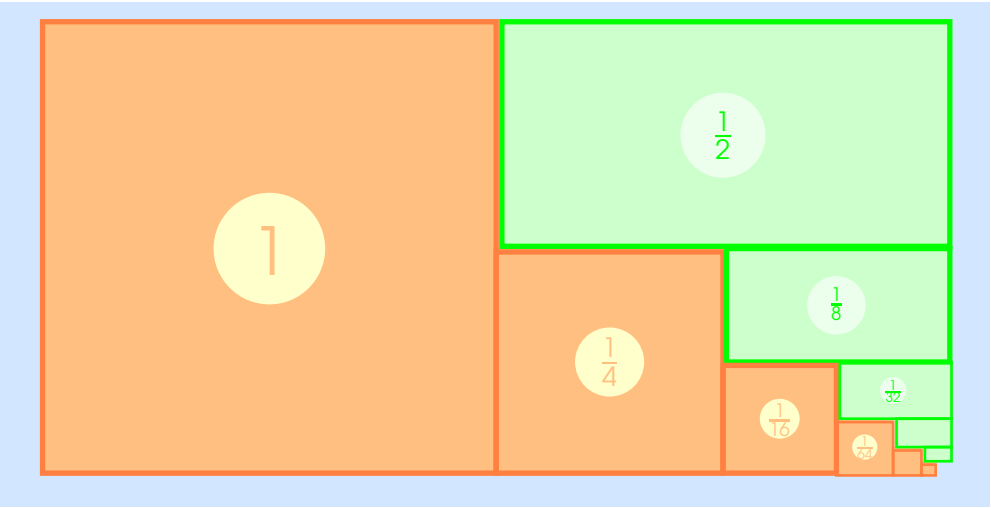
Für $q \leq -1$ können wir der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ keinen sinnvollen Wert zuordnen. Für $q = -1$ erhalten wir etwa

$$s_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Für $q = 1/2$ gilt z.B.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Auch diese Konvergenz kann man sich wieder graphisch veranschaulichen:



Für $q = 1/10$ liefert Formel (2.6)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

Somit erhalten wir (vgl. Definition 1.7.17)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^{1-k} = 11\frac{1}{9}.$$

Dies zeigt, dass unsere Überlegungen zu Zenons Paradoxon korrekt waren.

Für $q = -1/2$ berechnen wir mit (2.6)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

2.6.7 Beispiel (Die harmonische Reihe). Wie in Bemerkung 2.3.13 gesehen gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

2.6.8 Satz. i) *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen reeller Zahlen. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)$ konvergent, und für den Grenzwert gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

ii) Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen und $c \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(c \cdot a_k)$ konvergiert und hat als Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(c \cdot a_k) = c \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right).$$

Beweis. i) Es seien $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörigen Folgen der Partialsummen. Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir nach dem Kommutativgesetz der Addition

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = s_n + t_n.$$

Somit gilt nach Satz 2.2.16 i)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

ii) Hier gilt nach dem Distributivgesetz für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(c \cdot a_k) = c \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right).$$

Dieser Teil folgt dann durch Anwendung von Folgerung 2.2.17. □

2.6.9 Bemerkung. Für konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ erhalten wir $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)\cdot(\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$ i.A. nicht als Grenzwert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cdot b_k)$. Das Distributivgesetz zeigt, dass i.A.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \neq \sum_{k=0}^{n}(a_k \cdot b_k).$$

Für $n = 1$ haben wir etwa

$$(a_0 + a_1)\cdot(b_0 + b_1) = a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1.$$

Für $a_0b_1 + a_1b_0 \neq 0$ stimmt dies nicht mit $a_0b_0 + a_1b_1$ überein. Man vergleiche auch Abschnitt 2.11.

2.7 Reihen: Erste Konvergenzkriterien

Wie zuvor bemerkt möchten wir den Summanden einer unendlichen Reihe ansehen, ob die Reihe konvergiert oder nicht. Zunächst übertragen wir einige Konvergenzkriterien für Folgen auf Reihen. Anschließend beweisen wir das überraschend einfache Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen.

2.7.1 Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** *Eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:*

$$\forall n \geq m \geq N: \quad \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Beweis. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Folge der Partialsummen. Nach dem Cauchy-Kriterium 2.3.12 für Folgen konvergiert diese Folge genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\forall m, n \geq N: \quad |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Da $|s_n - s_m| = |s_m - s_n|$ dürfen wir $n \geq m$ fordern. Schließlich gilt für $n \geq m$

$$s_n - s_m = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k,$$

und dies zeigt die Behauptung. □

2.7.2 Folgerung. *Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann muss $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium 2.7.1 für Reihen existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq m \geq N: \quad \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \varepsilon.$$

Dies liefert

$$|a_n| = \left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| \leq \varepsilon$$

für $m = n \geq N$. □

2.7.3 Bemerkung. Das Kriterium aus der Folgerung ist notwendig aber (bei weitem) nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe. Z.B. gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

aber wir haben uns bereits davon überzeugt (Beispiel 2.3.13 und 2.6.7), dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

2.7.4 Satz. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, so dass die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.*

Beweis. Die Voraussetzung $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, garantiert, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst. Gemäß Satz 2.3.2 konvergiert eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. □

2.7.5 Folgerung. *Es sei $s \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $s \geq 2$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Folge der Partialsummen beschränkt ist. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann finden wir ein $r \in \mathbb{N}$, so dass $n < 2^r$. Damit ergibt sich die Abschätzung

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \sum_{k=1}^{2^r-1} \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{j^s} \right).$$

Die Summe $\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} 1/j^s$ hat 2^{k-1} Summanden, und der größte Summand ist

$$\frac{1}{(2^{k-1})^s} = \frac{1}{(2^s)^{k-1}}.$$

Wir folgern

$$\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{j^s} \leq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{(2^s)^{k-1}} = \frac{1}{(2^{s-1})^{k-1}}$$

und

$$s_n \leq \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{1}{2^{s-1}} \right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{1}{2^{s-1}} \right)^{k}.$$

Wegen $s \geq 2$ gilt $0 < 1/2^{s-1} < 1$, und die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (1/2^{s-1})^k$ konvergiert. Daraus leitet man die Abschätzung

$$s_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}} \right)^{k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}} = \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1}$$

ab. □

2.7.6 Bemerkung. In dem obigen Beispiel haben wir wieder einmal Konvergenz nachgewiesen, ohne den Grenzwert der Reihe zu kennen. Der Beweis gibt auch keinen Hinweis auf den Grenzwert. Es gilt z.B.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Alternierende Reihen

2.7.7 Definition. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt *alternierend*, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **nicht negativer** reeller Zahlen gibt, so dass

$$b_n = (-1)^n \cdot a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

oder

$$b_n = (-1)^{n+1} \cdot a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.7.8 Satz (Leibniz-Kriterium für die Konvergenz alternierender Reihen)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit den folgenden drei Eigenschaften:*

1. $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$,
2. $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

Beweis. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

die Folge der Partialsummen.

Schritt 1: Für $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{2l+2} - s_{2l} = a_{2l+2} - a_{2l+1} \leq 0.$$

Die Folge $(s_{2l})_{l\in\mathbb{N}}$ ist also monoton fallend.

Schritt 2: Für $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{2l+3} - s_{2l+1} = -a_{2l+3} + a_{2l+2} \geq 0,$$

so dass die Folge $(s_{2l+1})_{l\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

Schritt 3: Für $l \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{2l+1} - s_{2l} = -a_{2l+1} \leq 0,$$

und wir schließen

$$s_0 \geq \cdots \geq s_{2l} \geq s_{2l+1} \geq \cdots \geq s_1.$$

Die Folgen $(s_{2l})_{l\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2l+1})_{l\in\mathbb{N}}$ sind somit beschränkt und daher nach Schritt 1, Schritt 2 und Satz 2.3.2 konvergent.

Wir setzen

$$s := \lim_{l\to\infty} s_{2l} \quad \text{und} \quad s' := \lim_{l\to\infty} s_{2l+1}.$$

Schritt 4: Wir berechnen mit Hilfe von Satz 2.3.2 i)

$$s - s' = \lim_{l\to\infty} s_{2l} - \lim_{l\to\infty} s_{2l+1} = \lim_{l\to\infty} (s_{2l} - s_{2l+1}) = \lim_{l\to\infty} a_{2l+1} = 0.$$

Es gilt also $s = s'$.

Schritt 5: Wählen wir $L \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall l \geq L: \quad |s_{2l} - s| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |s_{2l+1} - s| < \varepsilon,$$

dann gilt für $n \geq 2L + 1$

$$|s_n - s| < \varepsilon,$$

und die Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen s ist nachgewiesen. □

2.7.9 Bemerkung. Die erste Voraussetzung in Satz 2.7.8 benötigen wir, weil wir von alternierenden Reihen reden wollen. Die zweite und die dritte sind i.A. unverzichtbar: Dass man die dritte Voraussetzung nicht weglassen kann, ist Gegenstand von Folgerung 2.7.2.

Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ über

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ \\ \frac{1}{n^2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Dann sind 1. und 3. im Satz erfüllt. Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$ konvergierte, so auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k^2}\right) = \lim_{l\to\infty} s_{2l}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergiert, müsste nach Satz 2.6.8 i) auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k+1)$ konvergieren. Dies tut sie aber nicht.

2.7.10 Beispiel (Die alternierende harmonische Reihe). Die Folge $(1/n)_{n\geq 1}$ erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes. Daher konvergiert die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}.$$

2.8 Reihen: Absolute Konvergenz

Wir unterteilen die konvergenten Reihen in zwei Teilklassen: die absolut und die bedingt konvergenten Reihen. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass absolut konvergente Reihen unempfindlich gegenüber Umsortierungen ihrer Summanden sind.

2.8.1 Definition. Eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

2.8.2 Lemma. *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Wir benutzen das Cauchy-Kriterium 2.7.1 für die Konvergenz von Reihen, und zwar beide Richtungen. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Nach dem Cauchy-Kriterium gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq m \geq N: \quad \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Für $n \geq m \geq N$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Daher erfüllt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ das Cauchy-Kriterium für Reihen und ist folglich konvergent. □

2.8.3 Beispiel. Die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

sind absolut konvergent.

2.8.4 Definition. Eine unendliche Reihe, die konvergiert aber nicht absolut konvergiert, nennt man *bedingt konvergent*.

2.8.5 Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

ist bedingt konvergent.

Absolute Konvergenz ist eine wesentlich robustere Form der Konvergenz. Absolut konvergente Reihen zeichnen sich dadurch aus, dass sie eine starke Verallgemeinerung des Kommutativgesetzes erfüllen. Dazu formulieren wir das Kommutativgesetz für die Addition von reellen Zahlen wie folgt:

> *Für jedes $n \geq 0$, jede* ***Permutation***[5] *$\sigma\colon \{0,\dots,n\} \longrightarrow \{0,\dots,n\}$ und jedes Datum $a_0,\dots,a_n$ von reellen Zahlen gilt*
>
> $$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}.$$

(Diese Version ergibt sich z.B. mit der Faktorisierung von Permutationen in Transpositionen (s. (15), §23, (14), Satz 15.13) durch Induktion über die Anzahl der verwendeten Transpositionen aus dem üblichen Kommutativgesetz.)

2.8.6 Definition. Eine *Umordnung der natürlichen Zahlen* ist eine bijektive Abbildung $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

2.8.7 Satz (Umordnung absolut konvergenter Reihen)**.** *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Umordnung. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent, und für die Grenzwerte gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Zur Vorbereitung des Beweises formulieren wir:

2.8.8 Lemma. *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\left|\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k\right| \leq \varepsilon.$$

[5] d.h. bijektive Abbildung

Beweis. Dies folgt aus dem Cauchy-Kriterium 2.7.1 für die Konvergenz von Reihen. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir ein n_0, so dass

$$\forall n \geq n_0 : \quad \left| \sum_{k=n_0}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

Da $(\sum_{k=n_0}^{n} a_k)_{n \geq n_0}$ konvergiert (warum?), folgt die Behauptung aus Aufgabe 6.6.1 a) und Satz 2.2.18. □

Beweis von Satz 2.8.7. Wir setzen $A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.8.8, angewendet auf die konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, für das

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Damit haben wir

$$\left| A - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir wählen ein N mit der Eigenschaft

$$\{ 0, \ldots, n_0 - 1 \} \subset \{ \sigma(0), \ldots, \sigma(N) \}.$$

Für $n \geq N$ gilt

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - A \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k - A \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k - A \right| \\
&< \left| \sum_{\substack{k=0 \\ \sigma(k) \notin \{ 0, \ldots, n_0-1 \}}}^{n} a_{\sigma(k)} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{\substack{k=0 \\ \sigma(k) \notin \{ 0, \ldots, n_0-1 \}}}^{n} |a_{\sigma(k)}| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

(Bei diesen Umformungen haben wir wesentlich benutzt, dass die Indizes $0, \ldots, n_0 - 1$ alle unter den Indizes $\sigma(0), \ldots, \sigma(N)$ auftreten.) Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Diesselbe Überlegung kann man auf die konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ anwenden und schließen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|$ konvergiert, d.h. dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergiert. □

2.9 Bedingt konvergente Reihen

In diesem Abschnitt zeigen wir das Gegenstück zum Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen: Eine bedingt konvergente Reihe lässt sich so umordnen, dass sich der Grenzwert ändert. Damit ist eine konvergente Reihe genau dann absolut konvergent, wenn jede ihrer Umordnungen gegen denselbem Grenzwert konvergiert.

2.9.1 Satz (Umordnung bedingt konvergenter Reihen)**.** *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine **bedingt** konvergente Reihe und $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Umordnung $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ gegen x konvergiert.*

Beweis. Für $a \in \mathbb{R}$ setzen wir $a^+ := \max\{0, a\}$ und $a^- := \max\{0, -a\}$. Damit gilt

(+) $a = a^+ - a^-$

(++) $|a| = a^+ + a^-$.

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^+ + a_k^-)$ divergiert, muss nach Satz 2.6.8 i) eine der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$ oder $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ divergieren. Auf der anderen Seite konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-)$. Satz 2.6.8 i) impliziert, dass in der Tat beide Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ divergieren.

Wir definieren die Mengen

$$\begin{aligned} P &:= \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 0 \}, \\ N &:= \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n < 0 \} \end{aligned}$$

und die Abzählungen

$$\kappa_1\colon \mathbb{N} \longrightarrow P$$

bzw.

$$\kappa_2\colon \mathbb{N} \longrightarrow N$$

rekursiv durch

$$\begin{aligned} \kappa_1(0) &:= \min(P) \\ \kappa_1(n+1) &:= \min\big(P \setminus \{ \kappa_1(0), \ldots, \kappa_1(n) \}\big), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \kappa_2(0) &:= \min(N) \\ \kappa_2(n+1) &:= \min\big(N \setminus \{ \kappa_2(0), \ldots, \kappa_2(n) \}\big), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} n_0 &:= \min\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} a_{\kappa_1(k)} > x \right\}, \\ n_{2l+1} &:= \min\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n_{2l}} a_{\kappa_1(k)} + \sum_{k=0}^{n} a_{\kappa_2(k)} < x \right\}, \quad l \geq 0, \\ n_{2l+2} &:= \min\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} a_{\kappa_1(k)} + \sum_{k=0}^{n_{2l+1}} a_{\kappa_2(k)} > x \right\}, \quad l \geq 0. \end{aligned}$$

Die Möglichkeit zu dieser rekursiven Definition liegt in der Tatsache

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\kappa_1(k)} = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\kappa_2(k)} = -\infty$$

begründet, die ihrerseits aus der Divergenz der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ folgt.

Die Umordnung $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definieren wir folgendermaßen:

n	0	$\cdots$	n_0	n_0+1	$\cdots$	n_0+n_1+1	n_0+n_1+2	$\cdots$
$\sigma(n)$	$\kappa_1(0)$	$\cdots$	$\kappa_1(n_0)$	$\kappa_2(0)$	$\cdots$	$\kappa_2(n_1)$	$\kappa_1(n_0+1)$	$\cdots$

n	$n_0+n_1+1+(n_2-n_0)$	$n_0+n_1+2+(n_2-n_0)$			
$\sigma(n)$	$\kappa_1(n_2)$	$\kappa_2(n_1+1)$	$\cdots$	$\kappa_2(n_3)$	$\cdots$

[6]

Wir möchten $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = x$ nachweisen. Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Sei $M \in \mathbb{N}$, so dass $|a_m| < \varepsilon$ für alle $m \geq M$. Sei weiter $L \in \mathbb{N}$, so dass $\kappa_1(n_{2l}) \geq M$ und $\kappa_2(n_{2l+1}) \geq M$ für $l \geq L$. Schließlich wählen wir $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sigma(n) \geq \max\{\, \kappa_1(n_{2L}), \kappa_2(n_{2L+1}) \,\}, \quad n \geq N.$$

Sei $n \geq N$. Wir unterscheiden einige Fälle.

a) $\sigma(n) = \kappa_1(n_{2l})$. Nach Definition von n_{2l} gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n_{2l}} a_{\kappa_1(k)} + \sum_{k=0}^{n_{2l-1}} a_{\kappa_2(k)} > x,$$

aber

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n_{2l}-1} a_{\kappa_1(k)} + \sum_{k=0}^{n_{2l-1}} a_{\kappa_2(k)} \leq x.$$

Da $|a_{\kappa_1(n_{2l})}| = a_{\kappa_1(n_{2l})} < \varepsilon$, können wir

$$x + \varepsilon > \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} > x$$

schließen.

b) $\sigma(n) = \kappa_2(n_{2l+1})$. Hier finden wir auf analoge Weise

$$x - \varepsilon < \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} < x.$$

c) $\sigma(n) \in \{\, \kappa_1(n_{2l}+1), \ldots, \kappa_1(n_{2l+2}-1) \,\}$. Man kann wie folgt abschätzen:

$$x - \varepsilon \overset{\text{b)}}{<} \sum_{k=0}^{n_{2l}} a_{\kappa_1(k)} + \sum_{k=0}^{n_{2l+1}} a_{\kappa_2(k)} \leq \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} < x.$$

[6] Formal definiert man die Abbildung σ folgendermaßen: Für $n \in \{0, \ldots, n_0+n_1+1\}$ ist die Vorschrift aus der Tabelle klar. Wir definieren $n_0' := 0 =: n_1'$, $n_{2l+2}' := n_{2l+2} - n_{2l}$, $l \geq 0$, $n_{2l+3}' := n_{2l+3} - n_{2l+1}$, $l \geq 0$. Für $n > n_0 + n_1 + 1$ gibt es genau einen Index $\lambda \geq 1$, so dass

$$(n_0+n_1+1) + \sum_{k=1}^{\lambda} n_k' < n \leq (n_0+n_1+1) + \sum_{k=1}^{\lambda+1} n_k'.$$

Wir definieren

$$n' := n - \left((n_0+n_1+1) + \sum_{k=0}^{\lambda} n_k' \right).$$

Ist $\lambda = 2l$ gerade, so setzen wir $\sigma(n) := \kappa_1(n_{2l} + n')$. Falls $\lambda = 2l+1$ ungerade ist, dann definieren wir $\sigma(n) := \kappa_2(n_{2l+1} + n')$. Der Leser oder die Leserin möge zur Übung überprüfen, dass σ eine bijektive Abbildung ist.

d) $\sigma(n) \in \{\kappa_2(n_{2l+1}+1), \ldots, \kappa_2(n_{2l+3}-1)\}$. Hier gilt

$$x+\varepsilon \overset{\text{a)}}{>} \sum_{k=0}^{n_{2l+2}} a_{\kappa_1(k)} + \sum_{k=0}^{n_{2l+1}} a_{\kappa_2(k)} > \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} > x.$$

Die Fälle a) - d) zeigen die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$. □

2.9.2 Bemerkung. i) Man sieht, dass die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ analog zur Konvergenz einer alternierenden Reihe wie im Leibniz-Kriterium (s. Satz 2.7.8) hergestellt wird.

ii) Es sollte aus dem Beweis klar werden, dass man eine bedingt konvergente Reihe auch so umordnen kann, dass sie divergent wird. Wir führen dies am Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe vor.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k$ wird wie folgt arrangiert:

$$\begin{aligned}
&-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\\
&-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{6}-\\
&-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{8}-\\
&\vdots\\
&-\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}}_{>2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}}\Bigg)+\frac{1}{2n+2}-\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Abschätzung der Summe ergibt sich daraus, dass die Summe 2^{n-1} Summanden hat und der kleinste vorkommende größer als $1/2^{n+1}$ ist. Da weiter $1/(2n+2) < 1/8$ für $n \geq 4$ gilt, sehen wir, dass bei dieser Umordnung immer wieder eine Zahl größer als $1/8$ abgezogen wird, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ bestimmt gegen $-\infty$ divergiert.

2.10 Reihen: Kriterien für absolute Konvergenz

Dieser Abschnitt enthält die bekanntesten Kriterien, mit denen man die absolute Konvergenz einer Reihe sicherstellen kann.

2.10.1 Satz (Majorantenkriterium)**.** *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $|a_n| \leq c_n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert absolut.*

Beweis. Wir verwenden abermals das Cauchy-Kriterium (Satz 2.7.1). Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein N, so dass

$$\forall n \geq m \geq N: \quad \sum_{k=m}^{n} c_k < \varepsilon.$$

Dann gilt auch

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \le \sum_{k=m}^{n} c_k < \varepsilon$$

für alle $n \ge m \ge N$. □

Aus dem Majorantenkriterium werden wir durch Vergleich mit einer geometrischen Reihe zwei weitere wichtige Konvergenzkriterien beweisen.

2.10.2 Satz (Quotientenkriterium). *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $q \in (0,1)$. Falls $a_n \neq 0$ und*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q, \quad n \in \mathbb{N},$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis. Durch Induktion über n verifizieren wir die Bedingung

$$|a_n| \le |a_0| \cdot q^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Wenn Gleichung (2.7) für n richtig ist, dann leiten wir sie für $n+1$ wie folgt ab:

$$|a_{n+1}| \le |a_n| \cdot q \le |a_0| \cdot q^n \cdot q = |a_0| \cdot q^{n+1}.$$

Wegen $|q| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ absolut. Nach Satz 2.6.8 ii) konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_0| \cdot q^k$ absolut. Gleichung (2.7) und das Majorantenkriterium zeigen die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. □

2.10.3 Bemerkung. i) Es genügt zu fordern, dass es ein n_0 gibt, so dass $a_n \neq 0$ und $|a_{n+1}/a_n| \le q$ für $n \ge n_0$.

ii) Es reicht nicht, dass $a_n \neq 0$ und $|a_{n+1}/a_n| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ein Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$. Für sie gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

sie ist aber divergent.

2.10.4 Beispiel. i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

absolut.

Für $x = 0$ ist das offensichtlich. Für $x \neq 0$ können wir das Quotientenkriterium in der Version aus Bemerkung 2.10.3, i), anwenden: Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1}.$$

Wir fixieren $n_0 \ge 2|x|$. Für $n \ge n_0$ gilt

$$\left|\frac{x}{n+1}\right| \le \frac{|x|}{2|x|+1} < \frac{1}{2}.$$

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ impliziert nach Folgerung 2.7.2, dass $(x^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Dies hatten wir in Beispiel 2.2.15 direkt überprüft.

ii) Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

konvergiert absolut.

Für $n \geq 1$ gilt $n^2/2^n > 0$. Weiter haben wir für $n \in N$:

$$\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Wenn $n \geq 3$ gilt, können wir diesen Ausdruck durch

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} < 1$$

nach oben abschätzen.

2.10.5 Hilfssatz. i) *Sei $n \geq 1$. Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ gibt es genau eine nicht negative reelle Zahl y mit $y^n = x$.*
Schreibweise: $\sqrt[n]{x} := y$.

ii) *Die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 1}$ konvergiert gegen 1.*

Beweis. i) Die Menge

$$W := \left\{ w \in \mathbb{R} \mid w \geq 0 \wedge w^n \geq x \right\}$$

ist nicht leer und durch 0 nach unten beschränkt. Daher besitzt sie ein Infimum (Satz 1.6.14 und 1.7.6). Sei $y := \inf(W)$. Es gilt sicher $y^n \geq x$. Hätten wir $y^n > x$, so folgte $y > 0$, und für $y > \varepsilon > 0$ ergäbe sich aus der Bernoulli-Ungleichung (Satz 1.3.7)

$$(y-\varepsilon)^n = y^n \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{y}\right)^n \geq y^n \cdot \left(1 - n \cdot \frac{\varepsilon}{y}\right) = y^n - n \cdot y^{n-1} \cdot \varepsilon.$$

Zu $\delta := y^n - x$ könnten wir $\varepsilon > 0$ so wählen, dass $y - \varepsilon > 0$ und

$$\varepsilon < \frac{\delta}{n \cdot y^{n-1}}.$$

Dann folgte $(y-\varepsilon)^n > x$ und $y - \varepsilon \in W$ im Widerspruch zur Definition von y.

Es bleibt die Eindeutigkeit der n-ten Wurzel nachzuweisen. Für $x = 0$ ist sie klar. Seien nun $x > 0$ und y_1, y_2 zwei verschiedene positive reelle Zahlen, so dass $y_1^n = x = y_2^n$. Wir können $y_1 < y_2$ voraussetzen. Dann ergibt sich der Widerspruch (vgl. 1.6.4)

$$x = y_1^n < y_2^n = x.$$

ii) Für $n \geq 2$ haben wir sicher $\sqrt[n]{n} > 1$. Aus der binomischen Formel (Satz 1.7.19) leitet man für eine positive reelle Zahl ε und $n \geq 2$ die Ungleichung

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + \binom{n}{2} \cdot \varepsilon^2 = 1 + \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2$$

ab. Insbesondere sehen wir

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)^n > n, \quad n \geq 2.$$

Wie im Beweis von Teil i) impliziert dies

$$1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} > \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 2.$$

Da die Folge

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$$

gegen 1 konvergiert (Übung), folgt die Behauptung aus Aufgabe 6.6.1 b). □

2.10.6 Satz (Wurzelkriterium)**.** *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $q \in (0,1)$. Wenn*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis. Wegen $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ hat man auch

$$|a_n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^n \leq q^n, \quad n \geq 1.$$

Der Satz folgt jetzt wie im Beweis des Quotientenkriteriums durch Vergleich mit der konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_0| \cdot q^k$ aus dem Majorantenkriterium. □

2.10.7 Beispiel. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(-1)^k - k} = 2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

konvergiert absolut.

Das Quotientenkriterium ist nutzlos, weil

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{2^{2n+2}}} = 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\sqrt[n]{2^{(-1)^n - n}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{2^{(-1)^n}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}.$$

Es gibt daher ein n_0, so dass

$$\sqrt[n]{2^{(-1)^n - n}} \leq \frac{3}{4} < 1, \quad n \geq n_0.$$

Dies genügt (vgl. Bemerkung 2.10.3, i).

2.10.8 Bemerkung. Das Quotienten- und das Wurzelkriterium sind beide hinreichende Kriterien für die absolute Konvergenz einer Reihe. Es gibt Fälle absolut konvergenter Reihen, bei denen beide Kriterien versagen. Ein solcher ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

die wir in Folgerung 2.7.5 als absolut konvergent nachgewiesen haben.

Es gilt

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2}, \quad n \geq 1, \tag{2.8}$$

und

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}, \quad n \geq 1. \tag{2.9}$$

Die in (2.8) und (2.9) auftretenden Folgen konvergieren beide gegen 1. Daher können wir sie durch kein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ nach oben beschränken.

2.11 Reihen: Das Cauchy-Produkt

Wir wenden uns in diesem Abschnitt dem in Bemerkung 2.6.9 aufgeworfenen Problem zu, wie man auf geeignete Weise das Produkt zweier Reihen definiert.

2.11.1 Definition. Das *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit

$$c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.11.2 Satz. *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei **absolut** konvergente Reihen. Dann ist auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Beweis. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = 0$, d.h. $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, oder $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| = 0$, dann ist die Aussage klar. Diese Fälle schließen wir in den folgenden Betrachtungen daher aus.

Für $n \in \mathbb{N}$ hat man

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)\right| \leq \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n: \\ i+j > n}} |a_i| \cdot |b_j|}_{=: r_n}.$$

Man beachte, dass aus $i+j > n$ folgt, dass $i > n/2$ oder $j > n/2$. Wie in Lemma 2.8.8 gezeigt können wir $N \in \mathbb{N}$ so festlegen, dass

$$\sum_{i>\frac{N}{2}} |a_i| < \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_k|} \quad \text{und} \quad \sum_{j>\frac{N}{2}} |b_j| < \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|}.$$

(Hier benötigen wir $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \neq 0 \neq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$.)

Für $n \geq N$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} r_n &\leq \sum_{\frac{n}{2}<i\leq n} |a_i| \cdot \sum_{k=0}^{n} |b_k| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot \sum_{\frac{n}{2}<j\leq n} |b_j| \\ &\leq \sum_{i>\frac{n}{2}} |a_i| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{j>\frac{n}{2}} |b_j| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ gegen das Produkt $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$ nachgewiesen.

Dieselbe Argumentation lässt sich auf die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ anwenden. Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} |a_i| \cdot |b_{k-i}| \right).$$

Ferner gilt

$$|c_n| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot |b_{n-i}|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Das Majorantenkriterium 2.10.1 liefert die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$, d.h. die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. □

2.11.3 Bemerkung. i) Es genügt, dass eine der beiden beteiligten Reihen absolut konvergiert (Satz von Mertens[7], s. (8), Kapitel IV, Abschnitt 32, Aufgabe 8).

ii) Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit

$$a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium 2.7.8. Jetzt bilden wir das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ dieser Reihe mit sich selbst. Dann gilt

$$|c_n| = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i+1} \cdot \sqrt{n+1-i}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{i+1} \cdot \sqrt{n+1-i}} = \frac{1}{\sqrt{(i+1)\cdot(n+1-i)}}$$

[7] Franz Mertens (1840 - 1927), deutscher Mathematiker.

wird minimal, wenn $(i+1)\cdot(n+1-i)$ maximal wird. Da entweder $i \le n/2$ und $n-i \ge n/2$ oder $i > n/2$ und $n-i < n/2$, können wir diesen Ausdruck in der Form

$$\left(\frac{n}{2}+1-\delta\right)\cdot\left(\frac{n}{2}+1+\delta\right) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \delta^2 \le \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

schreiben.

In (2.10) kommen $n+1$ Summanden vor, und jeder ist mindestens $1/(n/2+1)$, so dass

$$|c_n| \ge \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1} > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist daher keine Nullfolge, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ divergiert.

Der obige Satz ist daher i.A. falsch, wenn beide Reihen nur bedingt konvergieren.

Anhang.
Die reellen Zahlen — Eine weitere Konstruktion

Wir besprechen nun eine weitere Konstruktion der reellen Zahlen. In diesem Fall nehmen wir das Cauchysche Konvergenzkriterium (Satz 2.3.12) als Ausgangspunkt. Es gilt nicht in $\mathbb{Q}$, und wir wollen den Körper der rationalen Zahlen so erweitern, dass in der Erweiterung jede Cauchy-Folge konvergiert. Die Konstruktion von $\mathbb{R}$, die wir so erhalten, ist die technisch einfachste. Man kann ohne großen Aufwand alle Körperaxiome und die Anordnungsaxiome verifizieren. (Bei den Dedekindschen Schnitten haben wir wegen des enormen Umfangs der Nachweise noch darauf verzichten müssen.)

Man kann Folgen mit Werten in einer beliebigen Menge definieren. Insbesondere können wir Folgen rationaler Zahlen betrachten. Da wir in $\mathbb{Q}$, wie in jedem angeordneten Körper, den Absolutbetrag haben, können wir auch von konvergenten Folgen, Cauchy-Folgen usw. reden.

2.12.1 Definition. i) Der *Raum der Folgen rationaler Zahlen* ist die Menge

$$F := \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q} := \{\, f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \,\} = \{\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Schreibweise: In diesem Abschnitt schreiben wir kurz (a_n) statt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Die *Addition* ist die Abbildung

$$\begin{aligned} +\colon F\times F &\longrightarrow F \\ \big((a_n),(b_n)\big) &\longrightarrow (a_n+b_n). \end{aligned}$$

iii) Die *Multiplikation* ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \cdot\colon F\times F &\longrightarrow F \\ \big((a_n),(b_n)\big) &\longrightarrow (a_n\cdot b_n). \end{aligned}$$

iv) Für eine rationale Zahl r steht (r) für die Folge (a_n) mit $a_n = r$, $n \in \mathbb{N}$.

2.12.2 Bemerkung. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota\colon \mathbb{Q} &\longrightarrow F \\ r &\longmapsto (r) \end{aligned}$$

ist injektiv.

2.12.3 Satz. *Das Quintupel $(F, (0), (1), +, \cdot)$ ist ein kommutativer Rings mit Eins.*

Die Axiome eines kommutativen Rings mit Eins wurden in Satz 1.4.15 festgehalten.

Beweis. Das Assoziativ- und Kommutativgesetz sowie die Aussage über das Neutralelement für Addition und Multiplikation folgen unmittelbar aus den Rechenregeln für rationale Zahlen. Ferner überprüft man sofort, dass $(-a_n)$ das additive inverse Element zu $(a_n) \in F$ ist. □

2.12.4 Bemerkung. In $(F, (1), \cdot)$ existieren nicht zu allen Elementen inverse Elemente. Schlimmer noch: Es gibt **Nullteiler**, d.h. $(a_n) \neq (0)$, $(b_n) \neq (0) \in F$, so dass $(a_n) \cdot (b_n) = 0$.

2.12.5 Definition. Der *Raum der Cauchy-Folgen rationaler Zahlen* ist die Menge

$$C := \{\, (a_n) \in F \mid (a_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge} \,\}.$$

2.12.6 Lemma. i) *Für jede rationale Zahl r ist $(r) \in C$. Insbesondere $(0), (1) \in C$.*
ii) *Für $(a_n) \in C$ und $(b_n) \in C$ ist auch $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \in C$.*
iii) *Sind $(a_n) \in C$ und $(b_n) \in C$, dann auch $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) \in C$.*

Beweis. Punkt i) ist sofort klar. Die Beweise der Punkte ii) und iii) sind einfache Modifikationen der Argumente im Beweis von Satz 2.2.16. □

Mit dem Lemma erhalten wir auf C die *Addition*

$$\begin{aligned} +\colon C \times C &\longrightarrow C \\ \big((a_n), (b_n)\big) &\longrightarrow (a_n + b_n) \end{aligned}$$

und die *Multiplikation*

$$\begin{aligned} \cdot\colon C \times C &\longrightarrow C \\ \big((a_n), (b_n)\big) &\longrightarrow (a_n \cdot b_n). \end{aligned}$$

2.12.7 Folgerung. *Das Quintupel $(C, (0), (1), +, \cdot)$ ist ein kommutativer Rings mit Eins.*

2.12.8 Bemerkung. Nachwievor existieren in C Elemente ungleich (0) ohne multiplikative Inverse und Nullteiler.

Jetzt betrachten wir

$$N := \{\, (a_n) \in C \mid (a_n) \text{ ist Nullfolge} \,\}.$$

2.12.9 Lemma. i) *Die Summe zweier Nullfolgen ist eine Nullfolge:*

$$\forall (a_n), (b_n) \in N: \quad (a_n)+(b_n) \in N.$$

ii) *Das Produkt einer beliebigen Cauchy-Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge:*

$$\forall (a_n) \in C, (b_n) \in N: \quad (a_n)\cdot(b_n) \in N.$$

Der Beweis ist eine leichte Übungsaufgabe. Wir betonen nochmals, dass in ii) nur eine der beteiligten Folgen eine Nullfolge sein muss. Das ist entscheidend für die Konstruktion von $\mathbb{R}$.

2.12.10 Definition. Die Relation „$\sim$" auf C ist wie folgt erklärt:

$$\forall (a_n), (b_n) \in C: \quad (a_n) \sim (b_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_n)-(b_n) = (a_n - b_n) \in N.$$

Der Sinn dieser Relation ist unmittelbar klar: In den reellen Zahlen soll jede Cauchy-Folge konvergieren. Die Mindestanforderung ist, dass jede Cauchy-Folge von rationalen Zahlen konvergiert. In unserer Konstruktion der reellen Zahlen steht eine Cauchy-Folge von rationalen Zahlen für ihren Grenzwert in den reellen Zahlen (s. Satz 2.12.17). Da aber zwei konvergente Folgen genau dann denselben Grenzwert haben, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist, ist die Einführung der obigen Äquivalenzrelation unabdingbar.

2.12.11 Lemma. *Die Relation „$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Die Reflexivität und die Symmetrie von „$\sim$" sind sehr einfach zu überprüfen. Widmen wir uns nun der Transitivität. Es seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Cauchy-Folgen, so dass die Folgen $(a_n)-(b_n)$ und $(b_n)-(c_n)$ Nullfolgen sind. Dann ist nach Lemma 2.12.9 auch $(a_n)-(c_n) = ((a_n)-(b_n))+((b_n)-(c_n))$ eine Nullfolge, d.h. $(a_n) \sim (c_n)$. □

2.12.12 Definition.

$$\mathbb{R} := \{\, [a_n] \mid (a_n) \in C \,\}$$

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([a_n],[b_n]) &\longrightarrow [a_n + b_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([a_n],[b_n]) &\longrightarrow [a_n \cdot b_n]. \end{aligned}$$

Wie zuvor rechtfertigen wir die Definition der Abbildungen „+" und „·" im Nachhinein durch folgendes Resultat:

2.12.13 Satz. *Die Abbildungen* $+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *und* $\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *sind wohldefiniert.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für die Multiplikation. Es seien $(a_n), (a'_n)$, $(b_n), (b'_n)$ Cauchy-Folgen rationaler Zahlen, so dass $(a_n) \sim (a'_n)$ und $(b_n) \sim (b'_n)$. Dann gibt es also Nullfolgen (c_n) und (d_n) mit $(a'_n) = (a_n)+(c_n)$ und $(b'_n) = (b_n)+(d_n)$. Wir berechnen mit dem Distributivgesetz und Lemma 2.12.9

$$\begin{aligned}(a'_n)\cdot(b'_n) &= \big((a_n)+(c_n)\big)\cdot\big((b_n)+(d_n)\big)\\ &= (a_n)\cdot(b_n) + \underbrace{\underbrace{(a_n)\cdot(d_n)}_{\in N} + \underbrace{(c_n)\cdot(b_n)}_{\in N} + \underbrace{(c_n)\cdot(d_n)}_{\in N}}_{\in N}.\end{aligned}$$

Wir schließen $(a'_n)\cdot(b'_n) \sim (a_n)\cdot(b_n)$, d.h. $[a'_n]\cdot[b'_n] = [a_n]\cdot[b_n]$. □

2.12.14 Satz. *Wir setzen* $0 := [0]$ *und* $1 := [1]$. *Dann ist ein* $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$ *ein Körper.*

Beweis. Aus der Tatsache, dass $(C, (0), (1), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist, folgt, dass auch $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Somit muss noch der Nachweis erbracht werden, dass man zu jedem Element $[a_n] \neq 0$ ein multiplikatives Inverses finden kann. Die Voraussetzung $[a_n] \neq 0$ bedeutet

$$\neg\big(\forall\varepsilon\exists N\forall n \geq N : \quad |a_n| < \varepsilon\big),$$

also

$$\exists\varepsilon\forall N\exists n \geq N : \quad |a_n| \geq \varepsilon.$$

Wir fixieren solch ein ε. Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert weiter ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ für alle $m, n \geq N$. Schließlich haben wir ein $n_0 \geq N$, so dass $|a_{n_0}| \geq \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ finden wir

$$\varepsilon \leq |a_{n_0}| = |a_n + a_{n_0} - a_n| \leq |a_n| + |a_{n_0} - a_n| < |a_n| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folglich gilt $|a_n| > \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$. Wir halten fest:

$$\forall n \geq n_0 : \quad a_n \neq 0. \tag{2.11}$$

Die Folge (a'_n) sei definiert durch

$$a'_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_n = 0 \\ a_n, & \text{falls } a_n \neq 0 \end{cases}.$$

Wegen (2.11) ist (a'_n) eine Cauchy-Folge und $(a'_n) \sim (a_n)$. Nun können wir auch (b_n) mit

$$b_n := \frac{1}{a'_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

einführen. Es ist noch zu überprüfen, dass (b_n) eine Cauchy-Folge ist. Die Gleichung $[a_n]\cdot[b_n] = [a'_n]\cdot[b_n] = 1$ ist dann eine direkte Konsequenz aus der Definition.

Sei $K := \min\{\, a'_0, \ldots, a'_{n_0-1}, \varepsilon/2 \,\}$. Nach Definition gilt $|a'_n| \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\delta > 0$. Es existiert ein $m_0 \geq n_0$, so dass $|a'_n - a'_m| < \delta \cdot K^2$ für alle $m, n \geq m_0$. Damit haben wir für $m, n \geq m_0$:

$$|b_n - b_m| = |b_m - b_n| = \left|\frac{1}{a'_m} - \frac{1}{a'_n}\right| = \left|\frac{a'_n - a'_m}{a'_m \cdot a'_n}\right| = |a'_n - a'_m| \cdot \frac{1}{|a'_m| \cdot |a'_n|} < \delta \cdot K^2 \cdot \frac{1}{K^2}.$$

Dies beendet unser Argument. □

2.12.15 Definition. i) Wir definieren die Relation „$\leq$" auf $\mathbb{R}$ über

$$\forall [a_n], [b_n] \in \mathbb{R}: \quad [a_n] < [b_n] :\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: \ b_n - a_n > \varepsilon.$$
$$[a_n] \leq [b_n] :\Longleftrightarrow [a_n] < [b_n] \vee [a_n] = [b_n].$$

ii) Wir führen die folgende Abbildung ein:

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & [r]. \end{array}$$

2.12.16 Lemma. i) *Die Relation „$\leq$" ist wohldefiniert und eine Anordnung der reellen Zahlen.*

ii) *Für $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ sind folgende Aussagen wahr:*

- $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$;
- $f(r_1 \cdot r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2)$;
- $r_1 < r_2 \Longleftrightarrow f(r_1) < f(r_2)$.

iii) *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$, so dass $x < f(r)$.*

iv) *Für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $\delta > 0$, so dass $f(\delta) < \varepsilon$.*

Beweis. i) Dass die Definition von „$\leq$" nicht von der Auswahl der Repräsentanten abhängt, ist eine Anwendung der Dreiecksungleichung und wird dem geneigten Leser als Übungsaufgabe überlassen. Transitivität und Antisymmetrie sind ebenfalls sehr leicht zu sehen. Für die Totalität beachte man, dass für $[a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$ die Folge $(b_n - a_n)$ eine Cauchy-Folge ist. Wenn sie gegen 0 konvergiert, gilt $[a_n] = [b_n]$. Ansonsten existiert $\delta \in \mathbb{Q}$ mit $\delta > 0$ und $|b_n - a_n| > \delta$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Sie weiter $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall m, n \geq N: \quad |b_n - a_n - (b_m - a_m)| < \frac{\delta}{2}.$$

Wir wählen ein $n_0 \geq N$ mit $|b_{n_0} - a_{n_0}| > \delta$. Gilt $b_{n_0} - a_{n_0} > \delta$, so folgt

$$b_m - a_m > b_{n_0} - a_{n_0} - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2}, \quad m \geq N.$$

In diesem Fall haben wir $[a_n] < [b_n]$. Analog schließt man $[a_n] > [b_n]$, wenn $a_{n_0} - b_{n_0} > \delta$.

ii) Dieser Teil ist trivial.

iii) Wir schreiben $x = [x_n]$ für eine geeignete Cauchy-Folge (x_n). Die Folge (x_n) ist als Cauchy-Folge beschränkt (s. Beweis von Satz 2.3.12). Sei $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > |x_n| + 1 \geq x_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $r - x_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(r) = [r] > [x_n] = x$.

iv) Es gibt ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $1/\varepsilon < f(r)$. Es folgt $\varepsilon > 1/f(r) = f(1/r)$. Wir wählen folglich $\delta := 1/r$. □

Auf $\mathbb{R}$ haben wir den Absolutbetrag (s. Definition 1.6.5). Damit können wir auch in den neu definierten reellen Zahlen von Konvergenz, Cauchy-Folgen usw. reden. Sei (a_n) eine Cauchy-Folge **rationaler** Zahlen. Dann ist $(f(a_n))$ nach Lemma 2.12.16 eine Cauchy-Folge reeller Zahlen. Ziel unserer Konstruktion von $\mathbb{R}$ war es, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert. Der Grenzwert für die Folge $(f(a_n))$ sollte die reelle Zahl $a = [a_n]$ sein. Dies ist in der Tat so:

2.12.17 Satz. *Es sei $(a_n) \in C$. Dann konvergiert die Folge $(f(a_n)) \in \mathbb{R}$, und ihr Grenzwert ist $a = [a_n]$.*

Beweis. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ soll ein $N \in \mathbb{N}$ gefunden werden, so dass $|a - f(a_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Unter Vermeidung der Betragsstriche haben wir zu zeigen, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a - f(a_n) < \varepsilon \quad \text{und} \quad f(a_n) - a < \varepsilon.$$

Nach Lemma 2.12.16 iv) können wir $\varepsilon = f(\delta)$ für $\delta \in \mathbb{Q}$ annehmen. Sei $\rho := \delta/2$. Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a_m| < \frac{\delta}{2} = \delta - \rho, \quad m, n \geq N.$$

Wir schließen $a_n - a_m < \delta - \rho$, i.e. $a_n - a_m - \delta < -\rho$, und $a_m - a_n < \delta - \rho$, d.h. $a_m - a_n - \delta < -\rho$, $m, n \geq N$. Multiplikation dieser Ungleichungen mit -1 führt zu

$$a_m - a_n + \delta > \rho \quad \text{und} \quad a_n - a_m + \delta > \rho, \quad m, n \geq N. \tag{2.12}$$

Wir halten $n \geq N$ fest. Ungleichung (2.12) und Definition 2.12.15 besagen, dass

$$a - f(a_n) + f(\delta) > 0 \quad \text{und} \quad f(a_n) - a + f(\delta) > 0, \quad n \geq N.$$

Nach Multiplikation mit -1 wird dies zu $f(a_n) - a < f(\delta)$ und $a - f(a_n) < f(\delta)$, d.h. zu $|a - f(a_n)| < f(\delta)$ für $n \geq N$. Unsere Arbeit ist nun getan. □

2.12.18 Satz. *In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.*

Beweis. Sei (α_n) eine Cauchy-Folge von reellen Zahlen. Sei weiter $(e_n) \in C$ durch $e_n := 1/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Nach Satz 2.12.17 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $b_n \in \mathbb{Q}$ mit $|\alpha_n - f(b_n)| < f(e_n)$.

In einem Zwischenschritt zeigen wir nun, dass (b_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei $\delta \in \mathbb{Q}$ mit $\delta > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha_n - \alpha_m| < f(\delta/3)$ für alle $m, n \geq N$ und $e_n < \delta/3$ für alle $n \geq N$. Für $m, n \geq N$ schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |f(b_n) - f(b_m)| &= |f(b_n) - \alpha_n + \alpha_n - \alpha_m + \alpha_m - f(b_m)| \\ &\leq |f(b_n) - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |f(b_m) - \alpha_m| \\ &< f(e_n) + f\left(\frac{\delta}{3}\right) + f(e_m) \\ &< f\left(\frac{\delta}{3}\right) + f\left(\frac{\delta}{3}\right) + f\left(\frac{\delta}{3}\right) = f(\delta). \end{aligned}$$

Wir setzen $a := [b_n]$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 2.12.17 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a - f(b_n)| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Wir dürfen ferner annehmen, dass $f(e_n) < \varepsilon/2$. Für $n \geq N$ erhalten wir

$$|\alpha_n - a| = |\alpha_n - f(b_n) + f(b_n) - a| \leq |f(b_n) - \alpha_n| + |f(b_n) - a| < f(e_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Warum liefert diese Konstruktion dasselbe Ergebnis, wie die mit Dedekinschen Schnitten? Es sei $\mathbb{R}_D$ der mit Dedekindschen Schnitten konstruierte Körper der reellen Zahlen und $\mathbb{R}_C$ der mit Cauchy-Folgen konstruierte. Beide Körper enthalten den Körper der rationalen Zahlen. Es sei $[a_n] \in \mathbb{R}_C$. Die Folge (a_n) besitzt in $\mathbb{R}_D$ einen Grenzwert α. Man kann nachprüfen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_C & \longrightarrow & \mathbb{R}_D \\ [a_n] & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

wohldefiniert, mit allen Zusatzstrukturen verträglich und bijektiv ist. Sie identifiziert die beiden Konstruktionen miteinander.

Kapitel 3

Reelle Funktionen und Stetigkeit

3.1 Definition und erste Beispiele

Wir führen jetzt den Begriff einer (reellen) Funktion (in einer Veränderlichen) ein und stellen einige Standardbeispiele vor.

3.1.1 Definition. i) Eine *reelle Funktion* ist eine Zuordnung f, die jedem Element aus einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ eine reelle Zahl y zuordnet.

Man nennt die Menge D den *Definitionsbereich von* f. Die Menge

$$W(f) := \{\, y = f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D \,\} \subset \mathbb{R}$$

heißt der *Wertebereich von* f und die Menge

$$\Gamma(f) := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D \wedge y = f(x) \,\}$$

der *Graph von* f.

Schreibweise:

$$\begin{array}{rcl} f\colon D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

ii) Es seien

$$\begin{array}{rcl} f\colon D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

und

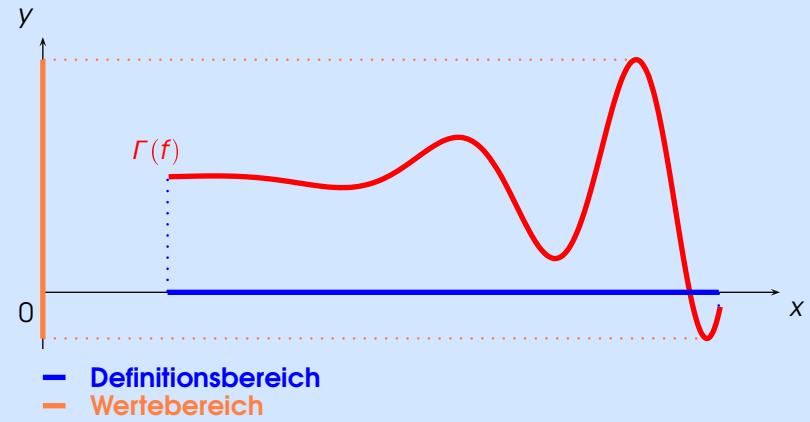
$$\begin{array}{rcl} g\colon D(g) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

zwei reelle Funktionen. Wir sagen f *ist gleich* g, wenn

- $D(f) = D(g)$ und
- $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f) = D(g)$.

Schreibweise: $f = g$.

Zu Definition 3.1.1: Definitions-, Wertebereich und Graph einer Funktion.



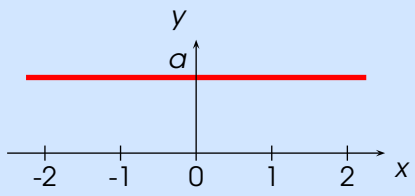
3.1.2 Bemerkung. Die Angabe des Definitionsbereichs ist Bestandteil der Definition einer Funktion, nicht nur die „Abbildungsvorschrift". Wenn z.B. eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist und $D' \subsetneq D$ eine echte Teilmenge, dann definiert man *die Einschränkung von f auf D'* als

$$\begin{array}{rcl} f_{|D'}\colon D' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

In Anwendungen beschränkt man sich auf „sinnvolle" Definitionsbereiche, z.B. Zeit $t \geq 0$.

3.1.3 Beispiel. i) *Konstante Funktionen.* Es sei $a \in \mathbb{R}$. Man definiere

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a. \end{array}$$



- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.
- Wertebereich: $W(f) = \{a\}$.

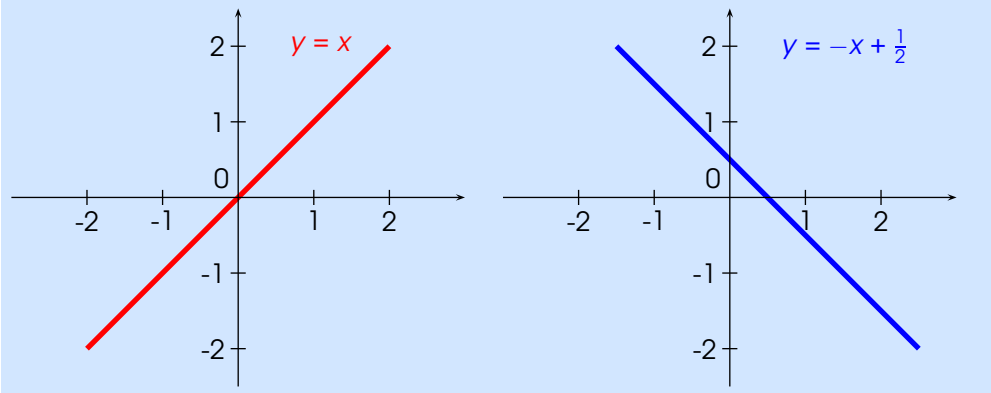
ii) *Lineare Funktionen.* Es seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$. Man setze

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a \cdot x + b. \end{array}$$

Es gilt:

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.
- Wertebereich: $\mathbb{R}$ (Beweis: $y \in \mathbb{R} \Rightarrow y = f((y-b)/a)$).

Für $a = 1$ und $b = 0$ spricht man von der *Identität* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ *auf* $\mathbb{R}$. Analog erhält man für $D \subset \mathbb{R}$ durch Einschränkung von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ auf D die *Identität* id_D *auf* D.



iii) *Quadratische Funktionen*. Es seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Man betrachte

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a \cdot x^2 + b \cdot x + c. \end{array}$$

Man kann eine solche Funktion auf eindeutige Weise in *Scheitelpunktform* schreiben, i.e. es existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen x_0 und y_0 mit

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0.$$

In der Tat liest man aus dieser Gleichung

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \qquad \text{und} \qquad y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$$

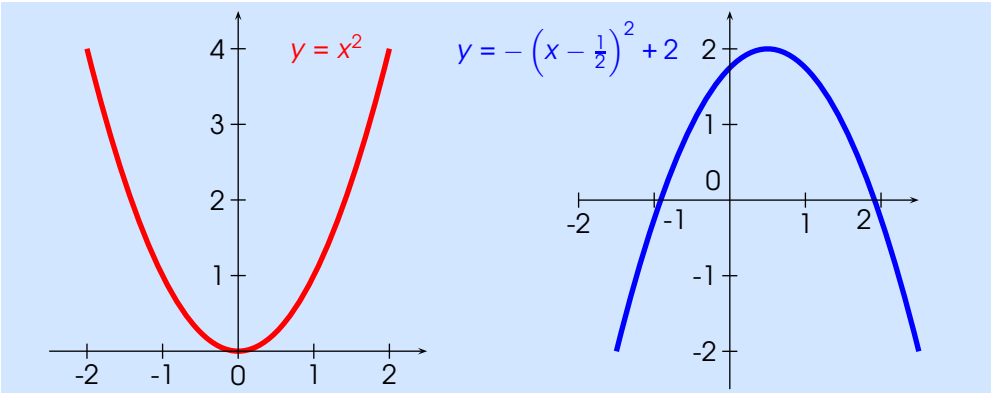
ab. Der Punkt $(x_0, y_0) \in \Gamma(f)$ heißt *Scheitelpunkt der Parabel*.

Es gilt:

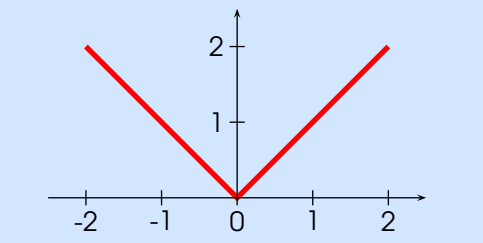
- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.
- Wertebereich:

$$W(f) = \begin{cases} \{ y \geq y_0 \} & \text{falls } a > 0 \\ \{ y \leq y_0 \} & \text{falls } a < 0 \end{cases}.$$

(Beweis für $a > 0$: Aus $y = f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ folgt $(1/a)(y - y_0) = (x - x_0)^2$. Dies ist nur möglich für $y \geq y_0$. In diesem Fall ist $x = \sqrt{(1/a)(y - y_0)} + x_0$ eine Lösung.)



iv) *Der Absolutbetrag* (vgl. Definition 1.6.5).

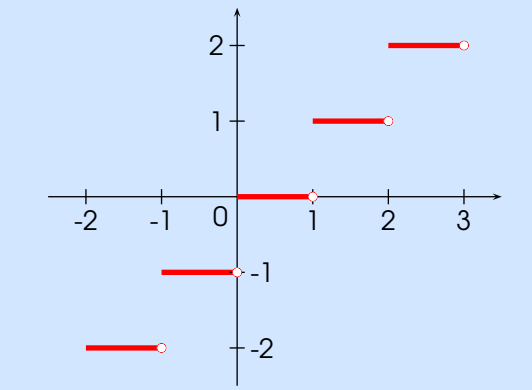


$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |x| := \max\{-x, x\}.$$

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.
- Wertebereich:

$$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \,\}.$$

v) *Die (untere) Gauß-Klammer.*

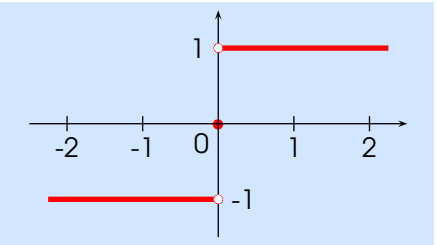


$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto [x] := \max\{\, m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \,\}.$$

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.
- Wertebereich: $\mathbb{Z}$.

vi) *Die Vorzeichenfunktion* (vgl. Definition 1.6.5).

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sign}\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases} . \end{array}$$



- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.
- Wertebereich: $\{-1, 0, 1\}$.

vii) Ein exotisches Beispiel.

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} . \end{array}$$

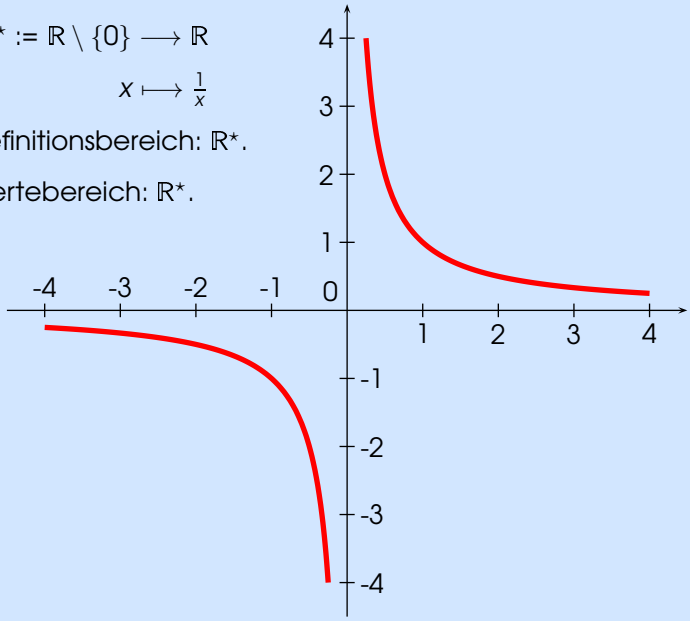
- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$.
- Wertebereich: $\{0, 1\}$.

viii) *Die Hyperbel.*

$f\colon \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}^*$.
- Wertebereich: $\mathbb{R}^*$.



3.2 Neue Funktionen aus alten

Die Rechenoperationen auf den reellen Zahlen können zu einem gewissen Grad auf Funktionen übertragen werden. Dies wird im Folgenden erklärt.

3.2.1 Definition. Es seien $f\colon D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen.

i) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das *λ-Fache von f* die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot f\colon D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot f(x) \quad \text{(Multiplikation in } \mathbb{R}\text{)}. \end{array}$$

Speziell $-f := (-1) \cdot f$ „*Minus f*“.

ii) Die *Summe* bzw. *Differenz von f und g* ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f \pm g\colon D(f) \cap D(g) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \pm g(x) \quad \text{(Addition in } \mathbb{R}\text{)}. \end{array}$$

iii) Das *Produkt von f und g* ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f \cdot g\colon D(f) \cap D(g) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \cdot g(x) \quad \text{(Multiplikation in } \mathbb{R}\text{)}. \end{array}$$

v) Die *Verknüpfung/Komposition von f und g* ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\circ g\colon \{\, x\in D(g)\mid g(x)\in D(f)\,\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto f\big(g(x)\big). \end{aligned}$$

(Man beachte die Reihenfolge!)

3.2.2 Beispiel. Es seien $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto x+3$, und $g\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto x^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g\circ f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto g\big(f(x)\big)=g(x+3)=(x+3)^2=x^2+6x+9 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f\circ g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto f\big(g(x)\big)=f(x^2)=x^2+3. \end{aligned}$$

Man beachte $f\circ g\neq g\circ f$!

3.3 Erste Eigenschaften reeller Funktionen

Dieses und die folgenden Kapitel beschäftigen sich mit dem Studium reeller Funktionen. In diesem Abschnitt führen wir einige elementare Begriffe ein, die der Beschreibung reeller Funktionen dienen.

Nullstellen

3.3.1 Definition. Es sei $f\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Zahl $x_0\in D$ heißt *Nullstelle von f*, wenn $f(x_0)=0$ gilt. Man sagt auch: *f besitzt an der Stelle x_0 eine Nullstelle*.

3.3.2 Bemerkung. Eine Zahl $x_0\in D$ ist genau dann Nullstelle von f, wenn der Graph $\Gamma(f)$ die x-Achse im Punkt $(x_0,0)$ schneidet.

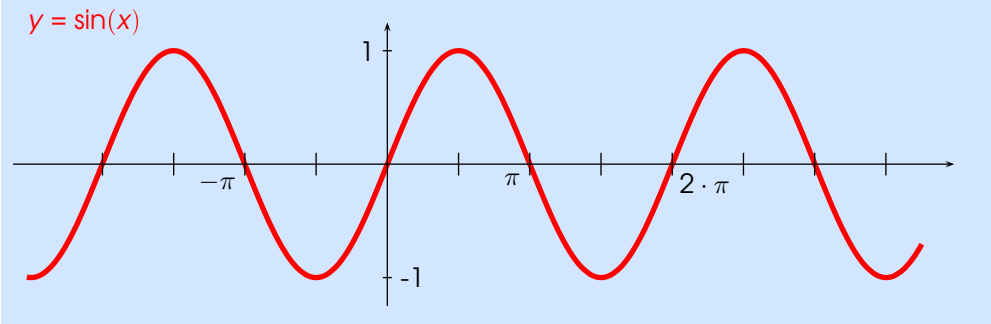
3.3.3 Beispiel. i) Es sei $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto a\cdot x+b$, mit $a\neq 0$ eine lineare Funktion. Dann besitzt f genau eine Nullstelle, nämlich $x_0=-b/a$.

ii) Es sei $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto a\cdot x^2+b\cdot x+c$, mit $a\neq 0$ eine quadratische Funktion. Man setze $\Delta:=b^2-4ac$ (*Diskriminante*). Aus Beispiel 3.1.3 iii) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta<0 &\iff f \text{ besitzt keine Nullstelle.}\\ \Delta=0 &\iff f \text{ besitzt genau eine Nullstelle,}\\ &\quad \text{nämlich } x_0=-\tfrac{b}{2a}.\\ \Delta>0 &\iff f \text{ besitzt genau zwei Nullstellen,}\\ &\quad x_1=\tfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ und } x_2=\tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

iii) Die Funktion $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(x)$,[1] besitzt unendlich viele Nullstellen und zwar an den Stellen

$$x_0 \in \{ k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$



Symmetrieeigenschaften

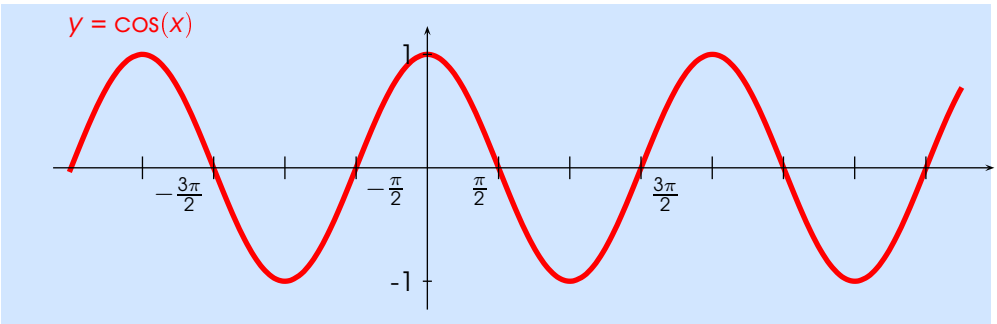
3.3.4 Definition. i) Eine reelle Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in D$ gilt
- $-x \in D$ und
- $f(-x) = f(x)$.

ii) Eine reelle Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in D$ gilt
- $-x \in D$ und
- $f(-x) = -f(x)$.

3.3.5 Bemerkung. i) Eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann gerade, wenn ihr Graph $\Gamma(f)$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

ii) Eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ungerade, wenn ihr Graph $\Gamma(f)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

3.3.6 Beispiel. i) Beispiele für gerade Funktionen.
- Konstante Funktionen.
- Quadratische Funktionen der Gestalt $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto a \cdot x^2 + c$, $a \neq 0$.
- Der Absolutbetrag.
- Die Kosinusfunktion.



ii) Beispiele für ungerade Funktionen.
- Lineare Funktionen der Gestalt $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto a \cdot x$, $a \neq 0$, d.h. Geraden durch den Ursprung.
- Die Vorzeichenfunktion.
- $f\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$.
- Die Sinusfunktion.

[1] Wir setzen voraus, dass Ihnen der Sinus und der Kosinus aus der Schule bekannt sind. Eine genaue Definition und Diskussion folgt in Abschnitt 3.8 und 4.8.

Periodizität

3.3.7 Definition. Es sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Zahl $p \in \mathbb{R}^\star$ heißt *Periode von* f, wenn für alle $x \in D$ gilt:

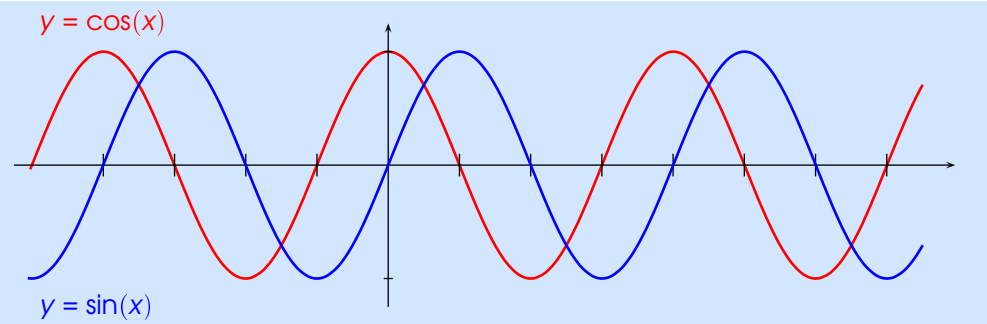
- $x \pm p \in D$ ($\Longleftrightarrow\ x + k \cdot p \in D$ für alle $k \in \mathbb{Z}$) und
- $f(x \pm p) = f(x)$.

Die Funktion f heißt *periodisch*, wenn sie eine Periode besitzt.

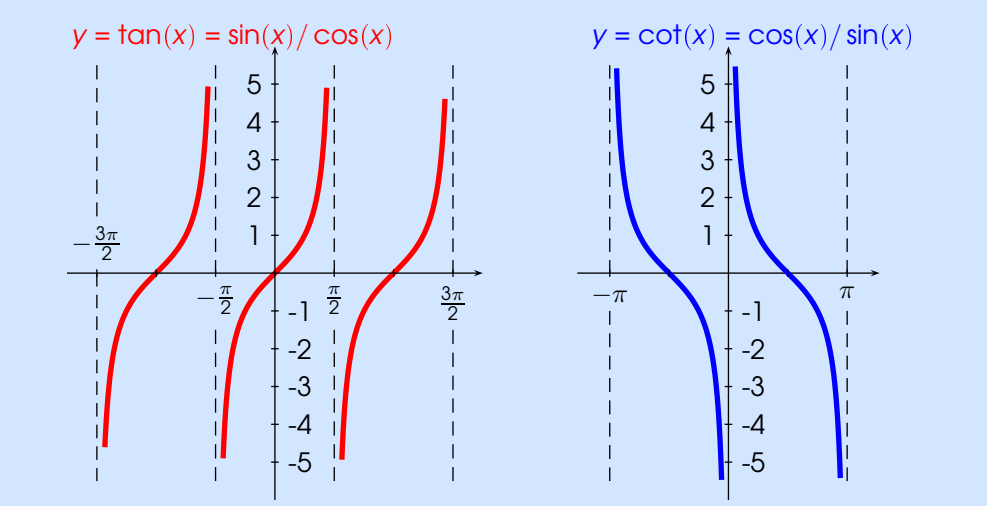
Falls existent[2] wird die kleinste positive Periode einer periodischen, nicht konstanten Funktion *primitive Periode* genannt.

(Man beachte: p Periode von f und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow k \cdot p$ Periode von f.)

3.3.8 Beispiel. i) Die Sinus- und Kosinusfunktion sind periodisch mit primitiver Periode 2π.



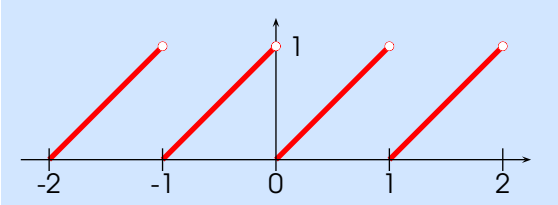
ii) Die Tangens- und Kotangensfunktion sind periodisch mit primitiver Periode π.



iii) *Die Sägezahnfunktion.* Man definiere

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - [x]. \end{aligned}$$

[2] vgl. hierzu Aufgabe 6.10.2



- $W(f) = [0, 1)$.
- f ist periodisch

  mit primitiver Periode 1.

Injektivität und Umkehrfunktionen

3.3.9 Definition. Es sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit Wertebereich $W(f)$.
i) Eine Funktion $g\colon W(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Umkehrfunktion von f*, wenn gilt
- $W(g) = D$, i.e. der Wertebereich von g stimmt mit dem Definitionsbereich von f überein.
- Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{W(f)}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_D$.[3]

Schreibweise: $f^{-1} := g$.
ii) Die Funktion f heißt *injektiv/umkehrbar*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt:

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

3.3.10 Satz. *Eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie eine Umkehrfunktion besitzt.*

Beweis. Es gebe eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W(f) \longrightarrow D$. Seien $x_1, x_2 \in D$, so dass $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt wegen $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$

$$x_1 = (f^{-1} \circ f)(x_1) = f^{-1}\big(f(x_1)\big) = f^{-1}\big(f(x_2)\big) = (f^{-1} \circ f)(x_2) = x_2.$$

Somit ist f injektiv.

Sei umgekehrt $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv. Für $y \in W(f)$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Auf Grund der Injektivität von f ist x eindeutig bestimmt. Damit ist

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}\colon W(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ y & \longmapsto & x & \text{mit } x \in D, \text{ so dass } f(x) = y \end{array}$$

eine Funktion. Auf Grund der Definition gilt $W(f^{-1}) \subset D$, und wir können $f \circ f^{-1}$ bilden. Für $y \in W(f)$ haben wir nach Definition $f(f^{-1}(y)) = y$. Dies zeigt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{W(f)}$.

Für $x \in D$ gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ wegen $x \in D$ und $f(x) = f(x)$. Damit gilt $D \subset W(f^{-1})$ und folglich $D = W(f^{-1})$. Außerdem haben wir $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$ gezeigt. □

3.3.11 Bemerkung. i) Eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn der Graph $\Gamma(f)$ jede zur x-Achse parallele Gerade höchstens einmal schneidet.

ii) Den Graphen $\Gamma(f^{-1})$ der Umkehrfunktion einer injektiven Funktion f erhält man durch Spiegelung von $\Gamma(f)$ an der Geraden $\{\, y = x \,\}$.

3.3.12 Beispiel. i) Eine lineare Funktion

$$\begin{array}{rccl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & a \cdot x, & \end{array}$$

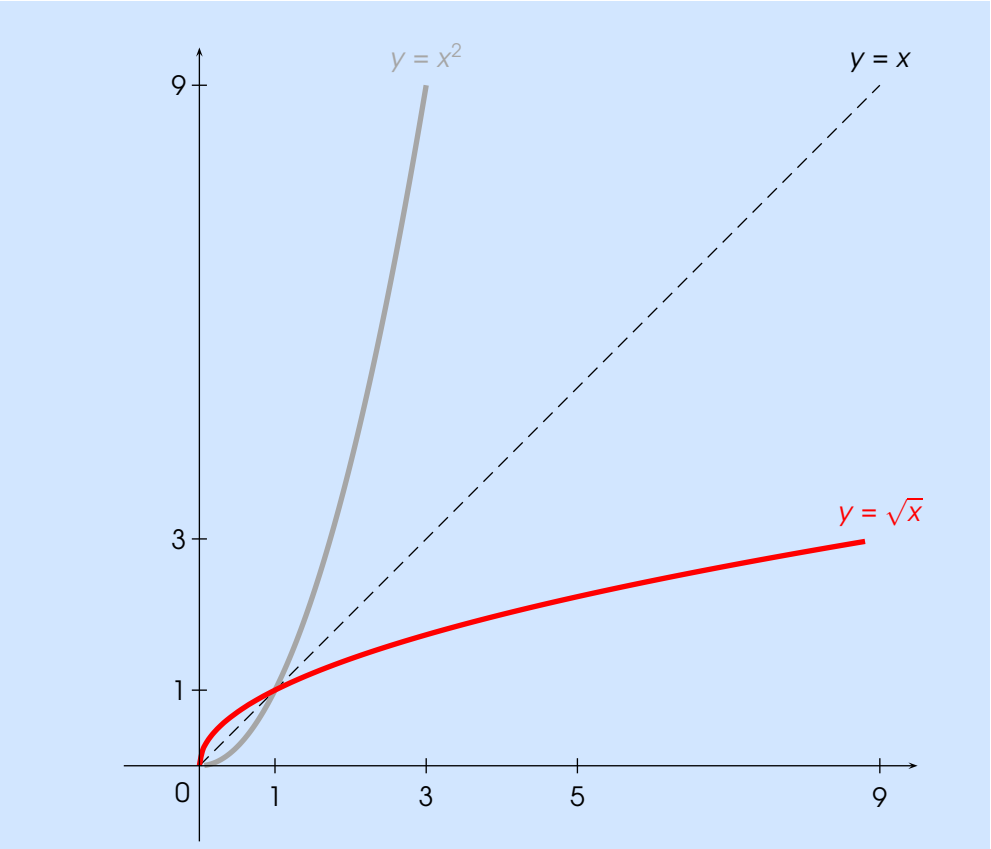
[3] Es genügt, eine der beiden Gleichungen zu fordern (Übung).

$a \in \mathbb{R}^*$, ist umkehbar mit

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{a} \cdot x, \end{array}$$

ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, ist nicht umkehrbar, da $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Ihre Einschränkung $g := f_{|\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist jedoch umkehrbar, und es gilt

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}\colon & \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$



iii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $x \longmapsto 1/x$, ist umkehrbar. Es gilt $f^{-1} = f$.

Monotonie

3.3.13 Definition. Es sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

i) Die Funktion f wird *monoton wachsend* bzw. *monoton fallend* genannt, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \leq x_2$

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{gilt.}$$

ii) Die Funktion f wird *streng monoton wachsend (smw)* bzw. *streng monoton fallend (smf)* genannt, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \text{gilt.}$$

3.3.14 Bemerkung. Jede streng monoton wachsende/fallende Funktion ist nach Definition umkehrbar.

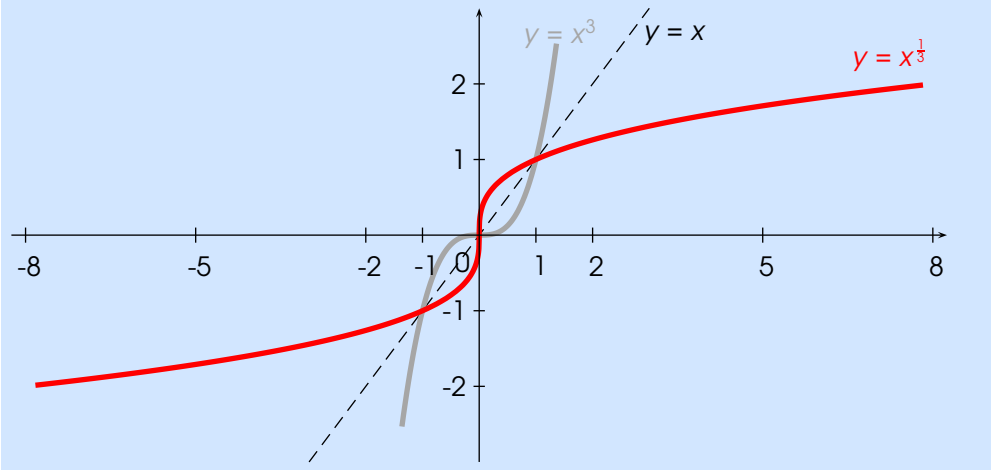
3.3.15 Beispiel. i) Jede konstante Funktion ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend aber weder smw noch smf.

ii) Die Vorzeichenfunktion ist monoton wachsend, aber weder monoton fallend noch smw noch smf.

iii) Die untere Gaussklammer ist monoton wachsend, aber weder monoton fallend noch smw noch smf.

iv) Eine lineare Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto a \cdot x + b$, $a \neq 0$, ist genau dann smw bzw. smf, wenn $a > 0$ bzw. $a < 0$ gilt.

v) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$, ist smw und damit umkehrbar.



vi) *Der Arkussinus.* Die Sinusfunktion ist im abgeschlossenen Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ smw. Der Wertebereich der auf das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ eingeschränkten Sinusfunktion ist das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$. Ihre Umkehrfunktion ist nach Definition der Arkussinus

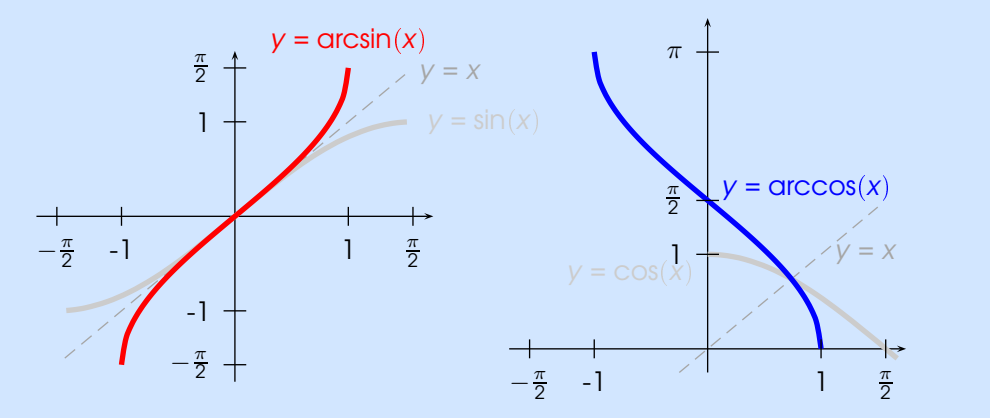
$$\begin{aligned} \arcsin\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

mit dem Wertebereich $[-\pi/2, \pi/2]$.

vii) *Der Arkuskosinus.* Die Kosinusfunktion ist im abgeschlossenen Intervall $[0, \pi]$ smf. Der Wertebereich der Funktion $\cos_{|[0,\pi]}$ ist das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion ist der sogenannte Arkuskosinus

$$\begin{aligned} \arccos\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \arccos(x). \end{aligned}$$

Nach Definition gilt $W(\arccos) = [0, \pi]$.



3.4 Grenzwerte und Stetigkeit

Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt a bedeutet, dass sich die Funktionswerte in der Nachbarschaft des Punktes a nur wenig von denen am Punkt a unterscheiden. Sie ist eine nützliche Voraussetzung für das Studium von Extremwerten (vgl. Satz 3.5.3) und eine hinreichende Bedingung für Integrierbarkeit (s. Satz 5.1.9 i). Die Formulierung von Stetigkeit benutzt den Begriff des Grenzwerts einer Funktion. Dieser wiederum baut auf dem Grenzwertbegriff für Folgen auf.

Grenzwerte von Funktionen

3.4.1 Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Menge D, wenn es eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gibt. Die Menge

$$\overline{D} := \{\, a \in \mathbb{R} \mid a \text{ ist Häufungspunkt von } D \,\}$$

ist der *Abschluss von D*.

3.4.2 Bemerkung. i) Jeder Punkt $a \in D$ ist Häufungspunkt von D. Man nehme einfach $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := a$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) Für $(0,1), [0,1), (0,1], [0,1] \subset \mathbb{R}$ ist der Abschluss $[0,1]$.

3.4.3 Definition. Es seien $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in \overline{D}$ oder $a = -\infty$ bzw. $a = \infty$, falls D nicht nach unten bzw. oben beschränkt ist.

i) Die Zahl $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *(links- bzw. rechtsseitiger) Grenzwert von f an der Stelle a*, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

- $x_n \in D$ (und $x_n \le a$ bzw. $x_n \ge a$) für alle $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Schreibweise: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ($\lim_{x\to a-0} f(x) = b$ bzw. $\lim_{x\to a+0} f(x) = b$).

ii) Falls der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert von f an der Stelle a existiert und $\pm\infty$ ist, so nennen wir a eine *Polstelle von f*.

3.4.4 Bemerkung. i) Für Grenzwerte von Funktionen gelten dieselben Rechenregeln wie für Grenzwerte von Folgen.

ii) Im Allgemeinen braucht weder der links- noch der rechtssseitige Grenzwert zu existieren. Man betrachte z.B. die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Dann gibt es für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergieren, mit $x_n < a$ und $y_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$.

iii) Falls sowohl der linksseitige Grenzwert b_- als auch der rechtsseitige Grenzwert b_+ von f an der Stelle a existieren und $b_- = b_+ =: b$ gilt, dann existiert der Grenzwert von f an der Stelle a und ist gleich b. (Beweis?)

3.4.5 Beispiel. i) Es seien $f\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$, und $a = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \infty.$$

Wir sprechen von einer *Polstelle mit Vorzeichenwechsel*.

ii) Für die Vorzeichenfunktion existieren an der Stelle 0 weder der links- noch der rechtsseitige Grenzwert, da

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1, \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ und}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}(0) = 0.$$

Für $f := \operatorname{sign}_{|\mathbb{R}^*}$ gilt

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = -1 \text{ und } \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1.$$

iii) Es sei $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto [x]$, die Gaußklammer. Dann hat man für $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

und für $m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to m+0} [x] = m = f(m).$$

Der linksseitige Grenzwert an der Stelle m existiert wiederum nicht.

Stetigkeit

3.4.6 Definition. Es seien $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in D$.

i) Die Funktion f heißt *(links-* bzw. *rechtsseitig) stetig im Punkte* a, wenn der (links- bzw. rechtsseitige) Grenzwert von f in a existiert, d.h.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\Big(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)\Big).$$

Wir nennen f *unstetig an der Stelle* a, wenn f in a nicht stetig ist.

ii) Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist. Andernfalls nennt man f *unstetig*.

iii) Für eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ bezeichnet $\mathscr{C}(D)$ die Menge der stetigen Funktionen mit Definitionsbereich D.

3.4.7 Bemerkung. In manchen Quellen wird vorausgesetzt, dass f „in einer Umgebung von a" definiert ist. Das soll heissen, dass es eine (hinreichend kleine) Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass $(a-\delta, a+\delta) \subset D$. In unseren Beispielen wird diese Bedingung immer erfüllt sein.

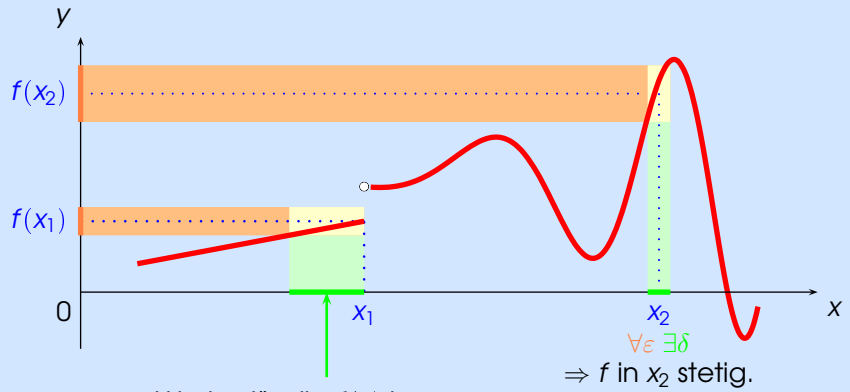
Anschaulich bedeutet Stetigkeit in a, dass man den Graphen von f durch den Punkt $(a, f(a))$ durchzeichnen kann, ohne abzusetzen.

Eine andere geläufige Definition von Stetigkeit ist die sogenannte „ε-δ-Definition":

3.4.8 Satz. *Es sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann ist f genau dann in $a \in D$ stetig, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$\forall x \in D \text{ mit } |x-a| < \delta: \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Zur ε-δ-Definition der Stetigkeit (Satz 3.4.8).



x-Werte, für die $f(x)$ im orange eingefärbten „ε-Streifen" um $f(x_1)$ liegt. Dies ist ein Intervall der Form $(x_1-\delta, x_1]$
$\Rightarrow$ f in x_1 **nicht** stetig.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass f das „ε-δ-Kriterium" im Punkt a erfüllt. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Wir wollen die Konvergenz der Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ studieren. Dazu geben wir $\varepsilon > 0$ vor. Nach Voraussetzung gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $|x-a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ folgt. Weiterhin können wir einen Index $N \in \mathbb{N}$ festlegen, so dass $|a_n - a| < \delta$ für alle $n \geq N$ gilt. Dies impliziert $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Unser Anliegen ist damit erledigt.

Nun sei die Funktion f in a stetig. Wir nehmen an, sie genüge nicht dem ε-δ-Kriterium im Punkt a. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ gibt. Insbesondere können wir Elemente $a_n \in D$ mit

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(a_n) - f(a)| \geq \varepsilon, \quad n \geq 1,$$

finden. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert offenbar gegen a. Entweder ist die Folge $(f(a_n))_{n\geq 1}$ divergent, oder es gilt $|\lim_{n\to\infty} f(a_n) - f(a)| = \lim_{n\to\infty} |f(a_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ nach Aufgabe 6.6.1, a), und Satz 2.2.18. Dies steht im Widerspruch zur Stetigkeit von f in a. □

3.4.9 Folgerung. *Es sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $a \in D$ stetig ist. Gilt $f(a) \neq 0$, dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$.*

Beweis. Man wähle $\varepsilon := |f(a)| > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$. Es folgt $|f(x)| \geq |f(a)| - |f(x) - f(a)| > |f(a)| - \varepsilon = 0$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$. □

3.4.10 Beispiel. i) Beispiele für stetige Funktionen sind konstante, lineare und quadratische Funktionen, der Absolutbetrag, die Funktion $f\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$, sowie Sinus und Kosinus.

ii) Die Vorzeichenfunktion ist an der Stelle 0 weder links- noch rechtsseitig stetig. In allen anderen Punkten ist sie stetig.

iii) Die Gaußklammer ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig. An einer Stelle $a \in \mathbb{Z}$ ist sie rechtsseitig aber nicht linksseitig stetig.

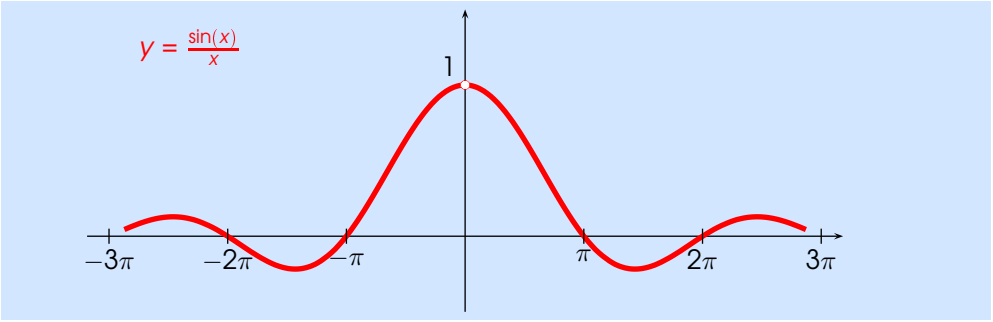
iv) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Q}$, ist an keiner Stelle links- oder rechtsseitig stetig.

v) *Stetige Ergänzung/Fortsetzung.* Es seien $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in \overline{D} \setminus D$. Wir nehmen an, dass $b = \lim_{x \to a} f(x)$ existiert, und definieren

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}\colon D \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a. \end{cases} \end{array}.$$

Dann ist $\overline{f}$ wieder eine stetige Funktion. Dieses Verfahren wird z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen angewandt.

Z.B. findet man für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(x)/x$, dass $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ (s. Aufgabe 6.11.3). Man kann f also in 0 stetig ergänzen.



Neue stetige Funktionen aus alten

Der folgende Satz ergibt sich unmittelbar aus den Rechenregeln für Grenzwerte bzw. der Definition von Stetigkeit.

3.4.11 Satz. *Es seien $f\colon D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen*

$$\lambda \cdot f, \quad f \pm g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad \text{und} \quad g \circ f$$

in ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig (s. Definition 3.2.1).

3.4.12 Beispiel. Da die Sinus- und die Kosinusfunktion stetig sind, sind auch die Tangensfunktion

$$\begin{aligned} \tan\colon \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

und die Kotangensfunktion

$$\begin{aligned} \cot\colon \mathbb{R} \setminus \left\{ k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$

stetig.

3.4.13 Satz. *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine smw bzw. smf* ***stetige*** *Funktion. Dann gilt $W(f) = I$ mit $I = [f(a), f(b)]$ bzw. $I = [f(b), f(a)]$ (vgl. Satz 3.5.3), und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ebenfalls smw bzw. smf und stetig.*

Beweis. Wir werden den Beweis im Anschluss an Satz 3.5.3 führen. □

3.4.14 Beispiel. Aus diesem Satz folgt, dass die Wurzelfunktion, der Arkussinus und der Arkuskosinus stetige Funktionen sind.

3.5 Wichtige Sätze über stetige Funktionen

Stetige Funktionen haben einige bemerkenswerte Eigenschaften, die sie für die Mathematik sehr wichtig machen. Eine davon ist, dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ein Minimum und ein Maximum annimmt. Diesen und andere Sätze werden wir jetzt beweisen.

3.5.1 Satz (Existenz von Nullstellen)**.** *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass $f(a)\cdot f(b) < 0$ (d.h. entweder $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$), dann gibt es eine Stelle $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir behandeln den Fall $f(a) < 0 < f(b)$. Im anderen Fall betrachte man einfach die Funktion $-f$. Wir definieren induktiv eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie eine monoton fallende Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften

1. $b_n - a_n = (b-a)/2^n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
2. $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

vermöge folgender Vorschrift

- $a_0 := a$ und $b_0 := b$.
- Es seien $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots, b_n$ bereits definiert. Wir setzen $m := (a_n + b_n)/2$ und

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= a_n \text{ und } b_{n+1} := m, \quad \text{falls } f(m) \geq 0 \\ a_{n+1} &:= m \text{ und } b_{n+1} := b_n, \quad \text{falls } f(m) < 0. \end{aligned}$$

Da die beiden Folgen monoton und beschränkt sind, konvergieren sie, und wegen 1. gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: x_0 \in (a,b).$$

Aus der Stetigkeit und Eigenschaft 2. folgt nach Satz 2.2.18

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0),$$

i.e. $f(x_0) = 0$. □

3.5.2 Folgerung (Zwischenwertsatz). *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert für jede Zahl $y_0 \in (f(a), f(b))$ bzw. $y_0 \in (f(b), f(a))$ eine Zahl $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = y_0$.*

Beweis. Es gilt $f(a) < y_0 < f(b)$ oder $f(a) > y_0 > f(b)$. Die Aussage ergibt sich durch Anwendung des vorigen Satzes auf $f - y_0\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) - y_0$. □

3.5.3 Satz (Existenz von Minima und Maxima). *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Wertebereich beschränkt, und es gibt Stellen $x_m \in [a,b]$ und $x_M \in [a,b]$ mit*

$$\begin{aligned} f(x_m) &= \inf\big(W(f)\big) \\ f(x_M) &= \sup\big(W(f)\big). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt nach dem Zwischenwertsatz $W(f) = [f(x_m), f(x_M)]$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass der Wertebreich beschränkt ist und zeigen die Aussage für das Supremum. Die Aussage über das Infimum erhält man durch Betrachtung von $-f$. Nach Definition des Supremums können wir eine konvergente Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\beta_n \in W(f)$ und $\lim_{n\to\infty}\beta_n = s := \sup(W(f))$ finden. Es gibt Elemente $\alpha_n \in D$ mit $f(\alpha_n) = \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, weil $\alpha_n \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$. Der Satz von Bolzano–Weierstraß (Satz 2.3.9) garantiert die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $\alpha \in [a,b]$ der Grenzwert dieser Teilfolge. Auf Grund der Stetigkeit gilt

$$f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} f(\alpha_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \beta_{n_k}.$$

Damit ist $f(\alpha)$ Häufungspunkt der Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Letztere ist aber konvergent und hat als einzigen Häufungspunkt den Grenzwert s (s. Beispiel 2.3.5, i). Es folgt $f(\alpha) = s$.

Jetzt weisen wir nach, dass der Wertebereich nach oben beschränkt ist. Das Argument für die Beschränktheit nach unten verläuft analog. Wäre der Wertebereich nicht nach oben beschränkt, so könnten wir eine Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\beta_n \in W(f)$ und $\lim_{n\to\infty}\beta_n = \infty$ finden. So eine Folge hat keinen Häufungspunkt (warum?). Das zuvor verwendete Argument zeigt aber, dass diese Folge doch einen Häufungspunkt haben müsste, und führt unsere Annahme ad absurdum. □

3.5.4 Bemerkung. Dieser Satz ist falsch für (halb)offene Intervalle. Man betrachte z.B. $f\colon [-1,0) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$.

Beweis von Satz 3.4.13. Wir betrachten den Fall, dass f streng monoton wachsend ist. Dann gilt offensichtlich $f(a) = \inf(W(f))$, $f(b) = \sup(W(f))$ und $W(f) = [f(a), f(b)]$. Es sei $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$ die Umkehrfunktion. Da f streng

monoton wachsend ist, folgt aus $y_1 \geq y_2$ ($= \neg(y_1 < y_2)$), dass $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ ($= \neg(f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2))$). Da f^{-1} auch injektiv ist, ist f^{-1} streng monoton wachsend.

Es seien $\beta \in [f(a), f(b)]$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[f(a), f(b)]$, die gegen β konvergiert. Weiter seien $\alpha := f^{-1}(\beta)$ und $\alpha_n := f^{-1}(\beta_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere nicht gegen α. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und unendliche viele $l \in \mathbb{N}$, so dass $|\alpha_l - \alpha| > \varepsilon$. Wir definieren die Auswahlfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $n_0 := 0$ und

$$n_{k+1} := \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid |\alpha_n - \alpha| > \varepsilon \wedge n > n_k \,\}, \quad k \geq 0.$$

Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß (Satz 2.3.9) gibt es eine Auswahlfolge $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$, so dass die Folge $(\alpha_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Es sei α' der Grenzwert. Es gilt (s. Aufgabe 6.6.1)

$$|\alpha' - \alpha| = \lim_{l\to\infty} |\alpha_{n_{k_l}} - \alpha| \geq \varepsilon,$$

so dass $\alpha' \neq \alpha$. Es folgt $f(\alpha') \neq f(\alpha) = \beta$. Auf der anderen Seite gilt wegen der Stetigkeit von f, dass

$$f(\alpha') = \lim_{l\to\infty} f(\alpha_{n_{k_l}}) = \lim_{l\to\infty} \beta_{n_{k_l}}.$$

Damit ist $f(\alpha')$ Häufungspunkt der Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Folge ist aber konvergent, so dass ihr einziger Häufungspunkt der Grenzwert $\beta = f(\alpha)$ ist und sich der Widerspruch $f(\alpha') = f(\alpha)$ ergibt. □

3.6 Ganz- und gebrochen rationale Funktionen

Wir besprechen den Beginn einer Kurvendiskussion für einfache Klassen von Funktionen.

Ganzrationale Funktionen

3.6.1 Definition. i) Ein *Polynom* ist ein Ausdruck der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

mit $a_n \neq 0$ oder $n = 0$ und $a_0 = 0$. Dabei sind die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ reelle Zahlen, und x ist eine Unbestimmte.

Sind alle Koeffizienten von p Null, so sprechen wir von dem *Nullpolynom*. Ansonsten heißt n der *Grad von* p. Dem Nullpolynom wird der Grad $-\infty$ zugeordnet.

Schreibweise: $\mathrm{Grad}(p) = n$.

ii) Es seien p ein Polynom und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$p(\alpha) := a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 \in \mathbb{R}.$$

Auf diese Weise definiert p eine *ganzrationale Funktion* oder auch *Polynomfunktion*

$$\begin{array}{rcl} p\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & p(\alpha). \end{array}$$

3.6.2 Bemerkung. i) Streng genommen ist ein Polynom von der dadurch definierten ganzrationalen Funktion zu unterscheiden. Die durch ein Polynom p definierte Funktion bestimmt das Polynom p aber eindeutig (s. Folgerung 3.6.4), so dass diese Unterscheidung für uns unwesentlich sein wird. Für Polynome (im abstrakten Sinne) kann man die Operationen a) „Multiplikation mit einer reellen Zahl", b) „Addition" und c) „Multiplikation" einführen, indem man a) jeden Koeffizienten mit der entsprechenden Zahl multipliziert, b) koeffizientenweise addiert und c) $(a_m x^m)\cdot(b_n x^n) = (a_m b_n)x^{m+n}$ setzt und ansonsten das Distributivgesetz anwendet. Z.B.

$$(x^5 + 4x^2 + 3x) + (2x^7 - 5x^4 + 3x^2 + x - 1) = 2x^7 + x^5 - 5x^4 + 7x^2 + 4x - 1;$$

$$(x^2 + 3x + 2)\cdot(2x + 1) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2.$$

Diese Operationen entsprechen dann den jeweiligen Operationen für Funktionen.

ii) Nach den Eigenschaften für stetige Funktionen und den Beispielen ist jede ganzrationale Funktion (auf ganz $\mathbb{R}$) stetig.

Eigenschaften des Grades. i) *Für $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ und ein Polynom p Polynom gilt* $\mathrm{Grad}(\lambda \cdot p) = \mathrm{Grad}(p)$.

ii) *Für Polynome p und q hat man* $\mathrm{Grad}(p+q) \leq \max\{\mathrm{Grad}(p), \mathrm{Grad}(q)\}$.

iii) *Es seien p und q Polynome. Dann gilt* $\mathrm{Grad}(p \cdot q) = \mathrm{Grad}(p) + \mathrm{Grad}(q)$.

3.6.3 Satz (Division mit Rest)**.** *Es seien p und $q \neq 0$ Polynome. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome t und r mit*

$$\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(q)$$

und

$$p = t \cdot q + r.$$

Zum Beweis. Wir erinnern mit folgendem Beispiel an das Verfahren. Es seien

$$p = 2x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 8x - 5$$

und

$$q = x^2 - 3x + 5.$$

$$(2x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 8x - 5) : (x^2 - 3x + 5) = 2x^3 + x^2 + (-3) \quad \text{Rest } (-x + 10)$$

$$\underline{-(2x^5 - 6x^4 + 10x^3)}$$

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2$$

$$\underline{-(x^4 - 3x^3 + 5x^2)}$$

$$-3x^2 + 8x - 5$$

$$\underline{-(-3x^2 + 9x - 15)}$$

$$-x + 10$$

Übertrag

Also $p = (2x^3 + x^2 - 3)\cdot q + (-x + 10)$. □

3.6.4 Folgerung (Abspaltung von Linearfaktoren)**.** i) *Es seien p ein Polynom vom Grad mindestens eins und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p, d.h. $p(\alpha) = 0$.*

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom q vom Grad $\mathrm{Grad}(p) - 1$*, so dass*

$$p = (x - \alpha) \cdot q.$$

ii) *Ein reelles Polynom $p \neq 0$ vom Grad n besitzt höchstens n mit Vielfachheiten gezählte Nullstellen. Genauer gesagt existieren eindeutig bestimmte, paarweise verschiedene reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, positive ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ und ein Polynom q ohne Nullstellen, so dass*

$$p = (x - \alpha_1)^{a_1} \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_r)^{a_r} \cdot q.$$

(Es gilt dann $a_1 + \cdots + a_r + \mathrm{Grad}(q) = n$.)

iii) *Zwei Polynome p und q vom Grad höchstens n sind genau dann gleich, wenn es $n+1$ paarweise verschiedene reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ gibt mit*

$$p(\alpha_j) = q(\alpha_j), \qquad j = 1, \ldots, n+1.$$

3.6.5 Bemerkung. i) Für die Bestimmung von Nullstellen eines Polynoms p geht man in der Praxis (im Wesentlichen beim Lösen der Übungsaufgaben) wie folgt vor:

- Man bestimme eine Nullstelle α von p (z.B. durch Raten, Ausprobieren).
- Man spalte $(x - \alpha)$ ab, i.e. $p = (x - \alpha) \cdot q_1$.
- Man bestimme eine Nullstelle β von q_1, $q_1 = (x - \beta) \cdot q_2$ usw.
- Schliesslich sieht man, dass q_j keine Nullstelle oder Grad ≤ 2 hat. In diesem Fall kann man die Nullstellen mit der Lösungsformel aus Beispiel 3.3.3 ii) ermitteln.

ii) Für Polynome vom Grad 3 und Grad 4 existieren Lösungsformeln – ähnlich denen für Grad 2 –, vermöge derer man die Nullstellen eines Polynoms durch iteriertes Ziehen von Wurzeln ermitteln kann. Man kann weiter zeigen, dass es für Polynome vom Grad ≥ 5 keine solchen Formeln geben kann. Dennoch gibt es Formeln, die kompliziertere Funktionen als Wurzeln beinhalten. Solche Lösungsformeln sind in Computer-Algebra-Programmen (z.B. `Maple`, `Mathematica`) implementiert.

3.6.6 Beispiel. Es sei $p = x^3 + (7/3)x^2 - (4/3)$. Als erste Nullstelle findet man z.B. $\alpha = -1$. Dann erhält man $p = (x+1) \cdot (x^2 + (4/3)x - (4/3))$. Das Polynom $x^2 + (4/3)x - (4/3)$ hat nach der Lösungsformel aus Beispiel 3.3.3 ii) die Nullstellen -2 und $2/3$. Also

$$p = \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2).$$

Verhalten im Unendlichen

Es sei $p = a_n \cdot x^n +$ Terme niedrigerer Ordnung *ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Es gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} p(x) &= \mathrm{sign}(a_n) \cdot \infty \\ \lim_{x \to -\infty} p(x) &= (-1)^n \cdot \mathrm{sign}(a_n) \cdot \infty. \end{aligned}$$

M.a.W., das Verhalten im Unendlichen wird lediglich von dem Term $a_n x^n$ bestimmt.

Gebrochen rationale Funktionen

3.6.7 Definition. Es seien p und $q \neq 0$ zwei Polynome. Diese definieren die (*gebrochen*) *rationale Funktion*

$$\begin{aligned} \frac{p}{q}\colon \mathbb{R} \setminus \{ x \mid q(x) = 0 \} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}. \end{aligned}$$

Wir nennen p das *Zählerpolynom* und q das *Nennerpolynom*.

3.6.8 Bemerkung. Es ist wiederum klar, dass eine rationale Funktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

Im Folgenden besprechen wir die ersten wichtigen Schritte zur Kurvendiskussion rationaler Funktionen. Dazu seien p und q Polynome, und q sei nicht das Nullpolynom.

Verhalten an den Unbestimmtheitsstellen

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von q. Dann ist die Funktion $f := p/q$ an der Stelle α nicht definiert. Wir können jedoch $\lim_{x\to\alpha\pm 0} f(x)$ studieren. Dazu schreiben wir $p = (x-\alpha)^a \cdot r$ mit $a \geq 0$ und $r(\alpha) \neq 0$ und $q = (x-\alpha)^b \cdot s$ mit $b > 0$ und $s(\alpha) \neq 0$.

Fall i): *$b > a$. In diesem Fall gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\alpha-0} f(x) &= (-1)^{b-a} \cdot \operatorname{sign}\left(\frac{r(\alpha)}{s(\alpha)}\right) \cdot \infty \\ \lim_{x\to\alpha+0} f(x) &= \operatorname{sign}\left(\frac{r(\alpha)}{s(\alpha)}\right) \cdot \infty. \end{aligned}$$

Die Funktion f hat in α also eine Polstelle.

Fall ii): *$b \leq a$. In diesem Fall gilt*

$$\lim_{x\to\alpha-0} f(x) = \lim_{x\to\alpha+0} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } b < a \\ \frac{r(\alpha)}{s(\alpha)}, & \text{falls } b = a \end{cases}.$$

Die Funktion f kann stetig nach α fortgesetzt werden, und die Forsetzung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \{\alpha\} \cup \mathbb{R} \setminus \{ x \mid q(x) = 0 \} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{(x-\alpha)^{a-b} \cdot r(x)}{s(x)}. \end{aligned}$$

Man nennt α in diesem Fall eine hebbare Definitionslücke.

Nullstellen

Auf Grund der vorhergehenden Diskussion nehmen wir an, dass jede Nullstelle des Nennerpolynoms q zu einer Polstelle der Funktion f führt. Dann sind die Nullstellen der Funktion f gerade die Nullstellen des Zählerpolynoms p.

Verhalten im Unendlichen

Es seien

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + \text{Terme niedrigerer Ordnung} \quad \textit{mit } a_n \neq 0 \\ q(x) &= b_m x^m + \text{Terme niedrigerer Ordnung} \quad \textit{mit } b_m \neq 0 \end{aligned}$$

und $f := p/q$.

- *Für* $m > n$ *gilt*
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$
- *Für* $m < n$ *gilt*
$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \operatorname{sign}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= (-1)^{(n-m)}\cdot\operatorname{sign}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot\infty. \end{aligned}$$
- *Für* $m = n$ *gilt*
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

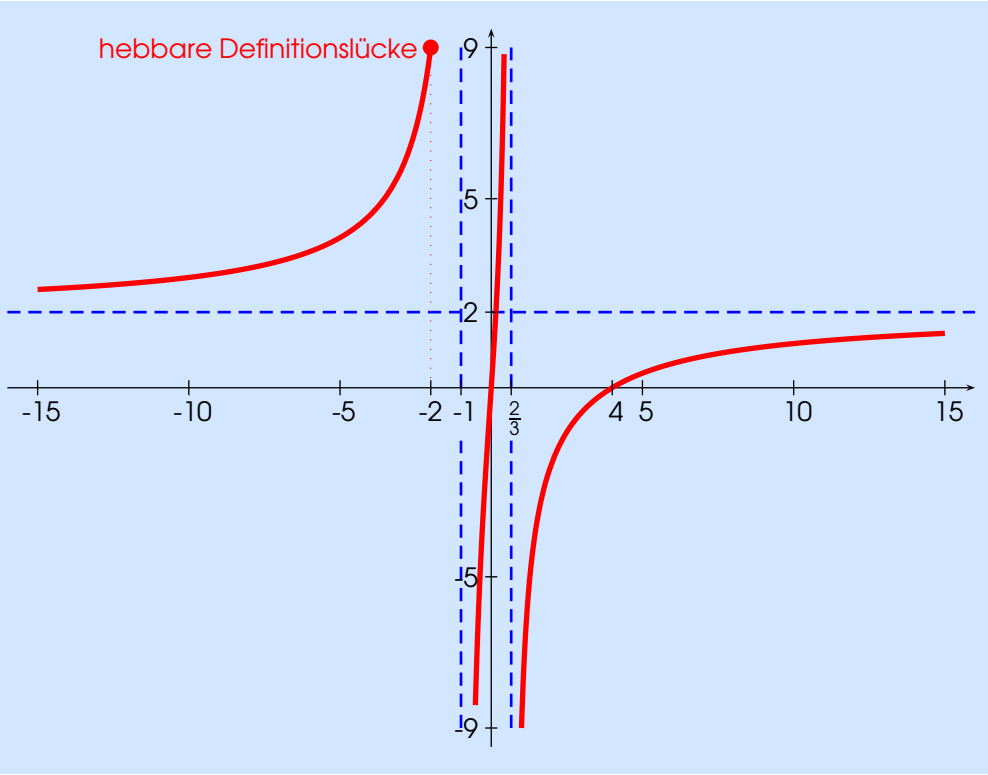


Abbildung 3.1: Zu Beispiel 3.6.9

3.6.9 Beispiel. Es seien $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 16x$ und

$$q(x) = x^3 + \frac{7}{3}\cdot x^2 - \frac{4}{3} = \left(x - \frac{2}{3}\right)\cdot(x+1)\cdot(x+2).$$

Es ist $p(x) = 2x(x^2 - 2x - 8)$. Das Polynom $x^2 - 2x - 8$ hat die Nullstellen -2 und 4. Also $p(x) = 2x(x-4)(x+2)$. Die Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 2/3\}$ hat in -1 und $2/3$ Polstellen und in -2 eine hebbare Definitionslücke. Die Fortsetzung

$$\overline{f} = \frac{2 \cdot x \cdot (x-4)}{\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x+1)}$$

hat 0 und 4 als Nullstellen. Die Gerade $y = 2$ ist eine *waagerechte Asymptote* für die Funktion f im Unendlichen.

3.7 Funktionenfolgen

In diesem Abschnitt betrachten wir Folgen von Funktionen. Wir zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen der Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ist. Dies ist eine Konstruktionsmöglichkeit für stetige Funktionen, derer wir uns im folgenden Abschnitt über Potenzreihen bedienen werden.

3.7.1 Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Mit $\mathcal{F}(D)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$.

3.7.2 Bemerkung. i) Nach Axiom 1.2.9 können wir $\mathcal{F}(D)$ als Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(D \times \mathbb{R})$ definieren.

ii) Mit der in Definition 3.2.1 eingeführten Addition und Skalarmultiplikation wird $\mathcal{F}(D)$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum im Sinne der linearen Algebra. Falls D unendlich ist, so ist $\mathcal{F}(D)$ ein unendlich dimensionaler Vektorraum. Die in Definition 3.4.6, iii), vorgestellte Menge $\mathcal{C}(D)$ der stetigen Funktionen auf D ist ein Unterraum.

Wir haben bisher Folgen von reellen und rationalen Zahlen betrachtet. Allgemeiner können wir Folgen in jeder Menge M betrachten. Hier sind wir an folgender Situation interessiert:

3.7.3 Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine *Funktionenfolge auf D* ist eine Abbildung

$$h\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}(D).$$

Schreibweise: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := h(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Für jedes Element $x \in D$ bekommen wir die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen. Der Konvergenzbegriff für Folgen reeller Zahlen liefert einen ersten Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen.

3.7.4 Definition. Es seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge auf D und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise gegen f*, wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Die Funktion f heißt die *Grenzfunktion* der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.7.5 Bemerkung. Aus Satz 2.2.2 folgt direkt, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ höchstens eine Grenzfunktion hat.

Punktweise Konvergenz ist für viele Belange der Differential- und Integralrechnung zu schwach.

3.7.6 Beispiel. Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ mit

$$\begin{array}{rccc} f_n\colon [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array}$$

Nach Folgerung 2.2.14 gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0, \quad \text{für } 0 \le x < 1.$$

Offenbar hat man

$$\lim_{n\to\infty} f(1) = 1.$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert daher punktweise gegen die Grenzfunktion

$$\begin{array}{rccc} f\colon [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases} \end{array}.$$

Man beachte, dass jede der Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, stetig ist, die Grenzfunktion f aber nicht.

Stetigkeit bleibt unter punktweiser Konvergenz i.A. nicht erhalten.

3.7.7 Definition. Es seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge auf D und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\forall n \ge N \forall x \in D: \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Schreibweise: $f_n \rightrightarrows f$.

3.7.8 Bemerkung. Es ist unmittelbar klar, dass gleichmäßige Konvergenz punktweise Konvergenz impliziert. Bei punktweiser Konvergenz fordert man, dass man zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem Punkt $x \in D$ ein $N(x) \in \mathbb{N}$ finden kann, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \ge N(x)$. Die gleichmäßige Konvergenz fordert dagegen, dass man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ wählen kann, das **nicht** von $x \in D$ abhängt, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ und $n \ge N$. Der Leser mag sich zur Übung vergewissern, dass die Folge in Beispiel 3.7.6 nicht gleichmäßig konvergiert.

3.7.9 Satz. *Es seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge auf D und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion f_n stetig.*

Wenn die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig.

Beweis. Wir benutzen die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit aus Satz 3.4.8. Zu jedem $x \in D$ und jedem $\varepsilon > 0$ haben wir die Existenz von $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$\forall y \in D: \quad |y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

nachzuweisen.

Wir wählen zunächt $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq N \forall y \in D: \ |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wegen der Stetigkeit von f_N existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall y \in D: \quad |y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_N(y) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $y \in D$ mit $|y - x| < \delta$ finden wir weiter

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

3.8 Potenzreihen

Die Polynomfunktionen bilden eine große Klasse von interessanten stetigen Funktionen mit guten Eigenschaften. Potenzreihen sind Folgen von Polynomfunktionen. Dort, wo Konvergenz vorliegt, vererben die Polynomfunktionen ihre guten Eigenschaften auf die Grenzfunktion. Mit Potenzreihen können wir elegante Definitionen für so zentrale Funktionen wie die Exponentialfunktion, den Sinus und den Kosinus geben.

3.8.1 Definition. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die zugehörige *Potenzreihe mit Entwicklungspunkt* x_0 ist die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Polynomfunktionen

$$\begin{aligned} p_n\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Schreibweise: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$.

3.8.2 Lemma. *Zwei Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (x - x_0)^k$ sind genau dann gleich, wenn $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis. Es seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörigen Folgen von Polynomfunktionen. Die Gleichheit der Potenzreihen ist die Gleichheit dieser Folgen. Diese bedeutet, dass $p_n = q_n$ als Funktion auf $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $p_n - q_n$ wird durch das Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) \cdot (x - x_0)^k$$

vom Grad $\leq n$ gegeben. Wenn es sich bei diesem Polynom nicht um das Nullpolynom handelt, so besitzt es nach Folgerung 3.6.4 iii) höchstens n Nullstellen. Es gilt folglich genau dann $p_n = q_n$, wenn $a_k = b_k$, $k = 0, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. □

Wir wollen mit Potenzreihen reelle Funktionen definieren. Dazu müssen wir uns zunächst um den möglichen Definitionsbereich kümmern.

Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ definieren wir

$$K := \left\{ \xi \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\xi - x_0)^k \text{ konvergiert} \right\}. \tag{3.1}$$

3.8.3 Bemerkung. Offenbar gilt immer $x_0 \in K$.

Wir möchten die Struktur der Menge K untersuchen. Das Schlüsselresultat lautet:

3.8.4 Satz. *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe , $\xi_0 \in K$ (s. (3.1)) und $r_0 := |\xi_0 - x_0|$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\xi - x_0)^k$$

für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi - x_0| < r_0$ ***absolut****.*

Beweis. Wir nehmen $x_0 = 0$ an. Ferner fordern wir $\xi_0 \neq 0$, da sonst nichts zu zeigen ist. Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \xi_0^k$ konvergiert, dann muss $(a_n \cdot \xi_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Folgerung 2.7.2 eine Nullfolge und damit insbesondere beschränkt sein (Satz 2.2.8). Es existiert also eine reelle Zahl $M > 0$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \cdot |\xi_0|^n < M.$$

Wir schreiben dies um zu

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| < \frac{M}{|\xi_0|^n}. \tag{3.2}$$

Sei $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| < r_0 = |\xi_0|$. Wir setzen

$$q := \frac{|\xi|}{|\xi_0|} < 1.$$

Wir schätzen somit

$$|a_n \cdot \xi^n| = |a_n| \cdot |\xi|^n \overset{(3.2)}{\leq} M \cdot \frac{|\xi|^n}{|\xi_0|^n} = M \cdot q^n$$

ab. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} M \cdot q^n$ konvergiert, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \xi^k$ nach dem Majorantenkriterium 2.10.1 absolut konvergiert. □

Aus dem Beweis leitet man die folgende wichtige Aussage ab:

3.8.5 Folgerung. *In der Situation von Satz 3.8.4 sei $0 \leq r < r_0$. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ gleichmäßig.*

3.8.6 Definition. Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe und K wie in (3.1) definiert. Der *Konvergenzradius* $\rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ wird definiert als

$$\rho := \begin{cases} \sup\{\, |\xi - x_0| \mid \xi \in K \,\}, & \text{falls } K \text{ beschränkt ist} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Aus Satz 3.8.4 ergibt sich nun unmittelbar:

3.8.7 Folgerung. *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe, ρ ihr Konvergenzradius und $\xi \in \mathbb{R}$.*

i) *Gilt $|\xi - x_0| < \rho$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\xi - x_0)^k$ absolut.*

ii) *Aus $|\xi - x_0| > \rho$ folgt, dass sie Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\xi - x_0)^k$ divergiert.*

In Beispiel 3.8.9 werden wir sehen, dass wir für die Werte ξ mit $|\xi - x_0| = \rho$ keine allgemeingültige Aussage treffen können. Zuvor notieren wir das zentrale Resultat dieses Abschnitts, das sich aus Satz 3.7.9 und Folgerung 3.8.5 ergibt:

3.8.8 Satz. *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\xi - x_0)^k$ eine Potenzreihe mir Konvergenzradius ρ. Dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned} (x_0 - \rho, x_0 + \rho) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (\xi - x_0)^k \end{aligned}$$

stetig.

3.8.9 Beispiel. i) Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. (Hier gilt also $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, und $x_0 = 0$.) Wir wissen, dass die Reihe für x mit $|x| < 1$ konvergiert und für $x = \pm 1$ divergiert. Damit ist der Konvergenzradius $\rho = 1$. In den beiden Randpunkten des „Konvergenzintervalls" $(-1, 1)$ divergiert die Reihe.

Die zugehörige Funktion ist

$$\begin{aligned} (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung verdeutlicht besonders gut die Divergenz für $x = 1$.

ii) Wir untersuchen die Potenzreihe mit $a_n = 1/n$, $n \geq 1$, und $x_0 = 0$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot x^k.$$

Für $x = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe, die divergiert. Damit gilt für den Konvergenzradius $\rho \leq 1$.

Für $x = -1$ ist dies die alternierende harmonische Reihe, die konvergiert. Es folgt $\rho \geq 1$.

Zusammengenommen haben wir $\rho = 1$, und die Reihe konvergiert in genau einem der beiden Randpunkte des Konvergenzintervalls $(-1, 1)$.

Betrachtet man die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot x^k,$$

so hat diese ebenfalls den Konvergenzradius 1, divergiert für $x = -1$ und konvergiert für $x = 1$.

iii) Für $a_n := 1/n^2$, $n \geq 1$, und $x_0 = 0$ erhalten wir die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot x^k.$$

Sie konvergiert für $x = \pm 1$ absolut. Der Konvergenzradius ρ ist also mindestens 1.

Sei $x > 1$. Wir untersuchen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$ mit dem Quotientenkriterium:

$$\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|} = x \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2, \quad n \geq 1.$$

Da $(n/n+1)_{n\geq 1}$ gegen 1 konvergiert und $x > 1$ gilt, finden wir einen Index n_0 mit

$$x \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geq 1, \quad n \geq n_0.$$

Die Reihe kann deshalb nicht konvergieren (s. Aufgabe 6.11.2).

iv) Die Daten $a_n := n^n$, $n \in \mathbb{N}$, und $x_0 = 0$ führen zu der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot x)^k.$$

Für $x > 0$ und $n \geq 1$ gilt

$$\sqrt[n]{(n \cdot x)^n} = n \cdot x.$$

Für $n > 1/x$ ist dieser Ausdruck größer als 1. Dies macht die Konvergenz der Reihe unmöglich (s. Aufgabe 6.11.2).

Die untersuchte Reihe hat folglich den Konvergenzradius $\rho = 0$.

Die Exponentialfunktion

Aus Beispiel 2.10.4 und Folgerung 3.8.8 leiten wir die folgende Aussage ab:

3.8.10 Satz. *Der Konvergenzradius der Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist $\rho = \infty$, und die Funktion

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

ist stetig.

3.8.11 Definition. Die Funktion exp aus Satz 3.8.10 heißt *Exponentialfunktion.*

3.8.12 Satz (Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis. Die Funktionswerte $\exp(x)$ und $\exp(y)$ sind durch die beiden absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ und $\sum_{k=0}^{\infty} y^k/k!$ gegeben. Nach Satz 2.11.2 lässt sich der Wert $\exp(x) \cdot \exp(y)$ durch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ berechen. Dabei gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit den Binomialkoeffizienten (1.7.15)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad 0 \le k \le n,\ n \in \mathbb{N},$$

schreiben wir

$$c_n = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Unter Berücksichtigung des binomischen Lehrsatzes 1.7.19 erhalten wir endlich

$$c_n = \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit sehen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y),$$

so dass die Behauptung folgt. □

3.8.13 Folgerung (Eigenschaften der Exponentialfunktion)**.** i) *Für jede reelle Zahl x gilt* $\exp(x) > 0$.
ii) *Genauer hat man $W(\exp) = \mathbb{R}_{>0}$.*
iii) *Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.*

Beweis. i) Für $x \ge 0$ haben wir $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! \ge 1$. Ferner gilt $\exp(0) = 1$.
Für eine reelle Zahl x zeigt die Funktionalgleichung

$$\exp(-x) \cdot \exp(x) = \exp(-x+x) = \exp(0) = 1,$$

so dass

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \tag{3.3}$$

folgt. Insbesondere erkennen wir, dass $\exp(-x) \in (0,1]$ für $x \ge 0$ gilt.
ii) Nach Teil i) haben wir $\mathbb{R}_{>0} \subset W(\exp)$ zu zeigen. Wir wissen bereits $1 \in W(\exp)$. Weiter gilt (s. Beispiel 2.2.9 und Aufgabe 6.6.1 und 6.7.2)

$$\exp(1) = e > 2,$$

so dass

$$\exp(n) = e^n > 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty.$$

Der Zwischenwertsatz 3.5.2 liefert daher $[1,\infty) \subset W(\exp)$. Gleichung (3.3) zeigt, dass auch $(0,1] \subset W(\exp)$, so dass in der Tat $\mathbb{R}_{>0} = (0,1] \cup [1,\infty) \subset W(\exp)$ folgt.

iii) Es seien $x < y$ zwei reelle Zahlen und $h := y - x > 0$. Wir berechnen mit der Funktionalgleichung

$$\exp(y) = \exp(x+h) = \exp(x) \cdot \exp(h).$$

Da $h > 0$ gilt, haben wir auch

$$\exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \geq 1 + h > 1.$$

Die vorletzte Gleichung zeigt daher wie gewünscht $\exp(x) < \exp(y)$. □

Die Exponentialfunktion ist injektiv und besitzt somit eine Umkehrfunktion.

3.8.14 Definition. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion wird in der Form

$$\begin{array}{rcl} \log\colon \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log(x) \end{array}$$

geschrieben und (*natürlicher*) *Logarithmus* genannt.

Aus Folgerung 3.8.13 leiten wir zusammen mit Satz 3.4.13 ab:

3.8.15 Folgerung (Eigenschaften des Logarithmus)**.** i) *Der Logarithmus ist stetig und streng monoton wachsend.*

ii) $W(\log) = \mathbb{R}$.

iii) *Für zwei positive reelle Zahlen* x, y *gilt* $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$.

Nun können wir beliebige Potenzfunktionen erklären:

3.8.16 Definition. Es sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl. Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} \exp_a\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x := \exp\big(x \cdot \log(a)\big). \end{array}$$

3.8.17 Bemerkung. Die obige Festlegung ist mit den vorigen Definitionen von Potenzen verträglich. So gilt

- $a^0 = \exp(0 \cdot \log(a)) = \exp(0) = 1$,
- $a^{n+1} = \exp((n+1) \cdot \log(a)) = \exp(n \cdot \log(a) + \log(a)) = \exp(n \cdot \log(a)) \cdot \exp(\log(a)) = a^n \cdot a$, $n \in \mathbb{N}$. Man vergleiche dies mit Definition 1.7.17.

Sinus und Kosinus

Der Formalismus der Potenzreihen gestattet auch eine elegante Definition der trigonometrischen Funktionen. Zunächst liefern die Konvergenz der Exponentialreihe und das Majorantenkriterium 2.10.1 folgendes Resultat:

3.8.18 Satz. *Der Konvergenzradius der Reihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

ist jeweils ∞.

3.8.19 Definition. i) Der *Sinus* ist die Funktion

$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

heißt *Kosinus*.

Aus dieser Definition liest man sofort ab, dass Sinus und Kosinus stetige Funktionen sind, dass Sinus eine ungerade Funktion und Kosinus eine gerade Funktion ist.

Die Periodizität ist nicht so offensichtlich. Sie ergibt sich aus den berühmten Additionstheoremen (s. Satz 4.8.8). In unserer Sprache sind dies Identitäten zwischen den Koeffizienten gewisser Potenzreihen und sollten sich als solche direkt beweisen lassen. Die Beweise werden jedoch mit Hilfe der Differentialrechnung wesentlich einfacher. Wir verschieben die Diskussion daher auf Abschnitt 4.8.

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Differenzierbarkeit

Gegeben seien eine reelle Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

und ein Punkt a im Definitionsbereich von f. Die Ableitung $f'(a)$ von f an der Stelle a soll eine Größe sein, die das „lokale Wachstum" von f an der Stelle a beschreibt.

Man denke z.B. an einen Punkt, der sich entlang der reellen Zahlengeraden bewegt. Für $t \geq 0$ bezeichne $s(t)$ die Position dieses Punkts zum Zeitpunkt t. Dies definiert eine Funktion $s\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Ableitung $s'(t)$ von s zum Zeitpunkt t ist die *Momentangeschwindigkeit* des Punkts zum Zeitpunkt t.

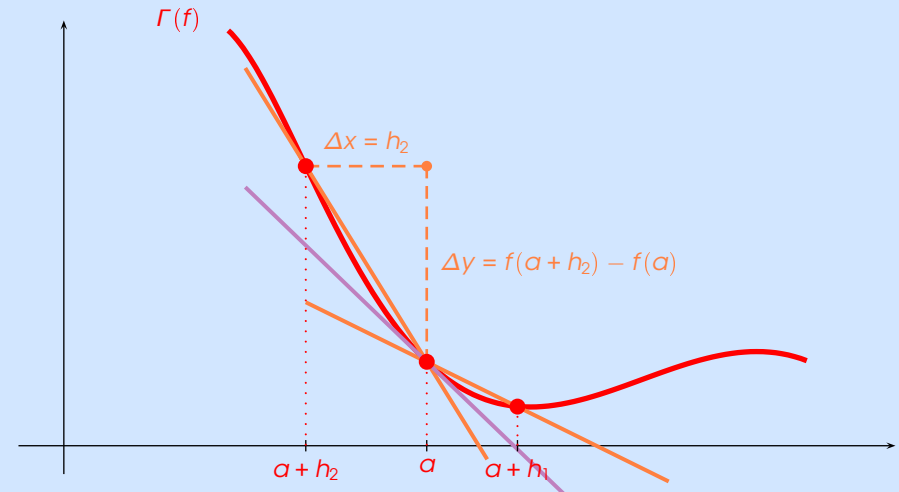
Betrachten wir den Graphen $\Gamma(f)$, so gibt die Ableitung an der Stelle a die Steigung der Tangente an den Graphen $\Gamma(f)$ im Punkt $(a, f(a))$ an. Um die Tangente etwas präziser zu erklären, betrachten wir für jede reelle Zahl h mit $a + h \in D$ die *Sekante* von $\Gamma(f)$ durch $(a, f(a))$ und $(a + h, f(a + h))$, i.e. die Gerade, die besagte Punkte miteinander verbindet. Lassen wir h gegen Null streben, dann nähern sich die Sekanten an die Tangente an. Aber Vorsicht! Diese letzte Aussage stimmt nur unter gewissen Umständen. Man betrachte z.B. den Absolutbetrag im Nullpunkt. Jede Sekante durch den Nullpunkt ist entweder die Gerade $x \longmapsto -x$ oder die Gerade $x \longmapsto x$. Die Sekanten nähern sich also keiner eindeutig bestimmten Geraden an.

Es sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^{1/3}$, die Umkehrfunktion der Funktion $x \longmapsto x^3$. Untersuchen wir hier die Sekanten durch den Ursprung, dann sehen wir, dass sich diese an die y-Achse annähern. Die Tangente an $\Gamma(f)$ im Ursprung hat also unendliche Steigung! Diesen Fall wollen wir auch ausschließen (vgl. Aufgabe 6.13.1).

Mit diesen Vorbetrachtungen können wir die geometrische Bedingung, dass $\Gamma(f)$ in $(a, f(a))$ eine wohldefinierte Tangente mit endlicher Steigung hat, präzise formulieren. Die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(a + h, f(a + h))$ hat die Steigung

$$\Delta_{f,a}(h) := \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Zum Begriff der Tangente.



Tangente an $\Gamma(f)$ in $(a, f(a))$

Sekanten von $\Gamma(f)$

4.1.1 Definition. Gegeben seien eine reelle Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

und $a \in D$.

i) Der *Differenzenquotient von f in a* ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{f,a}\colon \{\, h \in \mathbb{R}^* \mid a+h \in D \,\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & \Delta_{f,a}(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}. \end{array}$$

ii) Die Funktion f heißt *differenzierbar in a*, wenn

- f in einer Umgebung von a definiert ist, d.h. es ein $\varepsilon > 0$ mit $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset D$ gibt, und
- $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_{f,a}(h)$ in $\mathbb{R}$ existiert.

In diesem Fall setzen wir

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \Delta_{f,a}(h)$$

und nennen diesen Wert die *Ableitung von f an der Stelle a*.

iii) Die Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist.

iv) Die *(erste) Ableitung von f* ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f'\colon \{\, a \in D \mid f \text{ in } a \text{ differenzierbar} \,\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

v) Höhere Differenzierbarkeit und Ableitungen werden induktiv definiert. Wir nehmen also an, die Begriffe *n-mal differenzierbar* und *n-te Ableitung* $f^{(n)}$ (lies: „f n-Strich") seien bereits eingeführt. (Für $n = 1$ ist dies Definition ii) und iv).)

Wir sagen, dass f *an der Stelle* a $(n+1)$*-mal differenzierbar* ist, wenn

- f in a n-mal differenzierbar ist und
- $f^{(n)}$ in a differenzierbar ist.

Wir setzen

$$f^{(n+1)}(a) := \left(f^{(n)}\right)'(a)$$

und definieren die $(n+1)$*-ste Ableitung von* f als die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f^{(n+1)} : \left\{ a \in D \,|\, f \text{ in } a \ (n+1)\text{-mal differenzierbar} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f^{(n+1)}(x). \end{array}$$

v) Wir nennen f *in* a *links-* bzw. *rechtsseitig differenzierbar*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit $(a-\varepsilon, a] \subset D$ bzw. $[a, a+\varepsilon) \subset D$ gibt und der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert von $\Delta_{f,a}(h)$ in a existiert.

Schreibweise:

$$\begin{array}{rcl} f'_-(a) & := & \lim\limits_{h \to 0-0} \Delta_{f,a}(h) \\ \text{bzw.} \quad f'_+(a) & := & \lim\limits_{h \to 0+0} \Delta_{f,a}(h). \end{array}$$

vi) Sei $n > 0$. Die Funktion f ist *n-mal stetig differenzierbar in* a, wenn f in einer Umgebung von a n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}$ in a stetig ist. Ist f in jedem Punkt des Definitionsbereichs n-mal stetig differenzierbar, dann ist f *n-mal stetig differenzierbar*.

4.1.2 Bemerkung. Wenn f an der Stelle a differenzierbar ist, dann ist die Gleichung der Tangente an $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$ im Punkt $(a, f(a))$ gegeben durch

$$L(x) = f'(a) \cdot \big(x - a\big) + f(a).$$

Es gilt dann

$$f(x) = L(x) + \varphi(x).$$

Dabei hat man $\lim_{x \to a} \varphi(x)/(x-a) = 0$. M.a.W., $f(x)$ ist in der Nähe von a durch die lineare Funktion $L(x)$ approximierbar.

Sind nun umgekehrt eine lineare Funktion $L(x) = c \cdot (x - a) + f(a)$ und eine Funktion $\varphi(x)$ mit $\lim_{x \to a} \varphi(x)/(x-a) = 0$ gegeben,[1] so dass

$$f(x) = L(x) + \varphi(x),$$

dann überprüft man, dass f in a differenzierbar ist mit $f'(a) = c$.

4.1.3 Lemma. *Die Funktion f sei in a differenzierbar. Dann ist sie in a auch stetig.*

Beweis. Wir schreiben $f(x) = L(x) + \varphi(x)$ wie in der letzten Bemerkung. Man beachte, dass $\lim_{x \to a} \varphi(x)/(x-a) = 0$ insbesondere $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$ impliziert. Damit gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} L(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x) = f(a) + 0$$

[1] Man beachte hier, dass $x \longmapsto \varphi(x)/(x-a)$ nur auf $D \setminus \{a\}$ definiert ist.

für den Grenzwert. □

4.1.4 Beispiel. i) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto a$, die zugehörige konstante Funktion. Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = 0$. (Folgerung 4.3.7 ist die Umkehrung dieser Aussage.) In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $h \in \mathbb{R}^\star$

$$\Delta_{f,x}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a-a}{h} = 0.$$

Die Funktion f ist sogar beliebig oft differenzierbar. Alle Ableitungen sind identisch null.

ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto ax + b$, mit $a \neq 0$ eine lineare Funktion. Dann ist f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $f'(x) = a$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $h \in \mathbb{R}^\star$ findet man

$$\Delta_{f,x}(h) = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Wegen i) ist f beliebig oft differenzierbar, und $f^{(n)} = 0$ für $n \geq 2$.

iii) Die Normalparabel $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, ist differenzierbar, und es gilt $f'(x) = 2x$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^\star$ hat man

$$\begin{aligned} \Delta_{f,x}(h) &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\lim_{h \to 0} \Delta_{f,x}(h) = 2x.$$

Die Funktion f ist wiederum beliebig oft differenzierbar. Es gilt $f'' = 2$, und die Ableitungen ab Ordnung 3 verschwinden identisch.

iv) Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$. Diese Funktion ist überall differenzierbar, und die Ableitungsfunktion ist $f'\colon \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -1/x^2$. Für $x, h \in \mathbb{R}^\star$ mit $x + h \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{f,x}(h) &= \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{x - (x+h)}{x \cdot (x+h)} \right) = -\frac{1}{x^2 + xh}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\lim_{h \to 0} \Delta_{f,x}(h) = -\frac{1}{x^2}.$$

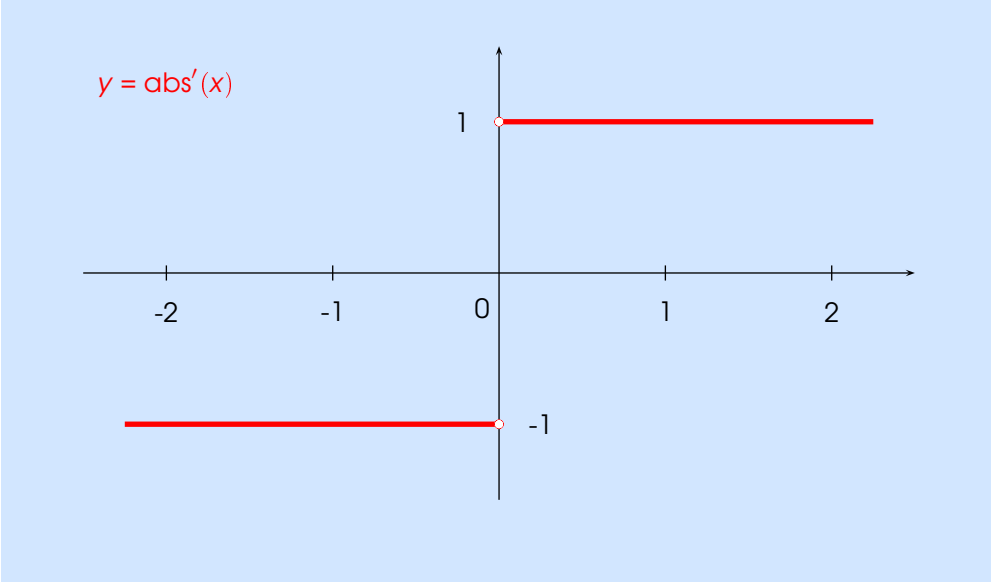
Die Quotientenregel (Satz 4.2.1 iv) wird zeigen, dass f beliebig oft differenzierbar ist und **alle** Ableitungen nicht trivial sind.

v) Es sei $\mathrm{abs}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$, der Absolutbetrag. Die Funktion abs ist in 0 links- und rechtsseitig differenzierbar mit

$$\mathrm{abs}'_-(0) = -1 \quad \text{und} \quad \mathrm{abs}'_+(0) = 1.$$

Da $\mathrm{abs}'_-(0) \neq \mathrm{abs}'_+(0)$, ist abs an der Stelle 0 nicht differenzierbar. In jedem anderen Punkt ist abs differenzierbar. Die erste Ableitung ist die Funktion

$$\begin{aligned} \mathrm{abs}'\colon \mathbb{R}^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$



Es folgt, dass abs in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^*$ beliebig oft differenzierbar ist, und für $n \geq 2$ gilt $\text{abs}^{(n)} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 0$.

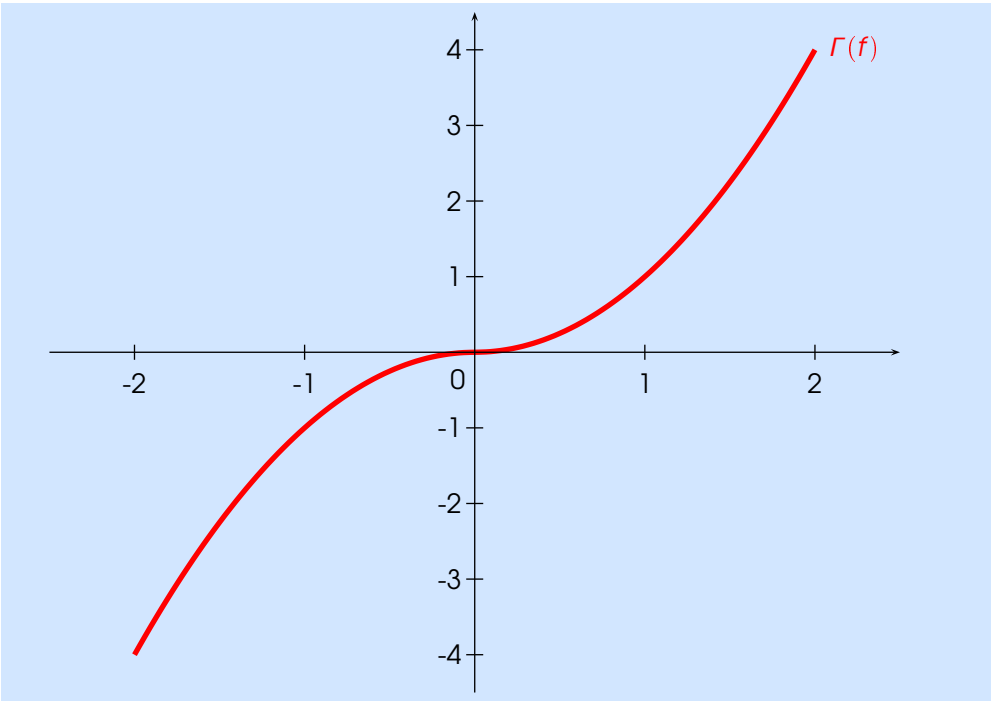
vi) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$. Für die Umkehrfunktion gilt

$$\lim_{h \to 0} \Delta_{f^{-1},0}(h) = +\infty.$$

Damit ist f^{-1} im Ursprung nicht differenzierbar.

vii) Wir definieren folgende Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{array}.$$



Wie in Beispiel vi) überprüft man, dass f überall differenzierbar ist und $f' = 2 \cdot \mathrm{abs}$ gilt. Damit ist f im Nullpunkt genau einmal differenzierbar und in jedem anderen Punkt beliebig oft differenzierbar.

4.2 Ableitungsregeln

Wie im Falle der Stetigkeit kann man Addition, Multiplikation und Verknüpfung von Funktionen dazu nutzen, aus bekannten differenzierbaren Funktionen neue differenzierbare Funktionen zu konstruieren.

4.2.1 Satz. *Im Folgenden seien $f\colon D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen, und $a \in D(f) \cap D(g)$ sei ein Punkt, in dem sowohl f als auch g differenzierbar sind. Dann gilt:*

i) *(Faktorregel) Für jede reelle Zahl λ ist $\lambda \cdot f$ in a differenzierbar, und es gilt*

$$(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot \big(f'(a)\big).$$

ii) *(Summenregel) Die Summe $f + g$ ist in a differenzierbar, und es gilt*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

iii) *(Produktregel) Das Produkt $f \cdot g$ ist in a differenzierbar mit*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

iv) *(Quotientenregel) Falls $g(a) \neq 0$, so ist der Quotient f/g in a differenzierbar, und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.$$

Beweis. In Teil i) - iii) sieht man leicht, dass $\lambda \cdot f$ bzw. $f + g$ bzw. $f \cdot g$ in einer Umgebung von x_0 definiert ist. Teil i) und Teil ii) folgen aus den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 2.2.16) und den offensichtlichen Tatsachen

$$\Delta_{\lambda \cdot f, a} = \lambda \cdot \Delta_{f,a} \quad \text{bzw.} \quad \Delta_{f+g,a} = \Delta_{f,a} + \Delta_{g,a}.$$

Teil iii). Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_{f\cdot g,a}(h) &= \frac{f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)\cdot g(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)\cdot g(a+h) + f(a)\cdot g(a+h) - f(a)\cdot g(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot g(a+h) + f(a)\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= \Delta_{f,a}(h)\cdot g(a+h) + f(a)\cdot\Delta_{g,a}(h).
\end{aligned}$$

Da g nach Lemma 4.1.3 in a stetig ist, liefern die Grenzwertsätze 2.2.16

$$\lim_{h\to 0}\Delta_{f\cdot g,a}(h) = \lim_{h\to 0}\Delta_{f,a}(h)\cdot\lim_{h\to 0} g(a+h) + f(a)\cdot\lim_{h\to 0}\Delta_{g,a}(h) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a),$$

und die Behauptung ist gezeigt.

Teil iv). Wir dürfen annehmen, dass f die konstante Funktion mit Funktionswert 1 ist. Der allgemeine Fall folgt dann mit Teil iii). Da g in a stetig ist und

$g(a) \neq 0$, gibt es wegen Folgerung 3.4.9 ein $\varepsilon > 0$, so dass $g(a+h) \neq 0$ für alle $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Daher ist $1/g$ in einer Umgebung von x_0 definiert. Für $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ haben wir

$$\begin{aligned} \Delta_{1/g,a}(h) &= \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\ &= \frac{g(a) - g(a+h)}{g(a+h) \cdot g(a) \cdot h} \\ &= \frac{1}{g(a+h)} \cdot \frac{1}{g(a)} \cdot (-1) \cdot \Delta_{g,a}(h), \end{aligned}$$

so dass

$$\lim_{h \to 0} \Delta_{1/g,a}(h) = -\frac{1}{g(a)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(a+h)} \cdot \lim_{h \to 0} \Delta_{g,a}(h) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Der Satz ist damit bewiesen. □

Das folgende Resultat wird in den Beispielen benutzt.

4.2.2 Folgerung. i) *Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$, auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit erster Ableitung*

$$\begin{aligned} f'\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto n \cdot x^{n-1}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Faktorregel ist f sogar beliebig oft differenzierbar. Für $m > n$ gilt $f^{(m)} = 0$.

ii) *Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^{-n} = 1/x^n$, mit $n > 0$. Diese Funktion ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^*$ differenzierbar mit*

$$f'(x) = (-n) \cdot x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Zusammen mit der Faktorregel schließen wir, dass f beliebig oft differenzierbar ist und dass alle höheren Ableitungen nicht trivial sind.

Beweis. i) Dies ist eine leichte Induktionsaufgabe. Es wird die Produktregel benutzt.

ii) Nach der Quotientenregel ist f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^*$ differenzierbar mit

$$f'(x) = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Dies ist die ersehnte Formel. □

4.2.3 Beispiel. i) Es sei

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 \end{aligned}$$

eine Polynomfunktion mit $a_n \neq 0$.

Mit Folgerung 4.2.2, der Faktorregel und der Summenregel folgert man, dass p überall differenzierbar ist und

$$\begin{aligned} p'\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \end{aligned}$$

gilt. Dies ist wiederum eine Polynomfunktion. Damit ist p beliebig oft differenzierbar. Die letzte Ableitung, die nicht identisch verschwindet, ist $f^{(n)} = n! \cdot a_n$.

ii) Gegeben seien zwei Polynome p und q, und $f = p/q$ sei die zugehörige rationale Funktion. Der Definitionsbereich von f ist nach Definition 3.2.1 iv)

$$D = \{\, a \in \mathbb{R} \mid q(a) \neq 0 \,\}.$$

Die Quotientenregel impliziert, dass f im gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist mit

$$f' = \frac{p' \cdot q - p \cdot q'}{q^2}.$$

Dies ist wiederum eine rationale Funktion mit demselben Definitionsbereich wie f. Man folgert, dass f beliebig oft differenzierbar ist.

4.2.4 Satz (Kettenregel)**.** *Es seien $f\colon D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen. Es gelte $f(D(f)) \subset D(g)$, f sei in a differenzierbar und g sei in $f(a)$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f\colon D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'\big(f(a)\big).$$

Beweis. Wir bilden die Hilfsfunktion

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{g}\colon D(g) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}, \text{falls } y \neq f(a) \\ g'\big(f(a)\big), \text{falls } y = f(a) \end{cases} \end{array}.$$

Da g in $f(a)$ differenzierbar ist, ist $\widetilde{g}$ eine stetige Funktion. Insbesondere haben wir

$$\lim_{y \to f(a)} \widetilde{g}(y) = g'\big(f(a)\big).$$

Nach Definition von $\widetilde{g}$ gilt auch

$$g(y) - g\big(f(a)\big) = \widetilde{g}(y) \cdot \big(y - f(a)\big), \quad y \in D(g) \setminus \{f(a)\}.$$

Damit sehen wir

$$\begin{aligned} \Delta_{g\circ f,a}(h) &= \frac{g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big)}{h} = \frac{\widetilde{g}\big(f(a+h)\big) \cdot \big(f(a+h) - f(a)\big)}{h} \\ &= \widetilde{g}\big(f(a+h)\big) \cdot \Delta_{f,a}(h). \end{aligned}$$

Mit den Grenzwertsätzen 2.2.16, den Eigenschaften stetiger Funktionen (Satz 3.4.11) und den bisherigen Erkenntnissen folgern wir

$$\lim_{h\to 0} \Delta_{g\circ f,a}(h) = \lim_{h\to 0} \widetilde{g}\big(f(a+h)\big) \cdot \lim_{h\to 0} \Delta_{f,a}(h) = g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$$

und haben die Behauptung bewiesen. □

4.2.5 Bemerkung. i) In obiger Situation nennen wir f die „innere Funktion" und g die „äußere Funktion". Die Ableitung von $g \circ f$ ist dann gegeben als

„(innere Ableitung) mal (äußere Ableitung)".

ii) In der Praxis wird man eine gegebene Funktion h erst in der Form $g \circ f$ schreiben müssen, um die Kettenregel anwenden zu können.

4.2.6 Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x^3 - 4x^2 + 2x - 1)^2. \end{aligned}$$

Innere Funktion:	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 1$
Äußere Funktion:	$g(y) = y^2$
Innere Ableitung:	$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$
Äußere Ableitung:	$g'(y) = 2y$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow h'(x) &= (g \circ f)'(x) \\ &= (3x^2 - 8x + 2) \cdot 2 \cdot (x^3 - 4x^2 + 2x - 1) \\ &= 6x^5 - 40x^4 + 80x^3 - 54x^2 + 24x - 4. \end{aligned}$$

4.2.7 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende oder fallende Funktion. Es seien $I := f([a,b])$ und $f^{-1}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion (vgl. Satz* 3.3.10 *und Aufgabe* 6.10.3*). Die Funktion f sei im Punkt x differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar, und es gilt*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$$

Beweis. Es ist zunächst zu überprüfen, dass f^{-1} in einer Umgebung von $f(x)$ definiert ist. Dazu muss man lediglich beachten, dass f in einer Umgebung von x definiert ist und dass f stetig und smf bzw. smw ist.

Es sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge reeller Zahlen, so dass $y + h_n \in D(f^{-1}) = W(f)$. Es gibt eine Folge $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x + \eta_n \in D(f)$ und $y + h_n = f(x + \eta_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{f^{-1},f(x)}(h_n) &= \frac{f^{-1}(y + h_n) - f^{-1}(y)}{h_n} = \frac{f^{-1}\big(f(x + \eta_n)\big) - f^{-1}\big(f(x)\big)}{y + h_n - y} \\ &= \frac{x + \eta_n - x}{f(x + \eta_n) - f(x)} = \frac{1}{\Delta_{f,x}(\eta_n)}. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von f^{-1} impliziert

$$\lim_{n\to\infty} x + \eta_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y + h_n) = f^{-1}(y) = x,$$

so dass $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Daher erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{f^{-1},f(x)}(h_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Delta_{f,x}(\eta_n)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_{f,x}(\eta_n)} = \frac{1}{f'(x)},$$

und der Beweis ist vollendet. □

4.2.8 Bemerkung. Da der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der Geraden $\{y = x\}$ erhalten wird, gilt dies auch für die Tangenten in den entsprechenden Punkten. Damit kann man sich obige Aussage sofort klar machen. Insbesondere sieht man, dass die Voraussetzung $f'(x) \neq 0$ wesentlich ist, denn eine waagerechte Tangente von $\Gamma(f)$ wird zu einer senkrechten Tangente von $\Gamma(f^{-1})$. Man erinnere sich etwa an das Beispiel der Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$.

4.3 Extremwerte und der Mittelwertsatz

Differenzierbare Funktionen sind in vieler Hinsicht „schöner" als beliebige Funktionen. Einer ihrer Vorteile ist, dass man sie gut auf Extremstellen untersuchen kann. Diese Eigenschaft ist für viele Anwendungen wichtig. Wir formalisieren zunächst den Begriff des lokalen und globalen Extremums. Anschließend zeigen wir, dass in einem lokalen Extremum die erste Ableitung verschwinden muss. Aus dieser Beobachtung folgern wir den Satz von Rolle und den Mittelwertsatz. Letzterer ist das zentrale Mittel zur Untersuchung differenzierbarer Funktionen: Er setzt die Ableitung mit den Wachstumseigenschaften der Funktion in Verbindung. Als erste Folgerungen aus dem Mittelwertsatz leiten wir her, dass eine Funktion mit verschwindender Ableitung bereits konstant ist, und beweisen die bekannten hinreichenden Kriterien für das Vorliegen lokaler Extremstellen.

4.3.1 Definition. Es sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.
i) Wir sagen, dass f an der Stelle $x_0 \in D$ ein *globales Minimum* bzw. *Maximum* annimmt, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq f(x_0).$$

ii) Die Funktion f nimmt an der Stelle x_0 ein *lokales Minimum* bzw. *Maximum* an, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon): \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Gilt sogar „$>$" bzw. „$<$" für $x \in (D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) \setminus \{x_0\}$, dann sprechen wir von einem *isolierten lokalen Minimum* bzw. *Maximum*.
iii) Wollen wir nicht spezifizieren, ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt, dann sprechen wir von einem *(globalen/lokalen) Extremum*.

4.3.2 Satz . *Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum besitzt. Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir nehmen an, in x_0 liege ein lokales Miminum vor. Den anderen Fall behandelt man genauso bzw. folgert ihn durch Betrachtung von $-f$. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ für alle $-\varepsilon < h < \varepsilon$. Daher finden wir

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-0} \Delta_{f,x_0}(h) = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

und

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+0} \Delta_{f,x_0}(h) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

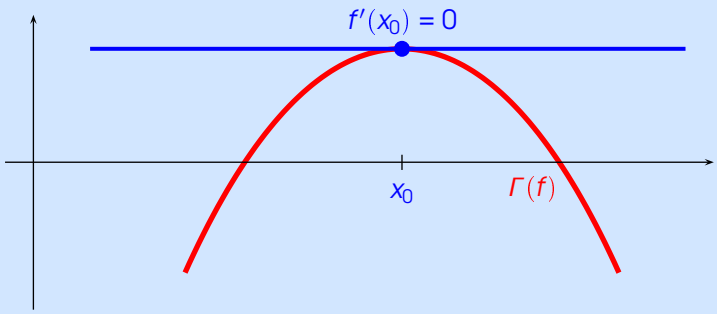
Folglich gilt $f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0)$, d.h. $f'(x_0) = 0$. □

4.3.3 Bemerkung. i) Wir betrachten $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$. Die Ableitung dieser Funktion ist $f'\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2$. Es gilt $f'(0) = 0$. Allerdings haben wir $f(x) < 0$ für $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$. Daher liegt in 0 keine lokale Extremstelle vor. Das obige Kriterium ist somit nicht hinreichend für die Existenz eines lokalen Extremums.

ii) Es sei $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$. Das globale Minimum dieser Funktion wird in 0 angenommen und das globale Maximum in 1. Es gilt $f'_+(0) = 1 = f'_-(1)$. Deshalb können wir das obige Kriterium nicht auf abgeschlossene Intervalle ausdehnen. Für eine Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bedürfen die Randpunkte immer einer gesonderten Diskussion.

4.3.4 Folgerung (Satz von Rolle[2]). *Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Wenn f in (a,b) differenzierbar ist, dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Zum Satz von Rolle.
Existenz eines Punktes $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in [a,b]$, in $\Gamma(f)$
mit waagerechter Tangente.



Beweis. Wir wissen bereits, dass f auf $[a,b]$ ein Minimum und ein Maximum annimmt (Satz 3.5.3). Wenn f nicht konstant ist, dann existiert ein $x \in (a,b)$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Also wird das Minimum (falls $f(x) < f(a)$) oder das Maximum (falls $f(x) > f(a)$) in einem Punkt x_0 im offenen Intervall (a,b) angenommen. Nach Satz 4.3.2 gilt $f'(x_0) = 0$. Für eine konstante Funktion f ist der Satz von Rolle trivial. □

Wir kommen nun zum zentralen Hilfsmittel für die Untersuchung differenzierbarer Funktionen:

4.3.5 Folgerung (Mittelwertsatz). *Für jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die in (a,b) differenzierbar ist, existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b-a).$$

Beweis. Für eine beliebige stetige Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die in (a,b) differenzierbar ist, ist $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$$

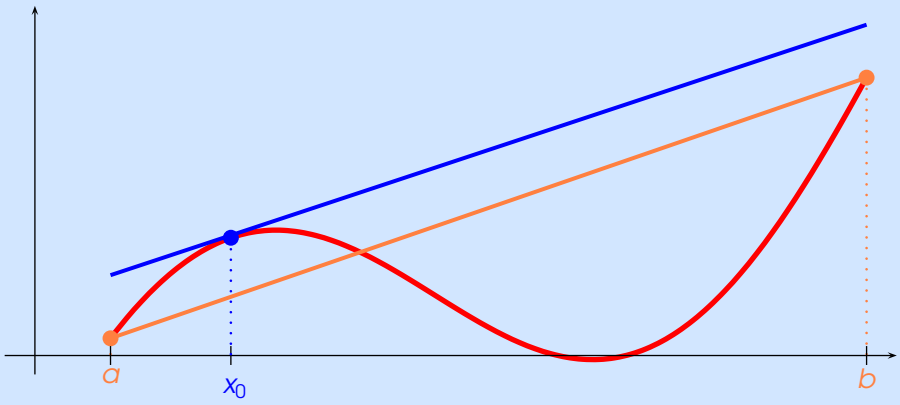
eine stetige und in (a,b) differenzierbare Funktion mit $F(a) = F(b)$. Daher existiert nach dem Satz von Rolle ein x_0 mit

$$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

[2] Michel Rolle (1652 - 1719), französischer Mathematiker.

Dies ist unsere Behauptung. □

Zum Mittelwertsatz.
Die Tangente an $(x_0, f(x_0))$ hat dieselbe Steigung wie die Gerade, die $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verbindet.



Der Mittelwertsatz bringt die Ableitung der Funktion f mit ihrem Wachstum in Verbindung: Wenn wir die Ableitung von f in (a, b) kennen, dann können wir die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ miteinander vergleichen. Aus dem Mittelwertsatz werden wir jetzt zahlreiche interessante Aussagen, wie z.B. hinreichende Kriterien für lokale Extrema, ableiten.

4.3.6 Folgerung. *Es seien $a < b$ und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wie im Mittelwertsatz und $m \leq M$ reelle Zahlen, so dass*

$$\forall x \in (a,b): \quad m \leq f'(x) \leq M.$$

Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a \leq x \leq y \leq b \quad \Rightarrow \quad m\cdot(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M\cdot(y-x).$$

Beweis. Für $x = y$ ist nichts zu zeigen. Andernfalls wenden wir den Mittelwertsatz auf $f_{|[x,y]}$ an. Demnach existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)\cdot(y-x).$$

Die Abschätzungen für f' liefern dann sofort das Ergebnis. □

4.3.7 Folgerung. *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in $[a,b]$ stetige und in (a,b) differenzierbare Funktion. Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f konstant.*

Beweis. In Folgerung 4.3.6 können wir $m = 0 = M$ wählen. □

4.3.8 Folgerung. *Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die in (a,b) differenzierbar ist.*

i) *Für alle $x \in (a,b)$ gelte $f'(x) \geq 0$. Dann ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend.*

ii) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für jeden Punkt $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f auf $[a,b]$ monoton fallend.*

iii) *Die Funktion f ist auf $[a,b]$ smw, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.*

iv) Gilt $f'(x) < 0$, $x \in (a,b)$, dann ist f auf $[a,b]$ smf.

Beweis. Wir zeigen i). Es seien Punkte $x < y$ in $[a,b]$ gegeben. Nach dem Mittelwertsatz für $f_{|[x,y]}$ gibt es ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x),$$

Da $f'(\xi) \geq 0$ und $y - x > 0$ gilt, ist der Ausdruck auf der rechten Seite nicht negativ, so dass wie gewünscht $f(x) \leq f(y)$ folgt. □

4.3.9 Folgerung (Hinreichende Bedingungen für Extrema). *Es sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $x_0 \in (a,b)$ sei ein Punkt mit $f'(x_0) = 0$.*

i) Es gebe ein $\varepsilon > 0$, so dass $f'(x) \leq 0$ (bzw. ≥ 0) für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ gilt. Dann liegt in x_0 ein lokales Minimum (bzw. Maximum) vor.

*ii) Wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, für das $f'(x) < 0$ (bzw. > 0) für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) > 0$ (bzw. < 0) für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ gilt, dann nimmt f in x_0 ein **isoliertes** lokales Minimum (bzw. Maximum) an.*

*iii) Die Funktion f sei in x_0 zweimal differenzierbar, und es gelte $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$). Dann liegt in x_0 ein **isoliertes** lokales Minimum (bzw. Maximum) vor.*

Beweis. i) Nach Folgerung 4.3.8 ist die Funktion f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ monoton fallend (bzw. monoton wachsend) und auf $[x_0, x + \varepsilon)$ monoton wachsend (bzw. monoton fallend). Damit gilt $f(x) \geq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \leq f(x_0)$) für $x_0 - \varepsilon < x \leq x_0$ und $f(x_0) \leq f(x)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) für $x_0 \leq x < x_0 + \varepsilon$. Wir sehen also, dass $f(x_0) \leq f(x)$ (bzw. $f(x_0) \geq f(x)$) auf ganz $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gilt.

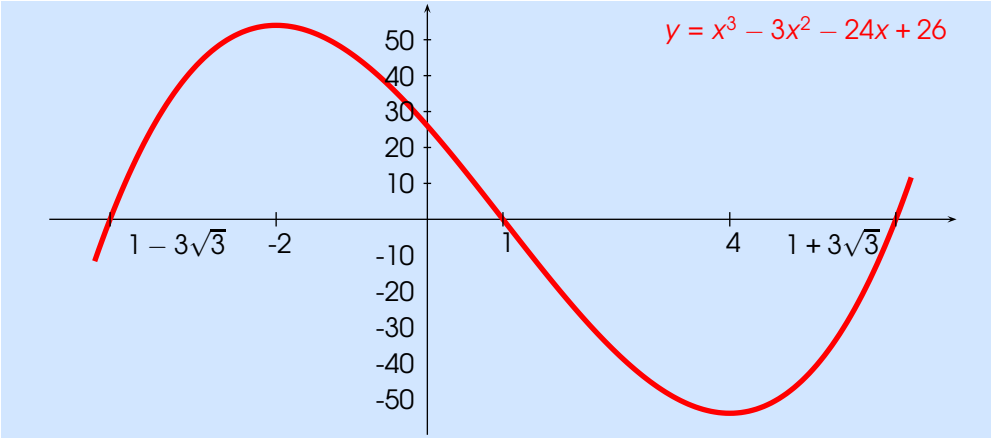
ii) Diesen Teil beweist man analog zu Teil i).

iii) Wir betrachten nur den Fall „$>$“. Nach Voraussetzung gilt

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0.$$

Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f'(x_0 + h) < 0$ für $h \in (-\varepsilon, 0)$ und $f'(x_0 + h) > 0$ für $h \in (0, \varepsilon)$ gilt. Damit folgt iii) aus ii). □

4.3.10 Bemerkung. i) Wir betrachten $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^4$. Diese Funktion nimmt in $x_0 = 0$ ein isoliertes globales Minimum an. Die erste Ableitung ist $f'\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 4x^3$, und die zweite $f''\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 12x^2$. Wir haben $f'(0) = 0 = f''(0)$. Damit können wir das Minimum nicht mit Kriterium iii) aus dem Satz erkennen. Allerdings gilt $f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $f'(x) > 0$ für $x > 0$. Damit finden wir das Minimum mit Teil ii) des Satzes.



ii) Wir betrachten die Polynomfunktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x^2 - 24x + 26. \end{array}$$

Wir haben

$$\begin{array}{rcl} f'\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 - 6x - 24 = 3\cdot(x^2 - 2x - 8). \end{array}$$

Mit der Formel in Beispiel 3.3.3 ii) ermittelt man die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$ der ersten Ableitung.

Die zweite Ableitung ist

$$\begin{array}{rcl} f''\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 6x - 6. \end{array}$$

Aus $f''(-2) = -18 < 0$ folgt, dass in $x_1 = -2$ ein lokales Maximum vorliegt, und aus $f''(4) = 18 > 0$, dass die Funktion in $x_2 = 4$ ein lokales Minimum annimmt. Weitere Extremstellen gibt es nicht.

iii) Das zweite Kriterium in Folgerung 4.3.9 ist notwendig, wenn f stetig differenzierbar ist und die Nullstellen der ersten Ableitung keinen Häufungspunkt in x_0 haben. (Dies gilt z.B. für eine Polynom- oder eine gebrochen rationale Funktion.) Dann gibt es in der Tat ein ε, so dass $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}$. Wegen der Stetigkeit von f' ist das Vorzeichen von f' nach dem Zwischenwertsatz 3.5.2 auf den Intervallen $(x_0-\varepsilon, x_0)$ und $(x_0, x_0+\varepsilon)$ konstant. Entweder wechselt die Funktion f' in x_0 ihr Vorzeichen, und es liegt ein Extremum in x_0 vor, oder es ist $f'(x) < 0$ (bzw. > 0) für alle $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\setminus\{x_0\}$, i.e. f ist smf (bzw. smw) auf $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Dann nimmt f in x_0 kein Extremum an.

Es ist jedoch möglich, dass sich die Nullstellen der ersten Ableitung in x_0 häufen, z.B., wenn f in einer Umgebung von x_0 konstant ist. (Wir basteln z.B. die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (x+2)^4, & \text{falls } x \leq -2 \\ 0, & \text{falls } -2 < x < 0 \\ x^4, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}. \end{array}$$

Sie ist dreimal differenzierbar und auf dem Intervall $[-2, 0]$ konstant null.)

4.4 Krümmung und zweite Ableitung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die zweite Ableitung einer zweimal differenzierbaren Funktion. Genauer gesagt geben wir dem Vorzeichen der zweiten Ableitung die Bedeutung der Krümmung der Funktion. Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen liefert dies eine anschauliche Interpretation des hinreichenden Kriteriums für Extremstellen über die zweite Ableitung.

4.4.1 Definition. Es sei D ein (möglicherweise unbeschränktes) Intervall.

i) Eine reelle Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex* (*linksgekrümmt*) bzw. *konkav* (*rechtsgekrümmt*), wenn für alle $x_1 < x_2 \in D$ und alle $\lambda \in [0, 1]$

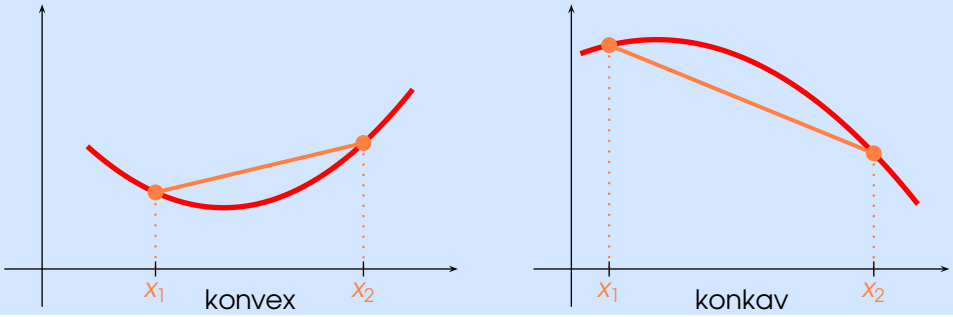
$$f\big((1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2\big)\ \leq\ (\text{bzw. }\geq)\ (1-\lambda)\cdot f(x_1)+\lambda\cdot f(x_2)$$

gilt.

Die Strecke, die $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ miteinander verbindet, liegt also über (bzw. unter) dem Graphen der Funktion f.

ii) Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt *Wendepunkt*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f im Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0]$ konvex (bzw. konkav) und im Intervall $[x_0, x_0+\varepsilon)$ konkav (bzw. konvex) ist. Wenn zudem f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ gilt, dann heißt x_0 *Sattelpunkt*.

Zu Definition 4.4.1.



4.4.2 Satz. i) *Es sei D ein offenes (möglicherweise aber unbeschränktes) Intervall, und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt, wenn $f''(x) \geq 0$ bzw. $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D$ gilt.*

ii) *Unter den Voraussetzungen von* i) *sei x_0 ein Punkt, in dem f dreimal differenzierbar ist, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ gilt. Dann ist x_0 ein Wendepunkt.*

Beweis. i) Wir nehmen $f''(x) \geq 0$, $x \in D$, an. Es seien $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gegeben. Wir bilden die stetige und auf $(0,1)$ differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto f\big((1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2\big)-(1-\lambda)\cdot f(x_1)-\lambda\cdot f(x_2). \end{aligned}$$

Es gilt

$$g'(\lambda) = (x_2-x_1)\cdot f'\big((1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2\big)-\big(f(x_2)-f(x_1)\big)$$

und

$$g''(\lambda) = (x_2-x_1)^2\cdot f''\big((1-\lambda)\cdot x_1+\lambda\cdot x_2\big),\quad \lambda\in(0,1).$$

Nach Voraussetzung gilt $g''(\lambda) \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$. Deshalb ist g' nach Folgerung 4.3.8 i) monoton wachsend. Da wir $g(0) = g(1) = 0$ haben, existiert nach dem Satz von Rolle 4.3.4 ein $\lambda_0 \in (0,1)$ mit $g'(\lambda_0) = 0$. Wegen des Monotonieverhaltens von g' folgt $g'(\lambda) \leq g'(\lambda_0) = 0$, $0 < \lambda \leq \lambda_0$, und $0 = g'(\lambda_0) \leq g'(\lambda)$, $\lambda_0 \leq \lambda < 1$. Daher ist g auf $[0,\lambda_0]$ monoton fallend und auf $[\lambda_0, 1]$ monoton wachsend. Wir schließen $0 = g(0) \geq g(\lambda)$ für $\lambda \in [0,\lambda_0]$ und $g(\lambda) \leq g(1) = 0$ für $\lambda \in [\lambda_0, 1]$. Damit nimmt g nur nicht positive Werte an. Dies ist unsere Behauptung.

Sei nun umgekehrt g linksgekrümmt. Wir argumentieren durch Widerspruch. Es gebe also einen Punkt $x_0 \in D$ mit $f''(x_0) < 0$. Wir führen die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)-f'(x_0)\cdot(x-x_0) \end{aligned}$$

ein. Sie ist zweimal differenzierbar und erfüllt $\varphi(x_0) = f(x_0)$, $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Damit nimmt sie nach Folgerung 4.3.9 iii) in x_0 ein isoliertes lokales Maximum an. Wir finden insbesondere ein $h > 0$, so dass

$$\varphi(x_0 - h) < \varphi(x_0) \quad \text{und} \quad \varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0).$$

Wir schließen

$$\varphi(x_0) > \frac{1}{2} \cdot \big(\varphi(x_0 + h) + \varphi(x_0 - h)\big).$$

Mit $x_1 := x_0 - h$, $x_2 := x_0 + h$ und $\lambda := 1/2$ wird diese Ungleichung zu

$$f\big((1-\lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2\big) > (1-\lambda) \cdot f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2).$$

Diese Ungleichung widerspricht unserer Voraussetzung an f.

ii) Sei etwa $f'''(x_0) > 0$. Wie im Beweis von Folgerung 4.3.9 iii) schließt man aus

$$\lim_{h \to 0} \Delta_{f'', x_0}(h) = f'''(x_0) > 0,$$

dass es ein $\varepsilon > 0$ mit $f''(x) < 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f''(x_0) > 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ gibt. Nach Teil i) des Satzes wechselt die Funktion in x_0 von Rechts- auf Linkskrümmung. Daher liegt ein Wendepunkt vor. Entsprechend folgert man aus $f'''(x_0) < 0$, dass die Funktion in x_0 von Links- auf Rechtskrümmung wechselt. □

4.4.3 Bemerkung. Dieser Satz veranschaulicht Teil iii) von Folgerung 4.3.9 iii). In jener Folgerung gelte etwa $f''(x_0) < 0$. Zu den dortigen Voraussetzungen fügen wir hinzu, dass f in x_0 zweimal **stetig differenzierbar** ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass f in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ zweimal differenzierbar ist. Da f'' in x_0 stetig ist, können wir wegen Folgerung 3.4.9 ε so klein wählen, dass $f''(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Nach dem vorherigen Satz ist f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ rechtsgekrümmt. Daher kann es sich bei dem Punkt x_0 nur um eine lokale Maximalstelle handeln.

4.4.4 Beispiel. i) Die Funktion $f(x) = x^{2k+1}$, $k \geq 1$, hat in 0 einen Sattelpunkt. Ihre zweite Ableitung, i.e. $f''(x) = (2k+1) \cdot 2 \cdot k \cdot x^{2k-1}$, ist negativ für $x < 0$ und positiv für $x > 0$. Daher ist f im Intervall $(-\infty, 0]$ rechtsgekrümmt und im Intervall $[0, \infty)$ linksgekrümmt.

ii) Es gilt $\sin'' = -\sin$ und $\sin''' = -\cos$ (s. Satz 4.8.7). Die Nullstellen der zweiten Ableitung des Sinus sind also die ganzzahligen Vielfachen von π. Dort hat die dritte Ableitung den Wert ± 1. Es handelt sich daher um Wendepunkte.

4.5 Kurvendiskussion

Ziel der Kurvendiskussion ist es, eine gegebene Funktion auf ihre Charakteristika wie Symmetrie, Periodizität, Extremstellen, Krümmungsverhalten usw. zu untersuchen und anhand der gewonnenen Erkenntnisse ihren Graphen zu skizzieren, um so eine Anschauung für das Verhalten der Funktion zu gewinnen. Dazu gehe man wie folgt vor:

- Soweit nicht angegeben: Bestimmung des „natürlichen" Definitionsbereichs.
- Soweit erkennbar: Symmetrie, Periodizität.
- Untersuchung der Definitionslücken: Liegen Polstellen, hebbare Definitionslücken vor? Ggfs. stetige Fortsetzung durchführen.

- Bestimmung der Nullstellen. Vorzeichen zwischen den Null- und Polstellen.
- Berechnung der Ableitungen (i.A. bis zur zweiten oder dritten Ordnung).
- Monotonieverhalten (mit Funktion oder erster Ableitung).
- Bestimmung der Minima und Maxima (mit erster und ggfs. zweiter Ableitung).
- Krümmungsverhalten, Wende- und Sattelpunkte (mit erster bis zweiter oder dritter Ableitung).
- Falls der Definitionsbereich unbeschränkt ist: Untersuchung des Verhaltens für $x \to \pm\infty$.
- Wertebereich der Funktion.
- Skizze des Funktionsgraphen.

Gebrochen rationale Funktionen werden besonders gerne zur Kurvendiskussion herangezogen.

4.5.1 Beispiel. Gegeben seien die Polynome $p = -5x^2 + 5$ und $q = x^3$. Zu besprechen ist die zugehörige rationale Funktion $f := p/q$.

i) Die Funktion ist außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms definiert, i.e. $D(f) = \mathbb{R}^\star$.

ii) Es gilt

$$f(-x) = \frac{-5(-x)^2 + 5}{(-x)^3} = \frac{-5x^2 + 5}{-x^3} = -f(x).$$

Die Funktion ist also ungerade.

iii) Es gilt $p(0) = 5$. In $x = 0$ liegt also eine Polstelle vor.

iv) Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind offenbar ± 1, d.h. $p(x) = -5(x-1)(x+1)$. Dies sind auch die Nullstellen der Funktion f. Für das Vorzeichen von f ergibt sich

Intervall	Vorzeichen von f
$(-\infty, -1)$	+
$(-1, 0)$	–
$(0, 1)$	+
$(1, \infty)$	–

v) Die Ableitungen werden mit der Quotientenregel bestimmt:

$$f'(x) = \frac{5(x^2-3)}{x^4}; \quad f''(x) = \frac{-10(x^2-6)}{x^5};$$

$$f'''(x) = \frac{30(x^2-10)}{x^6}.$$

vi) Die Nullstellen der ersten Ableitungen sind $\pm\sqrt{3}$. Für die Vorzeichen der ersten Ableitung ergibt sich

Intervall	Vorzeichen von f'	Monotonie von f
$(-\infty, -\sqrt{3})$	+	smw
$(-\sqrt{3}, 0)$	–	smf
$(0, \sqrt{3})$	–	smf
$(\sqrt{3}, \infty)$	+	smw

vii) Der obigen Tabelle entnimmt man, dass in $-\sqrt{3}$ ein lokales Maximum und in $\sqrt{3}$ ein lokales Minimum vorliegt. Es gilt $f(-\sqrt{3}) \approx 1,92$ und $f(\sqrt{3}) \approx -1,92$.

viii) Die zweite Ableitung hat die Nullstellen $\pm\sqrt{6}$. Wir erhalten folgende Tabelle

Intervall	Vorzeichen von f''	Krümmung von f
$(-\infty, -\sqrt{6})$	+	links
$(-\sqrt{6}, 0)$	–	rechts
$(0, \sqrt{6})$	+	links
$(\sqrt{6}, \infty)$	–	rechts

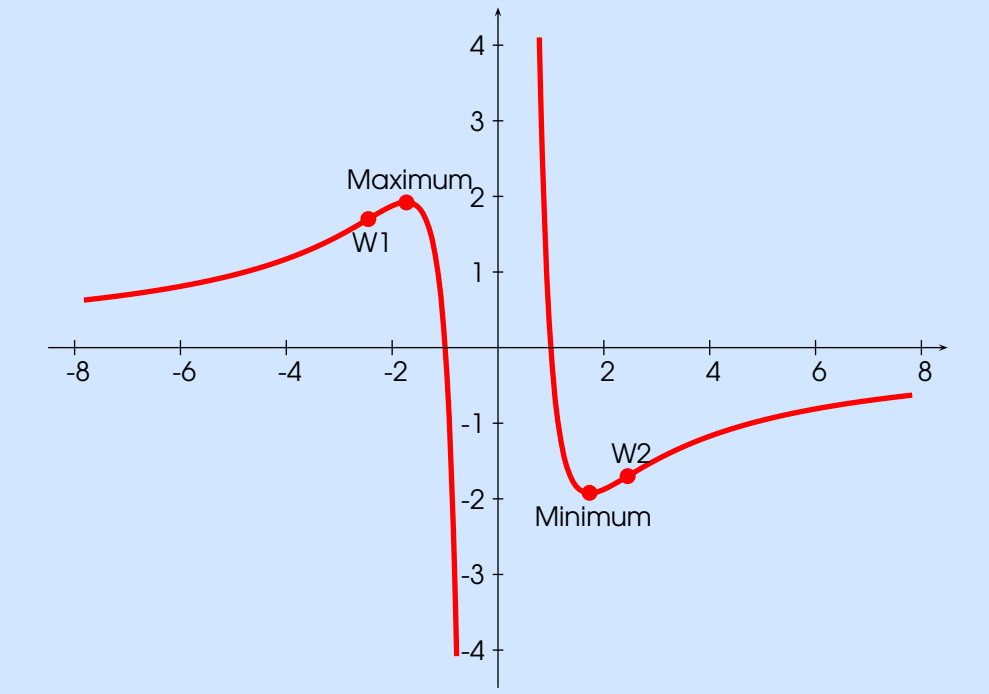
An den Stellen $\pm\sqrt{6}$ liegen also Wendepunkte vor. Es gilt $f(-\sqrt{6}) \approx 1,7$ und $f(\sqrt{6}) \approx -1,7$.

ix) Da der Grad des Nennerpolynomes größer als der Grad des Zählerpolynoms ist, gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

x) Der Wertebereich ist $\mathbb{R}$. Dies folgt z.B., da $f(-\sqrt{3}) > 0$ und $\lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$ ($\Rightarrow (-\infty, 0] \subset$ Wertebereich) und $f(\sqrt{3}) < 0$ und $\lim_{x \to 0+0} f(x) = \infty$ ($\Rightarrow [0, \infty) \subset$ Wertebereich).

xi) Skizze des Funktionsgraphen.



4.5.2 Bemerkung. Natürlich kann man alle Berechnungen auch vom Computer durchführen lassen. Ein bekanntes Programm dazu ist `Maple`.

```
>  f(x):= (-5*x^2+5)/x^3;

f(x) := (-5*x^2+5)/x^3

>  discont(f(x),x);% Bestimme die Unstetigkeitsstellen!

{0}
```

```
>  g(x):=normal(diff(f(x),x));% Erste Ableitung!
```

```
g(x) := 5*(x^2-3)/x^4
```

```
>  h(x):=normal(diff(g(x),x)); % Zweite Ableitung!
```

```
h(x) := -10*(x^2-6)/x^5
```

```
>  j(x):=normal(diff(h(x),x)); % Dritte Ableitung!
```

```
j(x) := 30*(x^2-10)/x^6
```

```
>  solve(f(x)=0,x);% Bestimme die Nullstellen von f!
```

```
-1, 1
```

```
>  solve(g(x)=0,x); % Nullstellen von f'!
```

```
3^(1/2), -3^(1/2)
```

```
>  eval(h(x), x=sqrt(3)); % Berechne f''(sqrt(3))!
```

```
10/9*3^(1/2)
```

```
>  evalf(eval(f(x),x=sqrt(3))); % Näherung für f(sqrt(3)).
```

```
-1.924500898
```

```
>  solve(h(x)=0,x); % Nullstellen von f''.
```

```
-6^(1/2), 6^(1/2)
```

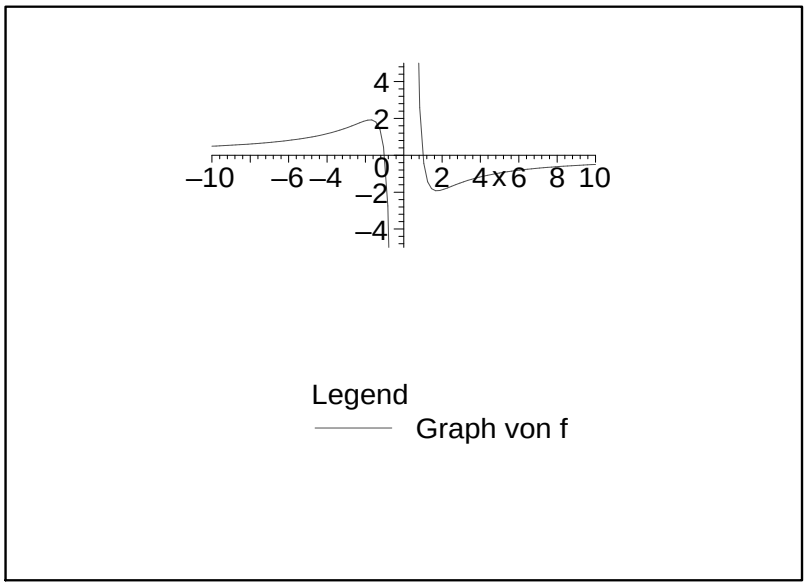
```
>  eval(j(x), x=sqrt(6)); % Ist f'''(sqrt(3)) ungleich 0?
```

```
-5/9
```

```
>  evalf(eval(f(x),x=sqrt(6))); % Näherung für f(sqrt(6)).
```

```
-1.701034544
```

```
>  plot(f(x), x=-10..10, -5..5, discont=true, scaling=
   constrained, legend=``Graph von f''); % Zeichne den
                                          Graphen!
```



4.5.3 Beispiel. Man bestimme i) den Definitionsbereich, ii) die Nullstellen, iii) die (lokalen) Extrema und iv) das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs der Funktion f mit

$$f(x) := \log\left(\frac{x^2-1}{4x-5}\right).$$

Man erinnere sich zunächst an folgende Eigenschaften der Logarithmusfunktion (s. 3.8.15):

- Definitionsbereich $\mathbb{R}_{>0}$.
- log ist smw.
- Die einzige Nullstelle liegt bei $x = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0+0} \log(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = \infty$.

i) Es sei $g(x) := (x^2-1)/(4x-5)$ die „innere Funktion". Es folgt

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{4}\right\} \;\middle|\; g(x) > 0 \right\}.$$

Es gilt $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Man folgert leicht

$$D(f) = (-1,1) \cup \left(\frac{5}{4}, \infty\right).$$

ii) Die Funktion f wird an den Stellen in $D(f)$ null, an denen $g(x) = 1$ gilt. Es sind also die Lösungen der Gleichung $x^2 - 1 = 4x - 5$ oder äquivalent dazu der Gleichung $x^2 - 4x + 4 = 0$ zu bestimmen. Da $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, ist $x = 2$ die einzige Nullstelle der Funktion f.

iii) Auf Grund der Eigenschaften des Logarithmus nimmt die Funktion f ihre lokalen Minima/Maxima an denselben Stellen an wie die Funktion g. Also berechnen wir die erste und zweite Ableitung der Funktion g:

$$g'(x) = \frac{4x^2 - 10x + 4}{(4x-5)^2}; \qquad g''(x) = \frac{18}{(4x-5)^3}.$$

Man sieht leicht $4x^2 - 10x + 4 = (4x-2)(x-2)$.

Die Nullstellen der Funktion $g'(x)$ sind $x_1 = 1/2$ und $x_2 = 2$. Ferner gilt $g''(x_1) < 0$ und $g''(x_2) > 0$. Damit nimmt die Funktion g in x_1 ein lokales Maximum an und in x_2 ein lokales Minimum.

Da $x_1, x_2 \in D(f)$, gelten die entsprechenden Aussagen auch für f. Für die Funktionswerte an den Extremstellen gilt:

$$f(x_1) \approx -1{,}3863; \qquad f(x_2) = 0.$$

iv) Es gilt

$$\lim_{x\to -1+0} g(x) = 0; \quad \lim_{x\to 1-0} g(x) = 0$$

und

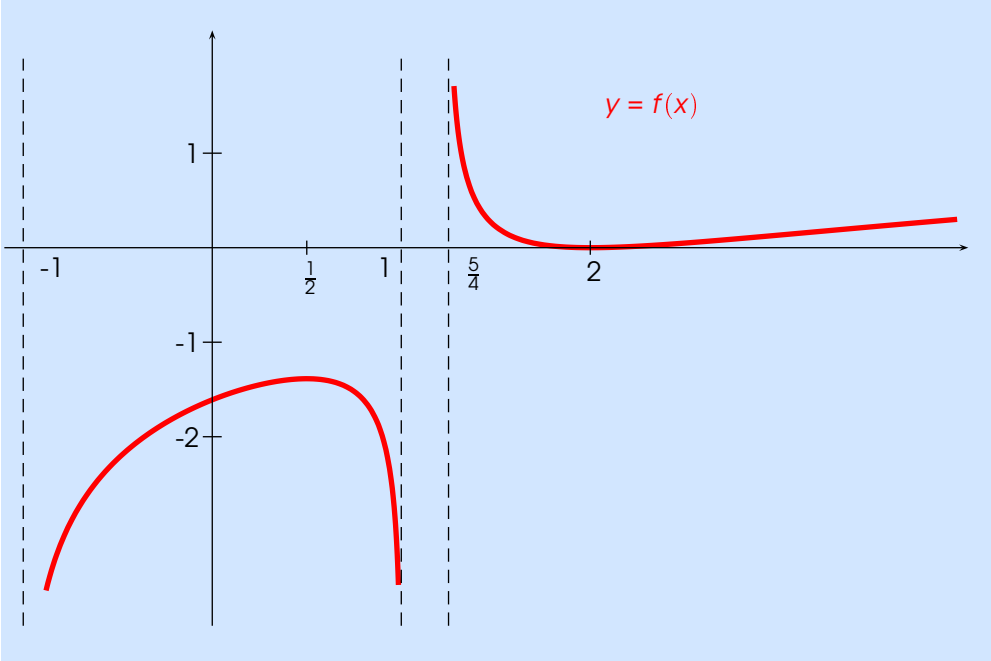
$$\lim_{x\to \frac{5}{4}+0} g(x) = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$$

und

$$\lim_{x\to \frac{5}{4}+0} f(x) = \infty; \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$



4.6 Extremwertaufgaben

Extremwertaufgaben sind von der folgenden Form:

Gegeben ist eine Funktion $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem (endlichen) abgeschlossenen Intervall.

Zu bestimmen sind die absoluten Minima/Maxima der Funktion. (Diese können u.U. an den Rändern a und b des Intervalls angenommen werden!)

Lösungsverfahren:

1. Man bestimme mit den Methoden der Differentialrechnung die lokalen Minima/Maxima der Funktion im Inneren (a,b) des Intervalls.
2. Durch Vergleich der Funktionswerte an den gefundenen Extremstellen und der Funktionswerte an den Randstellen ermittle man die absoluten Minima/Maxima.

Es kommt oft vor, dass die Funktion f gar nicht a priori bekannt ist. Meistens liegt eine Funktion $F(x_1,\ldots,x_n)$ in *mehreren* Variablen vor, die in einer gegeben Situation minimiert bzw. maximiert werden soll. Erst durch sogenannte *Nebenbedingungen* erhält man eine Funktion $f(x)$ in einer Variablen. Diese Nebenbedingungen muss man aus der Problemstellung ablesen. Wir erläutern dies in den Beispielen.

4.6.1 Beispiel. i) Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge a. Diesem Quadrat ist ein Rechteck so einzubeschreiben, dass

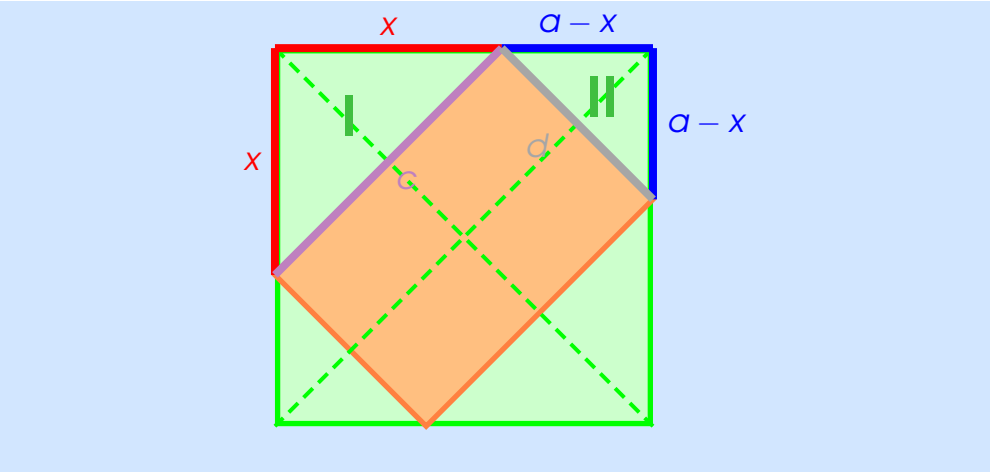
1. die Seiten des Rechtecks parallel zu den Diagonalen des Quadrats sind
2. die Fläche des Rechtecks so groß wie möglich ist.

Es seien c und d die Seitenlängen des Rechtecks. Die Fläche des Rechtecks ist durch die Funktion

$$F(c,d) = c \cdot d$$

gegeben.

Nun teilen die Ecken des Rechtecks eine jede Seite des Quadrats in zwei Stücke. Die obere Seite werde etwa in Stücke der Länge x und $a-x$ unterteilt.



Die Bedingung, dass die Seiten des Rechtecks parallel zu den Diagonalen des Quadrats sein sollen garantiert, dass die Dreiecke I und II gleichschenkelig sind.

Der Satz von Pythagoras liefert

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x \\ d &= \sqrt{2(a-x)^2} = \sqrt{2}(a-x). \end{aligned}$$

Die Fläche des Rechtecks ist daher durch

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot (a-x) = 2ax - 2x^2$$

gegeben. Dabei gilt $x \in [0, a]$. Wir haben offenbar das absolute Maximum zu finden.

Wir untersuchen die erste Ableitung:

$$f'(x) = 2a - 4x \quad \Rightarrow \quad \left(f'(x) = 0 \iff x = \frac{a}{2} \right).$$

Es gilt

$$f''(x) = -4 \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{a}{2}\right) = -4 < 0.$$

In $a/2$ liegt also das einzige lokale Maximum der Funktion f im Intervall $(0, a)$ vor. Es gilt

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

und

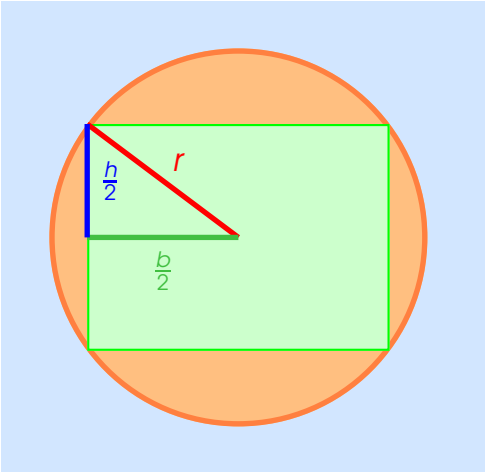
$$f(0) = f(a) = 0.$$

Daher nimmt f an der Stelle $a/2$ sogar das absolute Maximum an.

ii) Einem Kreis vom Radius r soll ein Rechteck so einbeschrieben werden, dass die Funktion

$$W(b, h) := \frac{1}{6} b h^2$$

maximal wird (b: Breite des Rechtecks; h: Höhe des Rechtecks).



Praktische Bedeutung:
Kreis =
Querschnitt eines Baumstamms
Rechteck =
Querschnitt eines Balkens, der aus dem Baumstamm ausgeschnitten wird
W =
Widerstandsmoment des Balkens

Mit dem Satz von Pythagoras erhalten wir wieder

$$b^2 + h^2 = 4r^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 4r^2 - b^2.$$

Damit ist die Funktion

$$w(b) := \frac{1}{6} b \cdot (4r^2 - b^2) = \frac{1}{6}(4r^2 b - b^3)$$

im Intervall $[0, 2r]$ zu maximieren.

Wir betrachten die erste Ableitung:

$$w'(b) = \frac{1}{6}(4r^2 - 3b^2) \quad \Rightarrow \quad w'(b) = 0 \overset{b \geq 0}{\iff} b = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Es gilt

$$w''(b) = -b \quad \text{und damit} \quad w''\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2r}{\sqrt{3}} < 0.$$

Da $w(0) = w(2r) = 0$ und

$$w\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{9\sqrt{3}} r^3,$$

liegt an der Stelle $2r/\sqrt{3}$ das absolute Maximum vor.

4.7 Ableitungen und Grenzwerte

Wir betrachten eine Funktion $h = f/g$ und wollen $\lim_{x \to b} h(x)$ für einen Punkt $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ untersuchen. Falls $\lim_{x \to b} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\lim_{x \to b} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ existieren, dann erwarten wir, dass wir daraus den gesuchten Grenzwert berechnen können. Für $\lim_{x \to b} g(x) \in \mathbb{R}^*$ ist das sofort möglich. Gilt $\lim_{x \to b} g(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x \to b} f(x) \neq \pm\infty$, dann folgt $\lim_{x \to b} h(x) = 0$. Wenn $\lim_{x \to b} g(x) = 0$ und $\lim_{x \to b} f(x) \neq 0$, dann existiert $\lim_{x \to b} h(x)$ $(\in \{\pm\infty\})$ genau dann, wenn g "nahe bei" b entweder nur positive oder nur negative Werte annimmt. In den verbleibenden Fällen macht die Regel von de l'Hôpital weitere Aussagen.

4.7.1 Satz (Die Regel von de l'Hôpital). *Es seien $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $a < b \leq \infty$, so dass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ erfüllt ist. Es gelte*

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = \lim_{x\to b-0} g(x) = 0 \quad \text{(Typ I)}$$

oder

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = \pm\infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to b-0} g(x) = \pm\infty \quad \text{(Typ II)}.$$

Wenn der Grenzwert[3]

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

und es gilt

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Für den Beweis benötigen wir eine Anwendung des Satzes von Rolle 4.3.4:

4.7.2 Satz (Der zweite Mittelwertsatz). *Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktionen. Weiter gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$. Dann existiert eine Zahl $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Es gilt $g(a) \neq g(b)$. Andernfalls gäbe es nach dem Satz von Rolle 4.3.4 ein $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Das haben wir in der Voraussetzung ausgeschlossen. Wir definieren nun

$$\begin{array}{rcl} h\colon [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \big(g(x) - g(a)\big) \cdot \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \end{array}$$

Die Funktion h ist stetig und auf dem Intervall (a,b) differenzierbar. Sie erfüllt weiter $h(a) = h(b) = f(a)$. Es gibt nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Damit ist ξ die gesuchte Zahl. □

Beweis von Satz 4.7.1. **Typ I, $b \in \mathbb{R}$.** Wir definieren $f(b) := 0 =: g(b)$. Auf diese Weise setzen wir f und g stetig auf das Intervall $(a,b]$ fort. Nach dem Satz von Rolle 4.3.4 gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Satz 4.7.2 garantiert, dass wir zu jedem x_n ein

[3] Im Fall $b = \infty$ ist der Zusatz "-0" gegenstandslos.

$\xi_n \in (x_n, b)$ mit $f(x_n)/g(x_n) = f'(\xi_n)/g'(\xi_n)$ finden. Die Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert offenbar ebenfalls gegen b. Wir beobachten jetzt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus der Voraussetzung, dass der Grenzwert $\lim_{x\to b-0} f'(x)/g'(x)$ existiert.

Typ II, $b \in \mathbb{R}$. Zunächst bemerken wir, dass wir auf Grund der Annahme $\lim_{x\to b-0} g(x) = \infty$ bzw. $-\infty$ nach eventueller Vergrößerung von a voraussetzen können, dass $g(x) > 0$ bzw. $g(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt.

Wir untersuchen wieder eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $x_n \in (a, b)$, $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Seien

$$A := \lim_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$, so dass für $x \in (a, b)$ mit $|x - b| < \delta$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1}$$

gilt. Wir können ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass $|x_n - b| < \delta$ für alle $n \geq N$ gilt. Nach dem zweiten Mittelwertsatz gibt es für jedes $n \geq N$ ein Element $\xi_n \in (x_N, x_n)$ mit

$$\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)}.$$

Da $|\xi_n - b| \leq |x_n - b| < \delta$, $n \geq N$, gilt nach Gleichung (4.1)

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setzen wir $K_1 := -(A - \varepsilon/2) \cdot g(x_N) + f(x_N)$ und $K_2 := -(A + \varepsilon/2) \cdot g(x_N) + f(x_N)$, so lautet diese Ungleichung

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot g(x_n) + K_1 < f(x_n) < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot g(x_n) + K_2$$

bzw.

$$A - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K_1}{g(x_n)} < \frac{f(x_n)}{g(x_n)} < A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{K_2}{g(x_n)}, \quad n \geq N. \tag{4.2}$$

Da $\lim_{n\to\infty} |g(x_n)| = \infty$, können wir ein $N' \geq N$ wählen, so dass

$$\left| \frac{K_i}{g(x_n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2,\ n \geq N'.$$

Nach Gleichung (4.2) haben wir dann

$$A - \varepsilon < \frac{f(x_n)}{g(x_n)} < A + \varepsilon, \quad \text{d.h.} \quad \left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} - A \right| < \varepsilon, \quad n \geq N'.$$

Diese Überlegungen zeigen die Konvergenz der Folge $(f(x_n)/g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert A.

Typ I oder II, $b = \infty$. Hier dürfen wir sicherlich $a > 0$ voraussetzen. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \varphi\colon \left(-\frac{1}{a},0\right) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f\left(-\frac{1}{x}\right) \\ \psi\colon \left(-\frac{1}{a},0\right) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g\left(-\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Da $\psi'(x) = (1/x^2)\cdot g'(-1/x) \neq 0$ für $-1/a < x < 0$ gilt, können wir die Regel von de l'Hôpital anwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0-0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to 0-0}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x\to 0-0}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot f'\left(-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}\cdot g'\left(-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0-0}\frac{f'\left(-\frac{1}{x}\right)}{g'\left(-\frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Das hatten wir behauptet. □

4.7.3 Beispiel. Wir wollen

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

berechnen. Daher wählen wir $f(x) = \log(1 + 1/x)$ und $g(x) = 1/x$. Es gilt also

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \log(1) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x).$$

Wir haben $g'(x) = -1/x^2 < 0$, $x > 0$. Die Regel von de l'Hôpital ist also anwendbar. Nach der Kettenregel ist

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right), \quad x > 0.$$

Also gilt für $x > 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

Als Anwendung dieser Überlegungen geben wir einen neuen Beweis für:

4.7.4 Satz.

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Beweis. Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(1) = \lim_{x\to\infty}\exp\left(x\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Damit ist der Satz beweisen. □

4.7.5 Beispiel. Es ist

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$$

zu berechnen.

Für $x\in\mathbb{R}$ mit $\sin(x)\neq 0$ gilt

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)}.$$

Wir arbeiten also mit $f(x)=\sin(x)-x$ und $g(x)=x\cdot\sin(x)$. Offenbar liegt ein Problem von Typ I vor.

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)-1\\ g'(x) &= \sin(x)+x\cdot\cos(x). \end{aligned}$$

Wir haben immer noch

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=0=\lim_{x\to 0} g'(x).$$

Die zweiten Ableitungen ergeben

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin(x)\\ g''(x) &= \cos(x)+\cos(x)-x\cdot\sin(x). \end{aligned}$$

Damit

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{0}{2}=0.$$

(Die Leserin oder der Leser möge sich die Details, wie die Regel von de l'Hôpital hier verwendet wird, bitte genau überlegen.)

4.8 Differentiation von Potenzreihen

Wir haben einige der wichtigsten Funktionen – die Exponentialfunktion, Sinus und Kosinus – über Potenzreihen eingeführt. Jetzt wollen wir Methoden entwickeln, um die Differenzierbarkeit solcher Funktionen nachzuweisen und die Ableitung zu ermitteln. Da Potenzreihen spezielle Beispiele von Funktionenfolgen sind, werden wir das Hauptresultat in diesem Kontext beweisen.

4.8.1 Satz (Vertauschung von Differentiation und Grenzwertbildung)**.** *Es seien $a<b$ reelle Zahlen und $f_n\colon (a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ **differenzierbare** Funktionen, $n\in\mathbb{N}$. Die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ der Ableitungsfunktionen konvergiere gleichmäßig gegen die Funktion $g\colon (a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$. Ferner gebe es einen Punkt $x_0\in(a,b)$, so dass $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt:*

i) *Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf (a,b).*

ii) *Die Grenzfunktion $f\colon (a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist differenzierbar mit*

$$f'=g.$$

Beweis. i) Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ kann zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ gefunden werden, so dass gilt:

$$\forall m,n\geq N\forall x\in(a,b):\quad |f_m'(x)-f_n'(x)|<\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}. \tag{4.3}$$

Wegen der Konvergenz der Folge $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ können wir auch annehmen, dass

$$\forall m,n \geq N: \quad |f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Für $m,n \geq N$ und $x \in (a,b)$ wenden wir den Mittelwertsatz auf die Funktion

$$(f_m - f_n)_{|[x,x_0]} \quad \text{bzw.} \quad (f_m - f_n)_{|[x_0,x]}$$

an. Demnach gibt es ein $\xi \in (x,x_0)$ bzw. $\xi \in (x_0,x)$, so dass

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + \big(f_m'(\xi) - f_n'(\xi)\big)\cdot(x - x_0).$$

Dies führt zu der Abschätzung

$$\begin{array}{rcl} |f_m(x) - f_n(x)| & \leq & |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| \cdot |x - x_0| \\ & \overset{(4.3)\ \&\ (4.4)}{<} & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)} \cdot |x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{array}$$

Diese Abschätzung gilt für alle $x \in (a,b)$ und alle $m,n \geq N$.

Nach dem Cauchy-Kriterium konvergieren alle Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, so dass wir

$$\begin{array}{rccl} f\colon (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array}$$

bilden können.

Seien $m \geq N$ und $x \in (a,b)$. Wir haben

$$|f_m(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Diese Ungleichung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf (a,b).

ii) Es sei $x_1 \in (a,b)$. Wir wollen den Differenzenquotienten Δ_{f,x_1} untersuchen. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq N: \quad |f_n'(x_1) - g(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.5}$$

Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ dürfen wir auch

$$\forall m,n \geq N \forall \xi \in (a,b): \quad |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

voraussetzen.

Sei $x \in (a,b)$, $x \neq x_1$, Nach dem Mittelwertsatz gibt es eine Zahl $\xi \in (x_1,x)$ bzw. $\xi \in (x,x_1)$, für die

$$\big(f_m(x) - f_n(x)\big) - \big(f_m(x_1) - f_n(x_1)\big) = \big(f_m'(\xi) - f_n'(\xi)\big)\cdot(x - x_1)$$

gilt. Die obigen Abschätzungen zeigen daher

$$\forall m,n \geq N \forall x \in (a,b): \quad \big|\big(f_m(x) - f_n(x)\big) - \big(f_m(x_1) - f_n(x_1)\big)\big| \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot |x - x_1|.$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ führt zu

$$\forall n \geq N \forall x \in (a,b): \quad \big|\big(f(x) - f_n(x)\big) - \big(f(x_1) - f_n(x_1)\big)\big| \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot |x - x_1|. \tag{4.6}$$

Wir fixieren $n_0 \geq N$. Es existiert eine Zahl $\delta > 0$,[4] so dass

$$\forall x \in (a,b): \quad |x - x_1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_1)}{x - x_1} - f'_{n_0}(x_1) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir schließen

$$\forall x \in (a,b): \quad |x - x_1| < \delta \Rightarrow \left| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_1) - f'_{n_0}(x_1) \cdot (x - x_1) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot |x - x_1|. \quad (4.7)$$

Wählen wir $h \in (-\delta, \delta)$, so bekommen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{f,x_1}(h) - g(x_1) \right| &= \frac{1}{h} \cdot \left| f(x_1 + h) - f(x_1) - g(x_1) \cdot h \right| \\ &\leq \Big(\left| f(x_1 + h) - f(x_1) - \left(f_{n_0}(x_1 + h) - f_{n_0}(x_1) \right) \right| + \\ &\quad + \left| f_{n_0}(x_1 + h) - f_{n_0}(x_1) - f'_{n_0}(x_1) \cdot h \right| + \left| f'_{n_0}(x_1) \cdot h - g(x_1) \cdot h \right| \Big) \\ &\leq \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3} \cdot h + \frac{\varepsilon}{3} \cdot h + \frac{\varepsilon}{3} \cdot h \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hier haben wir Abschätzung (4.6), (4.7) bzw. (4.5) benutzt.

Es folgt

$$\lim_{h \to 0} \Delta_{f,x_1}(h) = g(x_1).$$

Damit haben wir die Differenzierbarkeit von f in x_1 und $f'(x_1) = g(x_1)$ nachgewiesen. □

4.8.2 Satz. *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot (x - x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

ebenfalls ρ.

Beweis. Sei ρ' der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot (x - x_0)^k$. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot (x - x_0)^k$ absolut konvergiert, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot (x - x_0)^{k+1}$ und nach dem Majorantenkriterium 2.10.1 auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \cdot (x - x_0)^{k+1}$. Daher gilt $\rho' \leq \rho$.

Schritt 1: Seien $q < 1$ und M reelle Zahlen. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot M \cdot q^{k+1}$$

konvergiert nach dem Quotientenkriterium 2.10.2.

Schritt 2: Seien $x_1 \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, $|x_1 - x_0| < r < \rho$ und $q := |x_1 - x_0|/r < 1$. Wir haben im Beweis von Satz 3.8.4 gesehen, dass ein $M' \in \mathbb{R}$, $M' > 0$, existiert, so dass

$$|a_n| \cdot |x_1 - x_0|^n < M' \cdot q^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit $M := M'/|x_1 - x_0|$ folgt

$$(n+1) \cdot |a_{n+1}| \cdot |x_1 - x_0|^n < (n+1) \cdot M \cdot q^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_k \cdot (x_1 - x_0)^k$ nach Schritt 1 und dem Majorantenkriterium 2.10.1 absolut. □

[4] Vgl. Beweis von Satz 3.4.8.

4.8.3 Folgerung. *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Dann ist*

$$\begin{aligned} f\colon (x_0-\rho, x_0+\rho) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k \end{aligned}$$

eine differenzierbare Funktion, und die Ableitung ist durch

$$\begin{aligned} f'\colon (x_0-\rho, x_0+\rho) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot (x-x_0)^k \end{aligned}$$

gegeben.

Es folgt, dass eine Potenzreihe unendlich oft differenzierbar ist.

Die Exponentialfunktion

4.8.4 Satz. *Die Exponentialfunktion*

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

ist differenzierbar, und es gilt

$$\exp' = \exp .$$

Die genannte Gleichung ist wiederum charakteristisch für die Exponentialfunktion. Genauer gesagt gilt:

4.8.5 Satz. *Es seien $c \in \mathbb{R}^*$ und $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so dass*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f'(x) = c \cdot f(x).$$

Dann gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = f(0) \cdot \exp(c \cdot x).$$

Beweis. Die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \cdot \exp(-c \cdot x) \end{aligned}$$

ist differenzierbar, und für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \cdot \exp(-c \cdot x) + f(x) \cdot (-c) \cdot \exp(-c \cdot x) \\ &= c \cdot f(x) \cdot \exp(-c \cdot x) - c \cdot f(x) \cdot \exp(-c \cdot x) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist g konstant. Es gibt somit eine Konstante $K \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) \cdot \exp(-c \cdot x) = K,$$

d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = K \cdot \exp(c \cdot x).$$

Weiter gilt

$$f(0) = K \cdot \exp(0) = K,$$

und unsere Aussage ist gezeigt. □

4.8.6 Satz. *Der natürliche Logarithmus ist differenzierbar, und es gilt*

$$\log'(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Beweis. Für jede reelle Zahl x gilt

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0.$$

Nach Satz 4.2.7 ist log differenzierbar, und für die Ableitung in $x \in \mathbb{R}_{>0}$ hat man

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp\big(\log(x)\big)} = \frac{1}{x}.$$

Dies ist unsere Behauptung. □

Sinus und Kosinus

4.8.7 Satz. *Die Funktionen* sin *und* cos *sind differenzierbar, und es gilt*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sin'(x) = \cos(x) \quad \textit{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Beweis. Die Ableitung des Sinus ist durch die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (2k+1) \cdot \frac{1}{(2k+1)!} \cdot x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

gegeben. Dies ist die Potenzreihe des Kosinus.

Die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot 2k \cdot \frac{1}{(2k)!} \cdot x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

definiert die Ableitung des Kosinus. Daraus liest man die Behauptung ab. □

Sinus und Kosinus sind somit unendlich oft differenzierbare Funktionen. Der Schlüssel zum Verständnis der trigonometrischen Funktionen sind die Additionstheoreme:

4.8.8 Satz (Die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus)**.** *Für reelle Zahlen x_1, x_2 gilt:*

$$\begin{aligned} \sin(x_1 + x_2) &= \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) + \cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \\ \cos(x_1 + x_2) &= \cos(x_1) \cdot \cos(x_2) - \sin(x_1) \cdot \sin(x_2). \end{aligned}$$

Beweis. Wir fixieren $a \in \mathbb{R}$ und definieren die (differenzierbaren) Funktionen

$$\begin{aligned} F_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x+a) - \sin(x)\cdot\cos(a) - \cos(x)\cdot\sin(a) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x+a) - \cos(x)\cdot\cos(a) + \sin(x)\cdot\sin(a). \end{aligned}$$

Wir haben unser Ziel erreicht, wenn wir zeigen können, dass F_1 und F_2 beide die Nullfunktion sind. Deshalb überprüfen wir, dass die Funktion $F_1^2+F_2^2$ konstant null ist. Aus den Ableitungsregeln (Abschnitt 4.2) und Satz 4.8.7 erhalten wir

$$\begin{aligned} F_1' &= \cos(x+a) - \cos(x)\cdot\cos(a) + \sin(x)\cdot\sin(a) = F_2 \\ F_2' &= -\sin(x+a) + \sin(x)\cdot\cos(a) + \cos(x)\cdot\sin(a) = -F_1 \end{aligned}$$

und

$$(F_1^2 + F_2^2)' = 2\cdot F_1'\cdot F_1 + 2\cdot F_2'\cdot F_2 = 2\cdot F_2\cdot F_1 - 2\cdot F_1\cdot F_2 = 0.$$

Nach Folgerung 4.3.7 ist $F_1^2 + F_2^2$ konstant. Aus $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$ folgt

$$F_1(0) = 0 = F_2(0),$$

so dass $F_1^2 + F_2^2$ die Nullfunktion ist. □

4.8.9 Bemerkung. Im Ausblick zu diesem Kapitel erläutern wie die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen als Anwendung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im **Komplexen**.

4.8.10 Folgerung. *Für jede reelle Zahl x gilt*

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Beweis. Wir wenden das zweite Additionstheorem auf $x_1 = x$ und $x_2 = -x$ an. Wegen $\cos(0) = 1$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$ folgt die Behauptung. □

4.8.11 Bemerkung. Nach der Folgerung liegt für jede reelle Zahl x der Punkt $(\cos(x), \sin(x))$ auf dem Einheitskreis (s. Abbildung 4.1). Die Übereinstimmung unserer Definition von Sinus und Kosinus mit derjenigen über Winkel ist also verifiziert, sobald man zeigen kann, dass das gelb markierte Bogenstück die Länge x hat. Die Techniken, die einem die Messung der Länge einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ gestatten, werden wir im Rahmen der Vorlesung „Analysis II" vorstellen.

Der nächste Satz bereitet die Definition der Kreiszahl π vor.

4.8.12 Satz. *Es gibt genau eine Zahl $x \in [0,2]$ mit*

$$\cos(x) = 0.$$

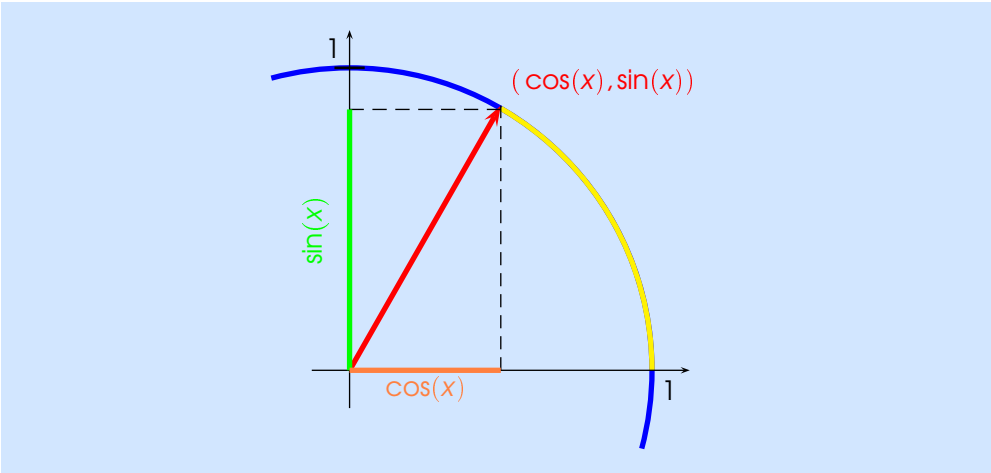


Abbildung 4.1: Sinus, Kosinus und der Einheitskreis

Beweis. Wir schreiben zunächst die Potenzreihe des Kosinus etwas um: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \pm \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\right) - \frac{x^6}{6!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8}\right) - \cdots \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2+4k}}{(2+4k)!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(3+4k)\cdot(4+4k)}\right).\end{aligned}$$

Für $x \in [0,2]$ sind alle Summanden der unendlichen Summe positiv, so dass sich die Abschätzung

$$\cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{12}\right)$$

ergibt. Insbesondere finden wir

$$\cos(2) < 1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Da $\cos(0) = 1$, muss es nach dem Zwischenwertsatz 3.5.2 im Intervall $[0,2]$ eine Nullstelle des Kosinus geben.

Wir schreiben weiter die Potenzreihe des Sinus um:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \\ &= \frac{x}{1!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{1+4k}}{(1+4k)!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(2+4k)\cdot(3+4k)}\right).\end{aligned}$$

Für $x \in [0,2]$ sind alle Summanden positiv. Also gilt $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ für $x \in [0,2]$. Nach Folgerung 4.3.8 iv) ist der Kosinus auf dem Intervall $[0,2]$ streng

monoton fallend und damit injektiv. Der Funktionswert 0 kann höchstens einmal angenommen werden.

Da wir bereits eine Nullstelle des Kosinus auf $[0,2]$ gefunden haben, ist die Aussage bewiesen. □

4.8.13 Definition. Die Zahl π ist definiert als diejenige reelle Zahl, für die

$$\frac{\pi}{2} \in [0,2] \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{gilt.}$$

4.8.14 Bemerkung. Da der Kosinus eine gerade Funktion ist, besitzt er auf dem offenen Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ keine Nullstelle. Weiter gilt $\cos(x) > 0$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, weil $\cos(0) = 1 > 0$.

Wegen $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist der Sinus auf dem **abgeschlossenen** Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend und damit umkehrbar. Damit ist Beispiel 3.3.15 vii) gerechtfertig.

Ebenso vergewissert man sich, dass der Kosinus auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist.

4.8.15 Satz. *Die trigonometrischen Funktionen* sin *und* cos *sind periodisch mit primitiver Periode* 2π.

Beweis. Im Beweis von Satz 4.8.12 haben wir $\cos(\pi/2) = 0$ und $\sin(\pi/2) > 0$ bewiesen. Die Identität

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

zeigt daher

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Des Weiteren ergibt die Anwendung der Additionstheoreme 4.8.8 für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(x) = \cos(x) \qquad (4.8) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(x) = -\sin(x). \end{aligned}$$

Daraus schließen wir

$$\sin(\pi + x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

und endlich

$$\sin(2\pi + x) = \sin\big(\pi + (\pi + x)\big) = -\sin(\pi + x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist 2π eine Periode des Sinus. Wegen

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \neq \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

ist π keine Periode des Sinus.

Sei nun $0 < h < 2\pi$ eine Periode des Sinus. Wegen (4.8) ist h auch eine Periode des Kosinus, und wir haben

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = -\sin(h).$$

Wir überlassen es dem Leser zu überprüfen, dass aus $0 < h < 2\pi$ und $\sin(h) = 0$ die Gleichung $h = \pi$ folgt. Da π keine Periode ist, haben wir einen Widerspruch konstruiert, so dass 2π die primitive Periode sein muss. □

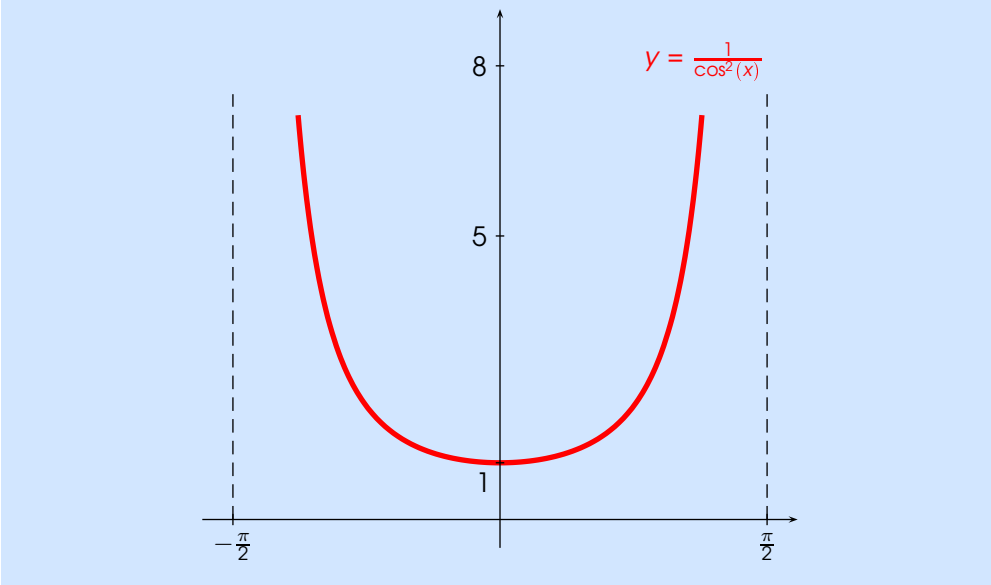
Nachdem wir die Ableitungen der trigonometrsichen Funktionen zur Verfügung haben, diskutieren wir nun einige weitere Beispiele, die die Ableitungsregeln aus Abschnitt 4.2 illustrieren. Diese Beispiele werden im folgenden Abschnitt zu einem interessanten Gegenbeispiel ausgebaut.

4.8.16 Beispiel. i) Der Leser möge sich mit den obigen Argumenten vergewissern, dass die Nullstellen des Kosinus genau die Zahlen der Form $(2k+1)\cdot\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$, sind. Wir betrachten die Tangensfunktion

$$\begin{aligned}\tan\colon\ \mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R},\\ x &\longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.\end{aligned}$$

Diese Funktion ist überall differenzierbar, und nach der Quotientenregel (Satz 4.2.1 iv)` gilt

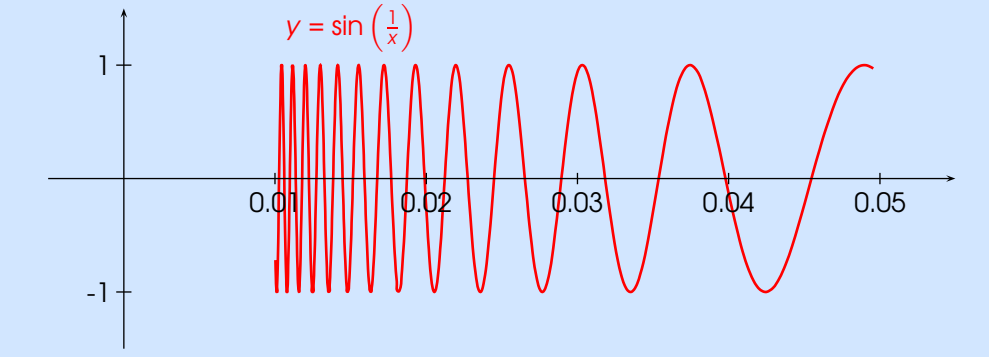
$$\tan'(x)=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\overset{\text{Folgerung 4.8.10}}{=}\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

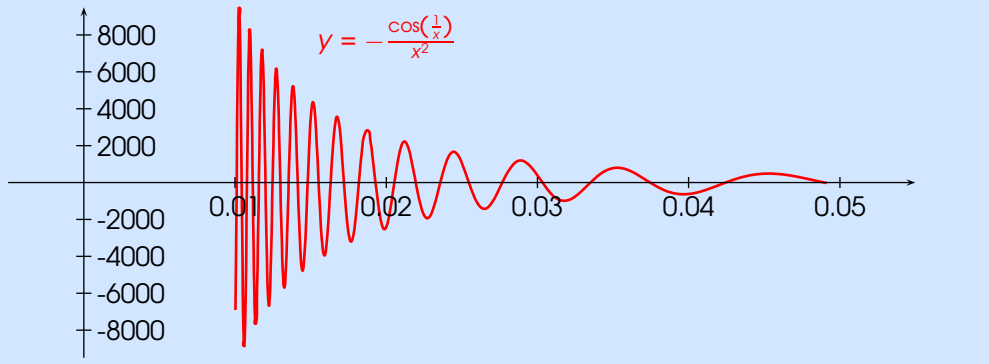


ii) Es sei $h\colon\ \mathbb{R}_{>0}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto\sin(1/x)$. Wir wenden die Kettenregel 4.2.4 an.

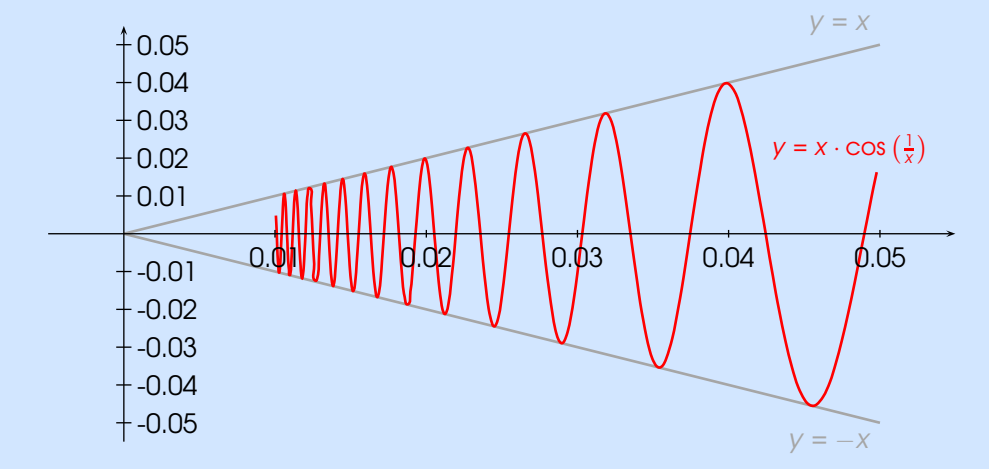
Innere Funktion:	$f(x)=\frac{1}{x}$
Äußere Funktion:	$g(y)=\sin(y)$
Innere Ableitung:	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
Äußere Ableitung:	$g'(y)=\cos(y)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow h'(x) &= \big(g\circ f\big)'(x)\\ &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$





iii) Es sei $h\colon\ \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x \cdot \cos(1/x)$. Die Funktion $x \cdot \cos(1/x)$ lässt sich durch 0 in den Ursprung hinein stetig fortsetzen.



Nach der Produktregel (Satz 4.2.1 iii) gilt

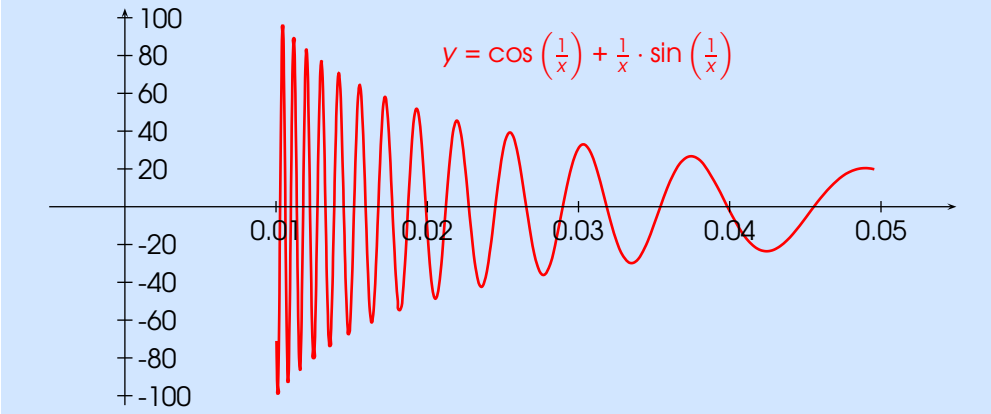
$$h'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot k'(x), \quad k(x) := \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wie in ii) findet man

$$k'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Also

$$h'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$



4.9 Zwei Gegenbeispiele

Man untersucht eine Theorie nicht nur durch das Beweisen von Aussagen, sondern auch durch Gegenbeispiele, die zeigen, dass gewisse Schlussfolgerungen nicht möglich sind. Besonders in der Theorie der Reihen haben wir viele Gegenbeispiele betrachtet. Hier wollen wir zwei markante Gegenbeispiele zum Verhältnis der Begriffe „Stetigkeit" und „Differenzierbarkeit" vorstellen.

Zunächst wollen wir die Ableitung einer differenzierbaren Funktion etwas besser verstehen. Wir beginnen mit:

4.9.1 Satz. *Es seien D ein offenes, möglicherweise unbeschränktes Intervall und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann erfüllt f' den Zwischenwertsatz, d.h. zu $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und $f'(x_1) \neq f'(x_2)$ und einer reellen Zahl c mit $f'(x_1) < c < f'(x_2)$ bzw. $f'(x_2) < c < f'(x_1)$ gibt es einen Punkt $\xi \in (x_1, x_2)$ mit*

$$f'(\xi) = c.$$

Beweis. **Schritt 1.** Es seien $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und $f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$. Aus der Tatsache

$$\lim_{h\to 0} \Delta_{f,x_1}(h) = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1) < 0$$

folgern wir, dass ein $\varepsilon_1 > 0$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in (x_1, x_1+\varepsilon_1): \quad f(x_1) > f(x) \tag{4.9}$$

existiert.

Entsprechend folgern wir aus $f'(x_2) > 0$, dass ein $\varepsilon_2 > 0$ existiert, so dass

$$\forall x \in (x_2-\varepsilon_2, x_2): \quad f(x) < f(x_2). \tag{4.10}$$

Die Funktion $f_{|[x_1,x_2]}$ ist stetig (Lemma 4.1.3). Damit nimmt sie in einem Punkt ξ des Intervalls $[x_1, x_2]$ ein (globales) Minimum an. Auf Grund von (4.9) und (4.10) muss $\xi \in (x_1, x_2)$ gelten. Nach Satz 4.3.2 gilt

$$f'(\xi) = 0.$$

Schritt 2. Wir können nun den Satz beweisen. Wir betrachten dazu $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und $f'(x_1) < f'(x_2)$ sowie $c \in (f'(x_1), f'(x_2))$. (Den Fall, in dem $f'(x_1) > f'(x_2)$ gilt, führt man durch Betrachtung von $-f$ auf diese Situation zurück.)

Wir bilden

$$\begin{aligned} g\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - c \cdot x. \end{aligned}$$

Die Funktion g ist differenzierbar, und unsere Annahmen besagen

$$g'(x_1) = f'(x_1) - c < 0 \quad \text{und} \quad g'(x_2) > 0.$$

Nach Schritt 1 existiert eine Stelle $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - c.$$

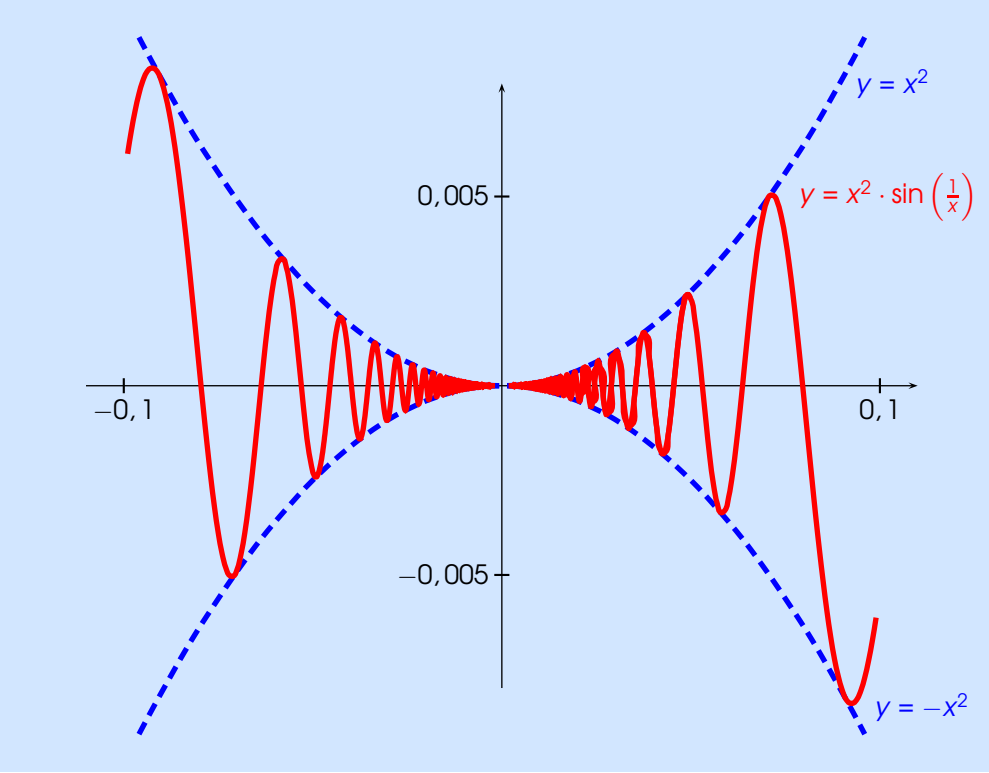
Diese Gleichung zeigt unsere Behauptung. □

Wegen dieses Satzes kann die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht beliebig ausfallen. Sie kann z.B. keine Sprungstellen haben. Die Vorzeichenfunktion sign (s. Beispiel 3.1.3 vi) tritt also nicht als Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf.

Dennoch kann man **nicht** schließen, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion stetig ist:

4.9.2 Beispiel. Wir definieren

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \end{aligned}.$$



Diese Funktion ist überall differenzierbar: Für $x \neq 0$ ist das klar. Weiter gilt

$$\Delta_{f,0}(h) = \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right), \quad h \in \mathbb{R}^*.$$

Da $|\sin(1/h)| \leq 1$, $h \in \mathbb{R}^*$, folgt

$$\lim_{h\to 0} \Delta_{f,0}(h) = 0.$$

Die Ableitung der Funktion f ist

$$\begin{array}{rcl} f' \colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2 \cdot x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases} . \end{array}$$

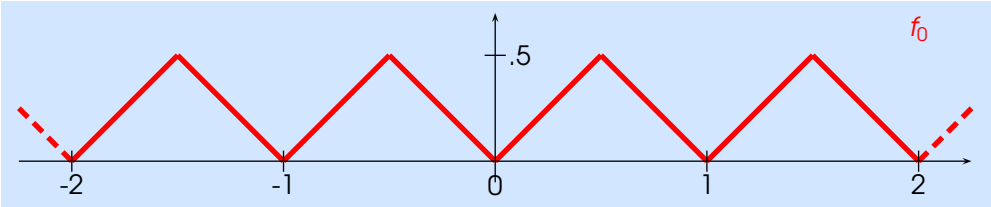
Sie ist in 0 nicht stetig. (Genauer gesagt ist $x \longmapsto 2 \cdot x \cdot \sin(1/x)$ nach 0 stetig fortsetzbar, $x \longmapsto \cos(1/x)$ aber nicht.)

Wir haben gezeigt, dass eine differenzierbare Funktion stetig ist. Es liegt nahe, die Beziehungen zwischen stetigen und differenzierbaren Funktionen genauer zu betrachten. Leider gibt es keine andere als die bereits genannte:

4.9.3 Beispiel. Es sei

$$\begin{array}{rcl} f_0 \colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-k|,\ x \in \left[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Die Funktion f_0 ist stetig und periodisch mit primitiver Periode 1.



Weiter definieren wir, für $n \geq 1$,

$$\begin{array}{rcl} f_n \colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{4^n} \cdot f_0(4^n \cdot x). \end{array}$$

Diese Funktion ist stetig und periodisch mit primitiver Periode $1/4^n$. Wir halten fest:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} : \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n}. \tag{4.11}$$

Nun definieren wir

$$\begin{array}{rcl} f \colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x). \end{array}$$

Gleichung (4.11) zeigt, dass diese Definition möglich ist und dass die Funktionenfolge

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gleichmäßig gegen f konvergiert. Folglich ist die Funktion f stetig (Satz 3.7.9).

Wir behaupten, dass f nirgends differenzierbar ist. Dazu sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir werden eine Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen angeben, für die

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{f,x_0}(h_n)$$

nicht existiert.

Es seien

$$I_n^- := \left[x_0 - \frac{1}{4^{n+1}}, x_0\right] \quad \text{und} \quad I_n^+ := \left[x_0, x_0 + \frac{1}{4^{n+1}}\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Funktion f_n ist zumindest auf einem dieser beiden Intervalle linear (mit Steigung -1 bzw. $+1$), $n \in \mathbb{N}$. Wenn f_n auf I_n^- bzw. I_n^+ linear ist, dann gilt dies auch für $f_0, \ldots, f_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $\varepsilon_n := -1$, wenn f_n auf I_n^- linear ist, und $\varepsilon_n := 1$ andernfalls.

Die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$h_n = \varepsilon_n \cdot \frac{1}{4^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem zuvor Gesagten haben wir folgendes Verhalten:

$$\left|\frac{f_k(x_0 + h_n) - f_k(x_0)}{h_n}\right| = \begin{cases} 1, & \text{falls } k \in \{0, \ldots, n\} \\ 0, & \text{falls } k > n \end{cases}.$$

Deshalb ist $D_n := \Delta_{f,x_0}(h_n) \in \mathbb{Z}$, und D_n ist gerade, wenn n ungerade ist, und ungerade, wenn n gerade ist, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\Delta_{f,x_0}(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ kann damit nicht konvergieren.

4.9.4 Bemerkung. Dieses Beispiel ist typisch für die Entwicklung der Mathematik: Zunächst suchen wir nach einem geeigneten Formalismus, in dem wir einen bestimmten Sachverhalt sauber behandeln können. Im obigen Beispiel ist das der Formalismus der Funktionenfolgen, mit dem wir z.B. die Exponentialfunktion definiert haben. Anschließend stellt man fest, dass man mit diesem Formalismus viele neue Beispiele konstruieren kann, die unerwartete und interessante Eigenschaften haben können. Oben war das die Funktion f.

4.10 Iterationsverfahren

Für die Praxis ist folgendes Problem relevant: Gegeben seien $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $y_0 \in W(f)$. Man bestimme

$$f^{-1}(y_0) := \{\, x \in D \mid f(x) = y_0 \,\}.$$

Betrachten wir statt der Funktion f die Funktion $g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) - y_0$, so erhalten wir das äquivalente Problem, die Nullstellen der Funktion $g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen.

Man wird nur selten eine exakte Antwort finden. Daher ist es wichtig, *Näherungsverfahren* für die Bestimmung von Nullstellen zu entwickeln.

Dazu benutzt man sogenannte *Iterationsverfahren*, die von folgender Bauart sind:

- Man fixiert eine gewisse *Iterationsvorschrift* $y = I(x)$.
- Man wählt einen Startwert x_0 und setzt

$$x_1 := I(x_0)$$

- und allgemein

$$x_{n+1} := I(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man hofft, dass die so gewonnene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und dass der Grenzwert ξ die gewünschte Eigenschaft hat, z.B. $f(\xi) = y_0$.

Fixpunkte

Wir betrachten eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $f([a,b]) \subset [a,b]$. Die Iterationsvorschrift sei einfach $I(x) := f(x)$.

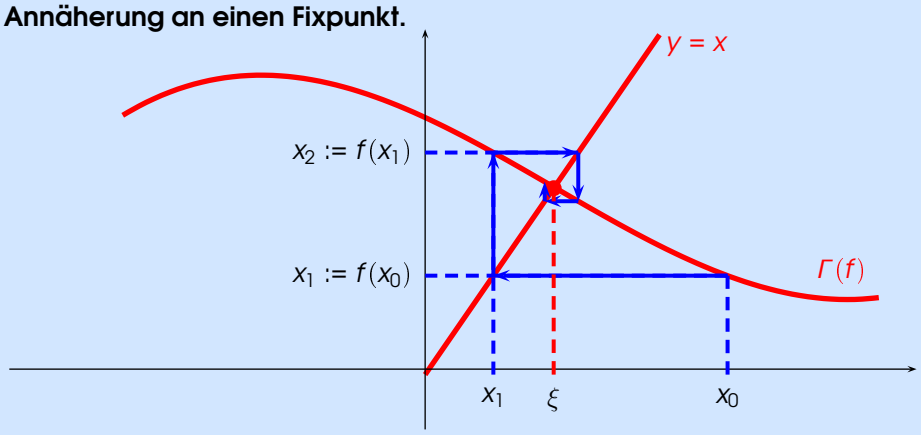
Wenn wir nun einen Startwert x_0 haben, so dass die durch obige Iterationsvorschrift gewonnene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\xi \in [a,b]$ konvergiert, dann gilt

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{f \text{ stetig}}{=} f(\xi).$$

Man sagt, ξ ist ein *Fixpunkt von f*.

Die Fixpunkte von f sind gerade die x-Werte der Punkte, an denen der Graph $\Gamma(f)$ von f die Gerade $\{\, y = x \,\}$ schneidet.

Annäherung an einen Fixpunkt.



4.10.1 Satz. *Zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen sei f in (a,b) differenzierbar, und es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit $|f'(x)| \le q < 1$ für alle $x \in (a,b)$. Dann gibt es genau einen Fixpunkt $\xi \in [a,b]$ von f, und für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen ξ. Es gilt die Abschätzung*

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q} \cdot |x_n - x_{n-1}| \le \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar: Nehmen wir zwei Fixpunkte η und ξ, dann gilt nach dem Mittelwertsatz (genauer Folgerung 4.3.6)

$$|\eta - \xi| = |f(\eta) - f(\xi)| \le q \cdot |\eta - \xi|.$$

Wegen $q < 1$ folgt $|\eta - \xi| = 0$, also $\eta = \xi$.

Nach dem Mittelwertsatz gilt für je zwei Punkte $x, y \in [a,b]$

$$|f(x) - f(y)| \le q \cdot |x - y|.$$

Insbesondere gilt

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le q \cdot |x_n - x_{n-1}|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt

$$|x_{n+1} - x_n| \le q^n \cdot |x_1 - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)$ nach dem Majorantenkriterium 2.10.1 und daher auch die Folge

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ihr Grenzwert ξ liegt in $[a, b]$, da dieses Intervall abgeschlossen ist (vgl. Definition 3.4.1). Wie zuvor gesehen ist ξ ein Fixpunkt.

Schließlich gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|\xi - x_n| &= \left|\left(x_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)\right) - \left(x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\right)\right| = \\
&= \left|\sum_{k=n}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n+k} - x_{n+k-1})\right| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot |x_n - x_{n-1}| = \\
&= \frac{q}{1-q} \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|.
\end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Abschätzung. □

4.10.2 Bemerkung. i) Das Verfahren eignet sich auch für die Bestimmung von Nullstellen, indem man es auf die Funktion $y = f(x) + x$ anwendet. Dann muss allerdings $|f'(x) + 1| \leq q < 1$ für alle $x \in [a, b]$ gelten.

ii) Der obige Satz wird in der Analysis II zum Banachschen Fixpunktsatz verallgemeinert. Mit ihm kann man sogar Aussagen zur Lösbarkeit von Differentialgleichungen machen.

iii) Die Fehlerabschätzung zeigt, dass die Folge desto schneller konvergiert, je kleiner q ist. Mit der Fehlerabschätzung kann man z.B. ermitteln, wieviele Iterationen man durchführen muss, um ein Ergebnis zu erhalten, das den gesuchten Wert mit vorgegebener Genauigkeit approximiert.

iv) Im Allgemeinen wird man auch die Funktionswerte $f(x_n)$ nur näherungsweise berechnen können. Dies muss man bei der Betrachtung der Genauigkeit der Approximation in Betracht ziehen.

Nehmen wir an, wir machen Fehler, die kleiner als $(1 - q) \cdot 10^{-10}$ sind, d.h. statt mit der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, arbeiten wir mit einer Folge $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in der sich $\widetilde{x}_{n+1}$ im Betrag vom Funktionswert von $\widetilde{x}_n$ um einen Wert $<(1 - q) \cdot 10^{-10}$ unterscheidet, $n \in \mathbb{N}$. Der Mittelwertsatz garantiert, dass wir uns dabei nicht immer weiter von der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entfernen. Dies zeigen wir induktiv. Gilt

$$|\widetilde{x}_n - x_n| < 10^{-10},$$

dann folgt

$$\begin{aligned}
|\widetilde{x}_{n+1} - x_{n+1}| &= |\widetilde{x}_{n+1} - f(\widetilde{x}_n) + f(\widetilde{x}_n) - f(x_n)| \leq |\widetilde{x}_{n+1} - f(\widetilde{x}_n)| + |f(\widetilde{x}_n) - f(x_n)| \leq \\
&\leq (1 - q) \cdot 10^{-10} + q \cdot |\widetilde{x}_n - x_n| <(1 - q) \cdot 10^{-10} + q \cdot 10^{-10} = \\
&= 10^{-10}.
\end{aligned}$$

Gilt nun in einem Schritt $\widetilde{x}_{n+1} = \widetilde{x}_n$, dann können wir also schließen

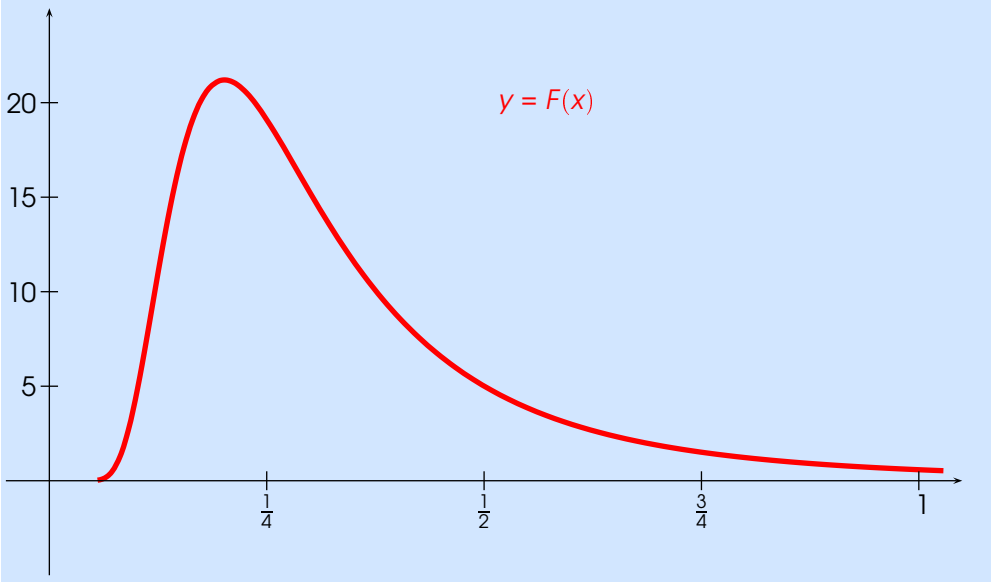
$$\begin{aligned}
|\xi - x_n| &\leq \frac{q}{1-q} \cdot |x_{n+1} - x_n| = \frac{q}{1-q} \cdot |x_{n+1} - \widetilde{x}_{n+1} + \widetilde{x}_{n+1} - \widetilde{x}_n + \widetilde{x}_n - x_n| \leq \\
&\leq \frac{q}{1-q} \cdot |x_{n+1} - \widetilde{x}_{n+1}| + |\widetilde{x}_n - x_n| < \frac{1}{1-q} \cdot 10^{-10}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$|\xi - \widetilde{x}_n| \le |\xi - x_n| + |x_n - \widetilde{x}_n| < \frac{1}{1-q} \cdot 10^{-10} + 10^{-10} = \frac{2-q}{1-q} \cdot 10^{-10}. \qquad (4.12)$$

4.10.3 Beispiel. Man bestimme das Maximum der Funktion[5]

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^5 \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)}. \end{aligned}$$



Es gilt

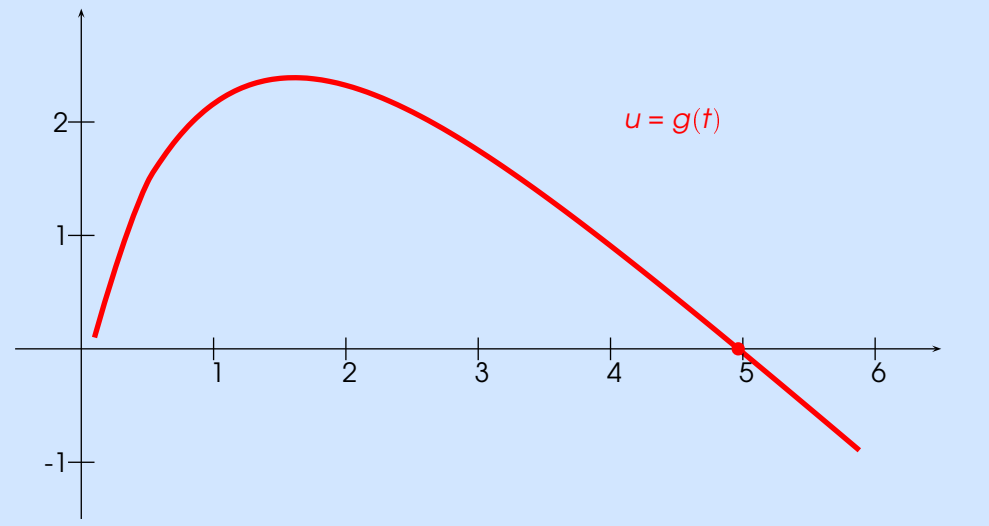
$$F'(x) = -\frac{5x \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^7 \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)^2}, \quad x > 0.$$

Also haben wir für $x > 0$

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 &\iff 5x \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) - \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ &\iff 5x \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\iff 5 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Wir setzen $t := 1/x$ und $f(t) := 5 \cdot (1 - \exp(-t))$. Wir suchen also einen Wert $\tau > 0$ mit $f(\tau) = \tau$. Es sei $g(t) := f(t) - t$, $t \in \mathbb{R}$.

[5] Die Bedeutung dieser Funktion in der Physik wird im Buch von Forster (4) erklärt.



Zunächst bemerken wir

$$g'(t) = f'(t) - 1 = 5 \cdot \exp(-t) - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir sehen

$$t \in (0, \log(5)) \quad \Rightarrow \quad g'(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad g \text{ smw auf } [0, \log(5)]$$

$$t \in (\log(5), \infty) \quad \Rightarrow \quad g'(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad g \text{ smf auf } (\log(5), \infty).$$

Da zudem $g(0) = 0$, gilt $g(x) > 0$ für alle $x \in (0, \log(5)]$. Die Funktion g besitzt daher höchstens eine Nullstelle in $(\log(5), \infty)$.

Nun berechnen wir

$$g(4) \approx 0,908 > 0; \quad g(5) \approx -0,033 < 0.$$

Die Funktion g besitzt daher nach dem Zwischenwertsatz 3.5.2 in $[4,5]$ genau eine Nullstelle. Da $\exp(-t)$ smf ist, folgt für alle $t \in [4, \infty)$

$$f'(t) \leq f'(4) = 5 \cdot \exp(-4) = 0,09157 \cdots =: q$$

und

$$\frac{q}{1-q} < 0,101.$$

Wir führen nun das Verfahren für $t_0 = 5$ durch und rechnen in jedem Schritt auf 6 Dezimalstellen genau.

n	1	2	3	4	5
$\widetilde{t}_n$	4,966 310	4,965 155	4,965 115	4,965 114	4,965 114

Nun unterscheiden sich $\widetilde{t}_4$ und $\widetilde{t}_5$ nicht mehr. Nach (4.12) gilt

$$|\tau - \widetilde{t}_5| < (2-q)/(1-q) \cdot 10^{-6} < 10^{-5},$$

so dass auf jeden Fall

$$\tau = 4,9651 \pm 10^{-5}.$$

Für $\xi = 1/\tau$ gilt

$$\xi = 0,2014 \pm 10^{-5},$$

d.h. der Wert von ξ ist bis auf vier Nachkommastellen genau.

Jetzt muss noch überprüft werden, dass an der Stelle ξ ein Maximum vorliegt. Dies folgt aus den Tatsachen

$$F(x) > 0,\ x > 0, \quad \lim_{x\to 0+0} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 0.$$

Newtons Tangentenverfahren

Dieses Verfahren geht auf Sir Isaac Newton zurück und dient der Bestimmung von Nullstellen.

Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die Iterationsvorschrift sei die folgende: Für einen Wert $x^\star$ ist $l(x^\star)$ gegeben als der x-Wert des Schnittpunkts der Tangente an $\Gamma(f)$ in $(x^\star, f(x^\star))$ mit der x-Achse. Die Gleichung der obigen Tangente ist

$$y = f'(x^\star)\cdot(x - x^\star) + f(x^\star).$$

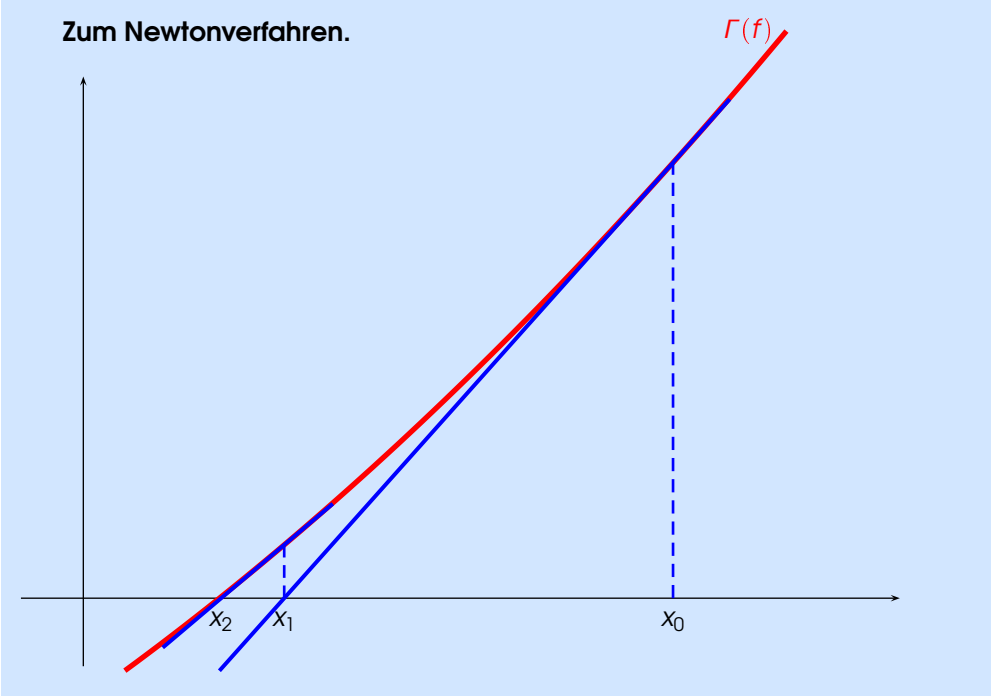
Damit ist $l(x^\star)$ durch

$$0 = f'(x^\star)\cdot(l(x^\star) - x^\star) + f(x^\star)$$

bzw.

$$l(x^\star) = x^\star - \frac{f(x^\star)}{f'(x^\star)}$$

gegeben.



Um zu verstehen, warum diese Iterationsvorschrift sinnvoll ist, gehen wir einmal von der extremen Situation $f(x) = cx + d$, $c \neq 0$, aus. Dann stimmt die Tangente an jeden Punkt $x^\star$ mit dem Funktionsgraphen überein, und im ersten Schritt des Newton-Verfahrens finden wir die Nullstelle.

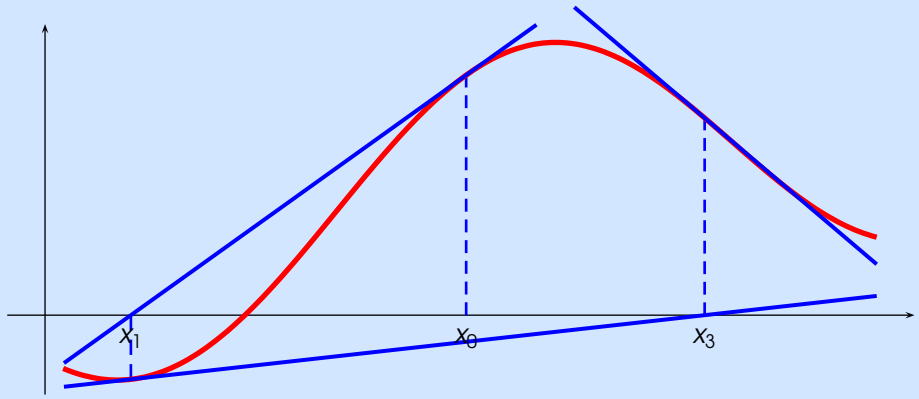
Damit ist intuitiv klar, dass das Newton-Verfahren gut geeignet ist, falls

- der Startwert bereits eine gute Näherung für die Nullstelle ist, i.e. $|f(\text{Startwert})|$ klein ist,

- die Kurve in dem Bereich zwischen Startwert und Nullstelle besonders steil ist, i.e. $|f'|$ groß ist,
- die Kurve in dem Bereich zwischen Startwert und Nullstelle wenig gekrümmt ist, i.e. $|f''|$ klein ist.

Versagen diese Bedingungen, dann macht man sich auf der anderen Seite klar, dass das Verfahren nicht zu konvergieren braucht.

Ein divergentes Newtonverfahren.



4.10.4 Satz. *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, in (a,b) zweimal differenzierbare **konvexe** Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt:*

i) *Es gibt genau ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.*

ii) *Für jeden Startwert $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) \geq 0$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

monoton fallend gegen ξ.[6]

iii) *Falls $f'(\xi) \geq C > 0$ und $f''(x) \leq K$ für alle $x \in (\xi, b)$ gilt, dann folgt*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C} \cdot |x_n - x_{n-1}|^2, \quad n \geq 1.$$

Beweis. i) Nach Satz 4.4.2, i), gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a.b)$. Daher ist $f'\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ nach Folgerung 4.3.8, i), monoton wachsend.

Weiter sei $q \in [a,b]$ so gewählt, dass

$$f(x) \geq f(q), \quad x \in [a,b].$$

Die Existenz einer solchen Zahl wird von Satz 3.5.3 garantiert. Man beachte, dass $f(q) \leq f(a) < 0$. Falls $q \in (a,b)$, so gilt $f'(q) = 0$ (Satz 4.3.2). Nach dem zuvor Gesagten gilt $f'(x) \leq 0$ für $x \in (a,q)$, so dass f auf $[a,q]$ monoton fallend ist und wegen $f(a) < 0$ dort keine Nullstelle haben kann. (Man beachte, dass $a = q$ möglich ist.)

Nach dem schon zitierten Zwischenwertsatz existiert wegen der Voraussetzung $f(a) < 0 < f(b)$ eine Nullstelle ξ von f. Auf Grund der obigen Diskussion

[6] Gegenstand des Satzes ist auch, dass wir diese Folge überhaupt bilden können, d.h., dass in jedem Schritt $f'(x_n) \neq 0$ und $x_{n+1} \in (a,b)$ gilt.

muss $\xi \in (q,b)$ gelten. Gäbe es zwei verschiedene Nullstellen $\xi_1 < \xi_2$, so existierte ein $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ mit $f'(\eta) = 0$ (Satz von Rolle 4.3.4). Auf der anderen Seite existiert nach dem Mittelwertsatz 4.3.5 ein $\tau \in (q, \xi_1)$ mit

$$f'(\tau) = \frac{f(\xi_1) - f(q)}{\xi_1 - q} = \frac{-f(q)}{\xi_1 - q} > 0. \tag{4.13}$$

Die Ungleichungen $\tau < \xi_1 < \eta$ und $f'(\tau) > 0 = f'(\eta)$ widersprechen dem monotonen Wachstum von f'. Unsere Annahme zweier verschiedener Nullstellen war also absurd.

ii) Wir halten fest, dass $f'(\xi) > 0$. (Mit Gleichung (4.13) für $\xi_1 := \xi$ finden wir ein $\tau < \xi$ mit $f'(\tau) > 0$. Ferner ist f' monoton wachsend.)

Wir beweisen zunächst $x_n \in (a,b)$, $f(x_n) \geq 0$ und $x_n \geq \xi$, $n \in \mathbb{N}$, durch Induktion über n. Für $n = 0$ gilt $x_0 \in (a,b)$ und $f(x_0) \geq 0$ nach Wahl von x_0. Wie im Beweis von Teil i) erkannt wurde, muss dann $x_0 > q$ gelten. Wäre $x_0 \in (q, \xi)$, so gäbe es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von f auf $[q, x_0]$. Das haben wir in i) ausgeschlossen.

Im Induktionsschritt stellen wir zunächst fest, dass $x_n \geq \xi$ die Ungleichung $f'(x_n) \geq f'(\xi) > 0$ impliziert, so dass $f(x_n)/f'(x_n) \geq 0$ und

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n. \tag{4.14}$$

Die Funktion[7]

$$\begin{aligned} \varphi\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - f(x_n) - f'(x_n)\cdot(x - x_n) \end{aligned}$$

ist stetig und auf (a,b) differenzierbar, und es gilt

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_n), \quad x \in (a,b).$$

Insbesondere folgt $\varphi'(x) \leq 0$ für $a < x \leq x_n$, so dass φ auf $[a, x_n]$ monoton fallend ist. Da $\varphi(x_n) = 0$ und $a < x_n$ folgt $\varphi(a) \geq 0$, so dass

$$0 > f(a) \geq f(x_n) + f'(x_n)\cdot(a - x_n).$$

Mit der Iterationsvorschrift wird dies zu $a < x_{n+1}$, d.h. $x_{n+1} \in (a, x_n) \subset (a,b)$. Ebenso folgt aus $x_{n+1} \leq x_n$, dass $\varphi(x_{n+1}) \geq 0$ und deshalb

$$f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + f'(x_n)\cdot(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Die letzte Gleichung ist eine Folge der Iterationsvorschrift (4.14). Wie im Induktionsanfang schließen wir von $f(x_{n+1}) \geq 0$ auf $x_{n+1} \geq \xi$.

Wegen (4.14) ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Da sie durch ξ nach unten beschränkt ist, konvergiert sie nach Satz 2.3.2. Sei $\xi^\star$ ihr Grenzwert. Da f und f' stetig sind (Lemma 4.1.3), erfüllt $\xi^\star$ die Gleichung

$$\xi^\star = \xi^\star - \frac{f(\xi^\star)}{f'(\xi^\star)}.$$

Nun gilt aber $\xi^\star \geq \xi$ und daher auch $f'(\xi^\star) \geq f'(\xi) > 0$. Es folgt $f(\xi^\star) = 0$, d.h. $\xi^\star = \xi$.

[7] Die Funktion φ vergleicht die Funktion f mit der linearen Funktion, die die Tangente von $\Gamma(f)$ an $(x_n, f(x_n))$ beschreibt. Gemäß unserer Anschauung sollte die Tangente unterhalb von $\Gamma(f)$ liegen. Mit Hilfe von φ lässt sich das formal begründen.

iii) Die erste Ungleichung ergibt sich folgendermaßen:

$$|x_{n+1} - x_n| = x_n - x_{n+1} \leq x_n - \xi = |\xi - x_n|.$$

Aus $x \geq \xi$ folgt wie üblich $f'(x) \geq f'(\xi) \geq C$. Der Mittelwertsatz impliziert $f(x) = f(x) - f(\xi) \geq C \cdot (x - \xi)$, $x \in (\xi, b)$. Wir sehen

$$|\xi - x_n| = x_n - \xi \leq \frac{f(x_n)}{C}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Seien $n \geq 1$ und[8]

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon (a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1}) \cdot (x - x_{n-1}) - \dfrac{K}{2} \cdot (x - x_{n-1})^2. \end{array}$$

Diese Funktion ist zweimal differenzierbar, und für $x \in (a,b)$ hat man

$$\begin{array}{rcl} \psi'(x) & = & f'(x) - f'(x_{n-1}) - K \cdot (x - x_{n-1}) \\ \psi''(x) & = & f''(x) - K. \end{array}$$

Aus der Voraussetzung folgt $\psi''(x) \leq 0$ für $x \in (\xi, b)$. Damit ist ψ' auf dem Intervall $[\xi, b)$ monoton fallend. Da $\psi'(x_{n-1}) = 0$ gilt $\psi'(x) \geq 0$ für $x \in [\xi, x_{n-1}]$, so dass ψ auf $[\xi, x_{n-1}]$ monoton wachsend ist. Nun gilt aber auch $\psi(x_{n-1}) = 0$. Daraus schließen wir $\psi(x_n) \leq 0$. Diese Abschätzung lässt sich wie folgt schreiben:

$$f(x_n) \leq f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1}) + \frac{K}{2} \cdot (x_n - x_{n-1})^2 = \frac{K}{2} \cdot (x_n - x_{n-1})^2.$$

Einsetzen in (4.15) liefert die behauptete Ungleichung. □

4.10.5 Bemerkung. i) Für $K/2C \leq 1$ sagt einem die Fehlerabschätzung, dass x_n mit ξ bis auf $2k$ Dezimalstellen übereinstimmt, falls x_n und x_{n-1} bis auf k Dezimalstellen übereinstimmen. Ferner stimmen dann x_{n+1} und x_n bis auf $2k$ Dezimalstellen überein und somit x_{n+1} und ξ bis auf $4k$ Dezimalstellen. Die Zahl der gültigen Stellen verdoppelt sich somit in jedem Iterationsschritt.

ii) Man kann das Verfahren zur Ermittlung von Fixpunkten auf

$$F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

anwenden, um das Newton-Verfahren als Spezialfall zu erhalten. Dies führt auf eine andere Konvergenzbedingung, die unsere oben aufgelisteten Konvergenzkriterien elegant zusammenfasst (s. Aufgabe 6.16.1).

iii) Das im Satz formulierte Kriterium ist nur hinreichend für die Konvergenz. In Aufgabe 6.15.3 lernen Sie ein Beispiel für eine einmal differenzierbare Funktion mit linear konvergentem Newton-Verfahren kennen.

4.10.6 Beispiel (Wurzelberechnungen)*.* Es seien $k \geq 2$ eine natürliche Zahl, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k - a. \end{array}$$

[8] Die Funktion ψ erlaubt, den Vergleich zwischen der Funktion f und der linearen Funktion, die die Tangente von $\Gamma(f)$ an $(x_n, f(x_n))$ beschreibt, in Termen der Krümmung abzuschätzen. Die Wahl des quadratischen Faktors wird durch die folgenden Rechnungen erklärt.

Die Nullstelle von f ist also gerade die k-te Wurzel von a (vgl. Hilfssatz 2.10.5). Es gilt

$$f'(x) = k \cdot x^{k-1} \quad \text{und} \quad f''(x) = (k-1) \cdot k \cdot x^{k-2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0, \quad x > 0.$$

Die Funktion f ist konvex (Satz 4.4.2 i), und deshalb ist das Newtonverfahren anwendbar. Die Iterationsvorschrift lautet

$$\begin{aligned} I(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} &= x - \frac{x^k - a}{k \cdot x^{k-1}} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \left((k-1) \cdot x + \frac{a}{x^{k-1}} \right). \end{aligned}$$

Nach dem Satz konvergiert dieses Verfahren für jeden Startwert x_0 mit $x_0^k \geq a$ gegen die k-te Wurzel aus a. Insbesondere erkennen wir das Verfahren aus Abschnitt 2.5 wieder.

Ausblick. Die Exponentialfunktion im Komplexen

Erinnerung (Die komplexen Zahlen (15), §40)**.**

- Im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen existiert $i := \sqrt{-1}$.

- Jede komplexe Zahl z lässt sich in eindeutiger Weise in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben. Die Zahl $\mathrm{Re}(z) := x$ heißt der *Realteil von* z und die Zahl $\mathrm{Im}(z) := y$ der *Imaginärteil*.

- **Addition:** Es seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ zwei komplexe Zahlen. Dann ist ihre Summe

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

- **Multiplikation:** Es seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ zwei komplexe Zahlen. Ihr Produkt ist die Zahl

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

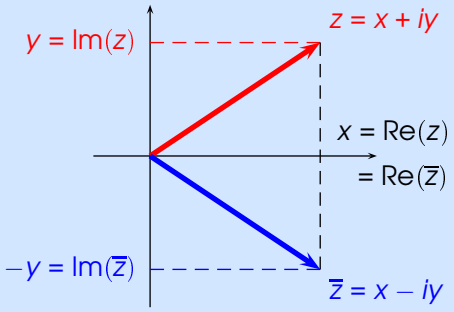
- Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Dann ist die *konjugiert komplexe Zahl* gegeben als

$$\overline{z} = x - iy.$$

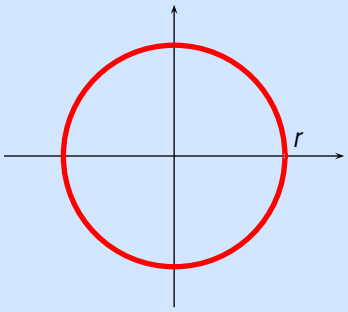
- Der *Betrag einer komplexen Zahl* $z = x + iy$ ist die nicht negative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die konjugiert komplexe Zahl



Die komplexen Zahlen vom Betrag r



$$\{ z = x + iy \mid |z| = r \}$$
$$= \{ z = x + iy \mid x^2 + y^2 = r^2 \}$$

4.10.7 Definition. Man kann nun *Folgen* und *Reihen von komplexen Zahlen* einführen. Begriffe wie *Cauchy-Folge* und *konvergente Folge* werden genau wie für reelle Zahlen definiert, indem man den gewöhnlichen Absolutbetrag durch den komplexen Betrag ersetzt. Z.B. sagt man, dass eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen die komplexe Zahl c konvergiert*, wenn es für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass für alle $n \geq N$

$$|c_n - c| < \varepsilon$$

gilt.

4.10.8 Satz. i) *Eine Folge $(c_n = a_n + ib_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergieren. Im Fall der Konvergenz gilt*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n + i \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

ii) *Im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen konvergiert jede Cauchy-Folge.*
iii) *Für jede komplexe Zahl z konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Der Wert dieser Reihe wird mit $\exp(z)$ bezeichnet.

Für jede Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ kann man Funktionen $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachten.

4.10.9 Definition. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *stetig im Punkt $p \in D$*, wenn für jede Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

- $c_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und
- $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = p$

die Folge $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(p)$ gilt. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $p \in D$ stetig ist.

4.10.10 Definition. Die *komplexe Exponentialfunktion* ist die Funktion

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \exp(z). \end{aligned}$$

4.10.11 Eigenschaften. i) *Die komplexe Exponentialfunktion ist auf ganz* $\mathbb{C}$ *stetig.*

ii) *(Funktionalgleichung) Für je zwei komplexe Zahlen* z_1 *und* z_2 *gilt*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2).$$

iii) *Für jede komplexe Zahl* z *gilt*

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

Auf Grund der Funktionalgleichung gilt für jede komplexe Zahl $z = x + iy$

$$\exp(z) = \exp(x) \cdot \exp(iy).$$

Um die komplexe Exponentialfunktion zu analysieren, muss man also die reelle Exponentialfunktion sowie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto \exp(ix)$ verstehen. Das Letztere wird im Wesentlichen durch folgendes Resultat ermöglicht.

4.10.12 Satz (Eulersche Formel)**.** *Für jede reelle Zahl* x *gilt:*

i) $|\exp(ix)| = 1$,

ii) $\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$.

Beweis. i) Es gilt

$$\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$$

und demnach

$$\exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1.$$

ii) Einsetzen in die Exponentialreihe liefert

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \cdot x^k}{k!}.$$

Wegen $i^2 = -1$ gilt $i^{2k} = (-1)^k$ und $i^{2k+1} = i \cdot (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Damit sehen wir

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^k}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Auf der rechten Seite steht offenbar $\cos(x) + i \cdot \sin(x)$. □

4.10.13 Folgerung. i) *Für jede reelle Zahl* x *gilt*

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

ii) *(Additionstheoreme) Für zwei reelle Zahlen* x *und* y *gilt*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y). \end{aligned}$$

Beweis. i) Dieser Teil folgt aus

$$1 = |\exp(ix)| = |\cos(x) + i \cdot \sin(x)| = \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)}.$$

ii) Es gilt

$$\exp\big(i(x+y)\big) = \exp(ix) \cdot \exp(iy),$$

i.e.

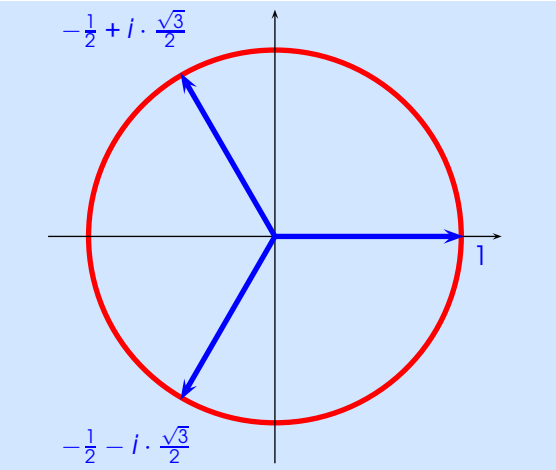
$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) &= \big(\cos(x) + i \cdot \sin(x)\big) \cdot \big(\cos(y) + i \cdot \sin(y)\big) \\ &= \big(\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)\big) + \\ &\quad + i \cdot \big(\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)\big). \end{aligned}$$

Da zwei komplexe Zahlen genau dann übereinstimmen, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil gleich sind, ist die Behauptung gezeigt. □

4.10.14 Beispiel (Einheitswurzeln). Die komplexen Lösungen der Gleichung $x^n - 1$ sind durch die Zahlen

$$\exp\left(j \cdot \frac{2\pi i}{n}\right), \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

gegeben.



$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

Das Polynom $x^2 + x + 1$

hat die komplexen Lösungen

$-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot i\right)$

und

$-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot i\right)$.

Kapitel 5

Integralrechnung

5.1 Das Riemannsche Integral

Wir betrachten eine **beschränkte** Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h. der Wertebereich $W(f)$ ist beschränkt. Es gibt also $s \leq S$ mit $s \leq f(x) \leq S$ für alle $x \in [a,b]$.

Das Integral

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

soll mit dem orientierten Flächeninhalt des vom Graphen $\Gamma(f)$ und der x-Achse eingeschlossenen Gebietes übereinstimmen. Dabei werden die Teile, die über der x-Achse liegen, positiv gezählt und diejenigen unter der x-Achse negativ (s. Abbildung 5.1). Bevor wir beginnen, Berechnungsmethoden für Integrale vorzustellen, werden wir das Integral formal einführen und hinreichende Kriterien für die Integrierbarkeit von Funktionen beweisen.

Dazu betrachtet man zunächst Funktionen, für die das Integral offensichtlich definiert ist. Dies sind sogenannte *Treppenfunktionen*.

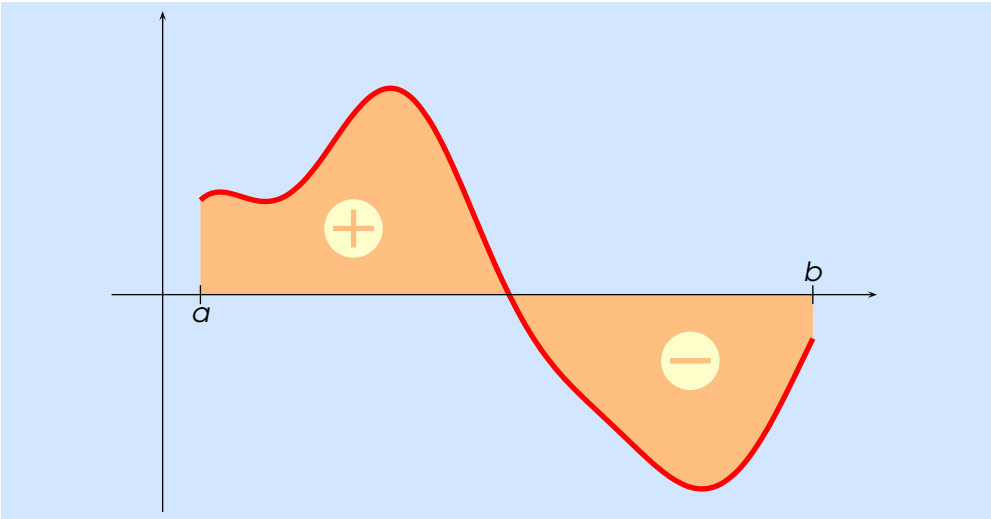
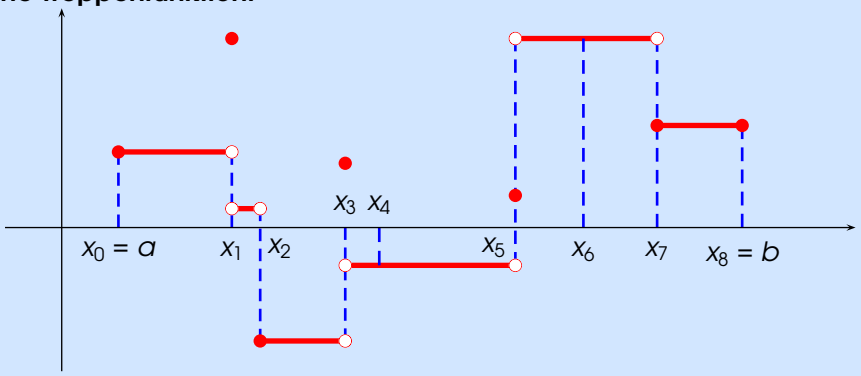


Abbildung 5.1: Das Integral als orientierter Flächeninhalt

5.1.1 Definition. Eine Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ gibt, so dass $f_{|(x_{i-1},x_i)}$ konstant ist für $i = 1,\ldots,n$.*

Eine Treppenfunktion.



5.1.2 Lemma. *Es seien $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, und $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ und $a = t_0 < \cdots < t_m = b$ seien zwei Unterteilungen des Intervalls $[a,b]$, so dass*

$$\begin{aligned} f(x) &= c_i \quad \text{für alle } x \in (x_{i-1},x_i),\ i = 1,\ldots,n, \\ f(x) &= d_j \quad \text{für alle } x \in (t_{j-1},t_j),\ j = 1,\ldots,m. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m} d_j \cdot (t_j - t_{j-1}).$$

Beweis. **Schritt 1.** Wir nehmen an, dass es zu jedem $i \in \{0,\ldots,n\}$ ein $j \in \{0,\ldots,m\}$ mit $x_i = t_j$ gibt. Dann können wir $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 0,\ldots,n$, mit $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_n = m$ und

$$x_{i-1} = t_{k_{i-1}} < t_{k_{i-1}+1} < \cdots < t_{k_i-1} < t_{k_i} = x_i, \quad i = 1,\ldots,n,$$

finden. Man beachte, dass $f(x) = c_i$ für $x \in (t_{j-1},t_j)$, $j = k_{i-1}+1,\ldots,k_i$, und

$$\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} d_j \cdot (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} c_i \cdot (t_j - t_{j-1}) = c_i \cdot (t_{k_i} - t_{k_{i-1}}) = c_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Daher gilt

$$\sum_{j=1}^{m} d_j \cdot (t_j - t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} d_j \cdot (t_j - t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Schritt 2. Wir können eine Unterteilung $a = s_0 < \cdots < s_l = b$ finden, so dass es zu jedem $i \in \{0,\ldots,n\}$ bzw. zu jedem $j \in \{0,\ldots,m\}$ ein $k \in \{0,\ldots,l\}$ mit $s_k = x_i$ bzw. $s_k = t_j$ gibt. Jetzt können wir mit Schritt 1 schließen. □

5.1.3 Definition. Es seien $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, und $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ sei eine Unterteilung mit

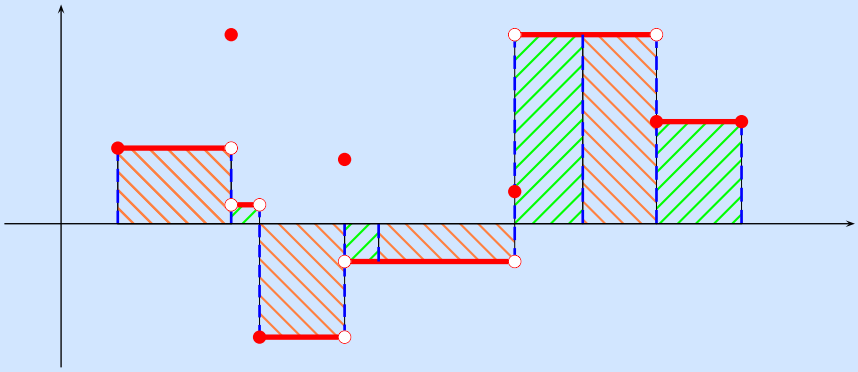
$$f(x) = c_i \quad \text{für alle } x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Dann definiert man

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

(Nach dem letzten Lemma ist dies wohldefiniert.)

Das Integral einer Treppenfunktion.
Die Flächen der farbig schraffierten Rechtecke werden – mit dem entsprechenden Vorzeichen – aufaddiert.



5.1.4 Definition. Es seien $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Wir schreiben

$$f \leq g,$$

wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.
Falls f konstant mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a,b]$ ist, dann schreiben wir auch

$$c \leq g.$$

Analog schreiben wir

$$f \leq c,$$

wenn g konstant mit Funktionswert c ist.

5.1.5 Lemma. *Es seien $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$.*
i) (Faktorregel) *Die Funktion $\lambda \cdot f$ ist eine Treppenfunktion, und es gilt*

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

ii) (Summenregel) *Die Funktion $f+g$ ist eine Treppenfunktion, und man hat*

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

iii) (Monotonie) *Aus $f \leq g$ folgt*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis. Teil i) ist offensichtlich. Für ii) und iii) seien $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ und $a = t_0 < \cdots < t_m = b$ zwei Unterteilungen des Intervalls $[a,b]$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= c_i \quad \text{für alle } x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1,\ldots,n, \\ g(x) &= d_j \quad \text{für alle } x \in (t_{j-1}, t_j),\ j = 1,\ldots,m. \end{aligned}$$

Weiter wählen wir eine Unterteilung $a = s_0 < \cdots < s_l = b$, so dass es zu jedem $i \in \{0,\ldots,n\}$ bzw. zu jedem $j \in \{0,\ldots,m\}$ ein $k \in \{0,\ldots,l\}$ mit $s_k = x_i$ bzw. $s_k = t_j$ gibt. Unter Beachtung von Lemma 5.1.2 dürfen wir von vornherein annehmen, dass $n = m$ und $x_i = t_i$, $i = 1,\ldots,n$. Dann gilt offenbar

$$(f+g)(x) = c_i + d_i$$

bzw.

$$c_i = f(x) \leq g(x) = d_i \quad \text{für alle } x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1,\ldots,n,$$

und die Behauptungen sind einfach zu verifizieren. □

Nun sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wieder eine beschränkte Funktion. Man wähle Zahlen s und S, so dass

$$s \leq f(x) \leq S$$

für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Für jede Treppenfunktion $g \leq f$ gilt nach dem Lemma

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq S\cdot(b-a).$$

Ebenso folgt für jede Treppenfunktion $h \geq f$

$$s\cdot(b-a) \leq \int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

Dies zeigt, dass die folgende Definition sinnvoll ist.

5.1.6 Definition. Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

i) Das *Oberintegral von f* ist definiert als

$$\overline{\int_a^b}\, f(x)\mathrm{d}x := \inf\left\{ \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \,\middle|\, f \leq h \text{ Treppenfunktion} \right\}.$$

ii) Das *Unterintegral von f* ist definiert als

$$\underline{\int_a^b}\, f(x)\mathrm{d}x := \sup\left\{ \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \,\middle|\, g \leq f \text{ Treppenfunktion} \right\}.$$

iii) Die Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, falls

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x =: \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

gilt.

5.1.7 Bemerkung. Aus den Definitionen folgt unmittelbar

$$\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x.$$

5.1.8 Beispiel. Für $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 0$ für $x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ und $x \longmapsto 1$ andernfalls, gilt

$$\int_{\overline{0}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0; \quad \int_{0}^{\overline{1}} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Die Funktion f ist also nicht integrierbar.

Die wichtigsten Beispiele für integrierbare Funktionen liefert der folgende Satz.

5.1.9 Satz. i) *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f integrierbar.*
ii) *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine monotone (d.h. monoton wachsende oder monoton fallende) Funktion. Dann ist f integrierbar.*

Bevor wir mit dem Beweis des Satzes beginnen, formulieren wir eine einfache Charakterisierung von Integrierbarkeit.

5.1.10 Lemma. *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und*

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon$$

gibt.

Beweis. Die Funktion f sei integrierbar. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Supremums gibt es eine Treppenfunktion $\varphi \leq f$ mit

$$\int_{\star a}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\star a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Ebenso gibt es eine Treppenfunktion $f \leq \psi$ mit

$$\int_a^{\star b} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^{\star b} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit

$$\int_{\star a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\star b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

ergeben diese Ungleichungen

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Das angegebene Kriterium sei erfüllt. Wir wählen $\varepsilon > 0$. Es gibt Treppenfunktionen $\varphi, \psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \le \varepsilon.$$

Es folgt

$$\varepsilon \ge \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^{\star b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\star a}^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0.$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, müssen Ober- und Unterintegral von f übereinstimmen. □

Beweis von Satz 5.1.9. Teil i). Zunächst folgt aus Satz 3.5.3, dass f beschränkt ist. Wir zeigen zunächst die folgende Aussage:

Behauptung 1. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt*

$$\forall x, y \in [a,b]: \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$[1]

Falls die angegebene Bedingung falsch ist, existieren $\varepsilon > 0$ und Folgen $(x_n)_{n\ge 1}$ und $(y_n)_{n\ge 1}$ in $[a,b]$, so dass

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon, \quad n \ge 1.$$

Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß 2.3.9 gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei

$$p := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b].$$

Zu $\eta > 0$ finden wir ein $K > 0$, so dass

$$|x_{n_k} - p| < \frac{\eta}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\eta}{2}, \quad k \ge K.$$

Es folgt

$$|y_{n_k} - p| \le |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - p| < \frac{1}{n_k} + \frac{\eta}{2} < \eta, \quad k \ge K,$$

so dass auch die Folge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen p konvergiert.

Mit der Stetigkeit von f schließen wir

$$0 = |f(p) - f(p)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|.$$

Diese Gleichung widerspricht allerdings der Tatsache

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon.$$

Behauptung 1 ist nun gezeigt. √

[1] Man sagt, dass f *gleichmäßig stetig* ist.

Behauptung 2. *Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\varphi, \psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt*
- $\varphi \le f \le \psi$,
- $0 \le \psi(x) - \varphi(x) \le \varepsilon$, $x \in [a,b]$.

Diese Behauptung lässt sich wie folgt überprüfen: Sei $\delta > 0$ eine reelle Zahl, für die gilt:

$$\forall x, y \in [a,b]: \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\frac{b-a}{n} < \delta$$

und setzen

$$x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Seien weiter

$$c_i := f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad d_i := f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nun definieren wir

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(a), & \text{falls } x = a \\ c_i, & \text{falls } x \in (x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, n \end{cases} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(a), & \text{falls } x = a \\ d_i, & \text{falls } x \in (x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, n. \end{cases} \end{array}$$

Sei $x \in [a,b]$. Wir haben $\varphi(a) = f(a)$. Für $x \neq a$ gibt es genau einen Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in (x_{i-1}, x_i]$. Nach Wahl von n gilt

$$f(x) - f(x_i) \ge -\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{d.h.} \quad f(x) \ge f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x).$$

Damit ist die Ungleichung $\varphi \le f$ nachgewiesen. Ebenso zeigt man $f \le \psi$. Die Abschätzung $\psi(x) - \varphi(x) \le \varepsilon$, $x \in [a,b]$, ist trivial. $\surd$

Wir verifizieren nun das Kriterium aus Lemma 5.1.10. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen zu $\varepsilon/(b-a)$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wie in Behauptung 2. Da wir

$$\psi - \frac{\varepsilon}{b-a} \le \varphi$$

haben, folgt nach Lemma 5.1.5 iii)

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) \le \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x,$$

d.h.

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \le \varepsilon.$$

Teil ii). Wir betrachten den Fall, in dem f monoton wachsend ist. Dann gilt $W(f) \subset [f(a), f(b)]$, und f ist beschränkt.

Wir wenden abermals Lemma 5.1.10 an. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir eine natürliche Zahl n mit

$$\frac{(b-a)\cdot\big(f(b)-f(a)\big)}{n} \leq \varepsilon.$$

Wir erklären die Unterteilung $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ durch

$$x_i := a + i\cdot\frac{b-a}{n}, \quad i = 0,\ldots,n,$$

und führen die Treppenfunktionen

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x_{i-1}), & \text{falls } x \in [x_{i-1},x_i),\ i = 1,\ldots,n \\ f(b), & \text{falls } x = b \end{cases} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x_i), & \text{falls } x \in [x_{i-1},x_i),\ i = 1,\ldots,n \\ f(b), & \text{falls } x = b \end{cases} \end{array}$$

ein. Es gilt $\varphi \leq f \leq \psi$, weil f monoton wachsend ist. Ferner berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^n f(x_i) - \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \frac{b-a}{n}\cdot\big(f(b)-f(a)\big) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wie zuvor folgt jetzt die Behauptung. □

5.1.11 Definition. Es seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

i) Es sei $[a,b] \subset D$ ein Intervall, so dass $f_{|[a,b]}$ integrierbar ist. Dann schreiben wir

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{statt} \quad \int_a^b f_{|[a,b]}(x)\mathrm{d}x$$

und

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

ii) Für $a \in D$ setzt man

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0.$$

5.1.12 Satz (Eigenschaften des Integrals I)**.** *Es seien $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in (a,b)$. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn die beiden Funktionen $f_{|[a,c]}$ und $f_{|[c,b]}$ integrierbar sind, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis. **Schritt 1.** Es sei $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Wir wählen reelle Zahlen $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, so dass reelle Zahlen $d_1, \ldots, d_n$ mit

$$f(x) = d_i, \quad x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1, \ldots, n,$$

existieren. Wir dürfen annehmen, dass es einen Index $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$c = x_{i_0}$$

gibt. Es ist offensichtlich, dass $\varphi_{|[a,c]}$ bzw. $\varphi_{|[c,b]}$ eine Treppenfunktion auf $[a,c]$ bzw. $[c,b]$ ist. Es gilt nun

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n} d_i\cdot(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{i_0} d_i\cdot(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=i_0+1}^{n} d_i\cdot(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^c \varphi_{|[a,c]}\mathrm{d}x + \int_c^b \varphi_{|[c,b]}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Der Satz stimmt also für Treppenfunktionen.

Schritt 2. Wir nehmen an, dass f intergrierbar ist. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 5.1.10 können wir Treppenfunktionen $\varphi, \psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \le \varepsilon$$

finden. Wir folgern

$$\begin{aligned}\varepsilon \quad &\ge \quad \int_a^b \big(\psi(x) - \varphi(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Schritt 1}}{=} \quad \int_a^c \psi(x)\mathrm{d}x + \int_c^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^c \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_c^b \varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \quad \underbrace{\int_a^c \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^c \varphi(x)\mathrm{d}x}_{=:B} + \underbrace{\int_c^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_c^b \varphi(x)\mathrm{d}x}_{=:A}.\end{aligned}$$

Wegen $A \ge 0$ und $B \ge 0$ impliziert diese Ungleichung $A \le \varepsilon$ und $B \le \varepsilon$. Da $\varphi_{|[a,c]}$ und $\varphi_{|[a,c]}$ Treppenfunktionen mit $\varphi_{|[a,c]} \le f_{|[a,c]} \le \psi_{|[a,c]}$ und

$$\int_a^c \psi_{|[a,c]}(x)\mathrm{d}x - \int_a^c \varphi_{|[a,c]}(x)\mathrm{d}x = B \le \varepsilon$$

sind zeigt Lemma 5.1.10, dass $f_{|[a,c]}$ integrierbar ist. Ebenso schließt man, dass $f_{|[c,b]}$ integrierbar ist.

Schritt 3. Wir nehmen an, dass $f_{|[a,c]}$ und $f_{|[c,b]}$ intergrierbar sind. Mit Lemma 5.1.10 weisen wir die Integrierbarkeit von f nach.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt Treppenfunktionen $\varphi_\mathrm{l}, \psi_\mathrm{l}\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi_\mathrm{r}, \psi_\mathrm{r}\colon [c,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $\varphi_\mathrm{l} \le f_{|[a,c]} \le \psi_\mathrm{l}$, $\varphi_\mathrm{r} \le f_{|[c,b]} \le \psi_\mathrm{r}$,

$$\int_a^c \big(\psi_l(x) - \varphi_l(x)\big)\mathrm{d}x \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \int_c^b \big(\psi_r(x) - \varphi_r(x)\big)\mathrm{d}x \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir definieren weiter

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \varphi_l(x), & x \in [a,c) \\ \varphi_r(x), & x \in [c,b] \end{cases} \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \psi_l(x), & x \in [a,c) \\ \psi_r(x), & x \in [c,b] \end{cases} \end{array}.$$

Diese beiden Funktionen sind Treppenfunktionen mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_a^c \varphi_l(x)\mathrm{d}x + \int_c^b \varphi_r(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\star a}^b f(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^{\star b} f(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x = \int_a^c \psi_l(x)\mathrm{d}x + \int_c^b \psi_r(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Unsere Definitionen wurden so getroffen, dass aus dieser Ungleichung

$$\int_a^{\star b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\star a}^b f(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon$$

folgt. Diese Abschätzung gilt für jedes $\varepsilon > 0$, so dass Ober- und Unterintegral von f gleich sind und f integrierbar ist.

Aus unseren Argumenten leitet man leicht die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

ab. □

5.1.13 Satz (Eigenschaften des Integrals II)**.**
i) (Faktorregel). *Es seien $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Funktion $\lambda \cdot f$ integrierbar mit*

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

ii) (Summenregel). *Es seien $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $f + g$ integrierbar mit*

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

iii) (Monotonie). *Es seien $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen mit $f \leq g$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis. Teil i). Dies folgt leicht aus der Definition des Integrals und Lemma 5.1.5 i).

Teil ii). Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt Treppenfunktionen $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varrho\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \le f \le \psi$, $\varrho \le g \le \sigma$,

$$\int_a^b \big(\psi(x) - \varphi(x)\big)\mathrm{d}x \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \int_a^b \big(\sigma(x) - \rho(x)\big)\mathrm{d}x \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Lemma 5.1.5 ii) sind $\varphi+\varrho$ und $\psi+\sigma$ Treppenfunktionen mit $\varphi+\varrho \le \psi+\sigma$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \sigma(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} &\le \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \varrho(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \big(\varphi(x) + \varrho(x)\big)\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\star a}^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x \\
&\le \int_a^{\star b} \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x \\
&\le \int_a^b \big(\psi(x) + \sigma(x)\big)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \sigma(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt somit

$$0 \le \int_a^{\star b} \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x - \int_{\star a}^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x \le \varepsilon,$$

so dass

$$\int_a^{\star b} \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_{\star a}^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x$$

gelten muss und $f+g$ integrierbar ist. Unser Argument liefert auch die behauptete Gleichheit der Integrale.

Teil iii). Es seien $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit $\varphi \le f \le g \le \psi$. Nach Lemma 5.1.5 iii) gilt

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x.$$

Wir schließen

$$\int_{\star a}^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^{\star b} g(x)\mathrm{d}x.$$

Da f und g integrierbar sind, bedeutet diese Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

5.1.14 Definition. Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren

$$\begin{aligned} f_+\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \max\{0, f(x)\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_-\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \max\{0, -f(x)\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.1.1. Es gilt

$$f = f_+ - f_- \quad \text{und} \quad |f| = f_+ + f_-.$$

5.1.15 Satz. i) *Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann sind auch die Funktionen f_+ und f_- integrierbar.*

ii) *Es seien $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist die Funktion $|f|^p$ integrierbar.*

iii) *Es seien $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $f \cdot g$ integrierbar.*

5.1.16 Bemerkung. I.A.

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\mathrm{d}x \neq \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right).$$

Beweis von Satz 5.1.15. Teil i). Es seien $\varphi, \psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \big(\psi(x) - \varphi(x)\big)\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Man überprüft, dass auch $\varphi_\pm$ und $\psi_\pm$ Treppenfunktionen sind und $\varphi_- \geq f_- \geq \psi_-$ und $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b \big(\psi_+(x) - \varphi_+(x)\big)\mathrm{d}x &\leq \int_a^b \big(\varphi_-(x) - \psi_-(x)\big)\mathrm{d}x + \int_a^b \big(\psi_+(x) - \varphi_+(x)\big)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \big(\psi(x) - \varphi(x)\big)\mathrm{d}x \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

und wir schließen mit den üblichen Argumenten, dass f_+ integrierbar ist. Analog folgt, dass f_- integrierbar ist.

Teil ii). Nach Teil i) und Satz 5.1.13 ii) ist $|f| = f_+ - f_-$ integrierbar. Wir können f durch $|f|$ ersetzen und dürfen deshalb $f \geq 0$ annehmen.

Sei $M \in \mathbb{R}^*$. Wenn die Aussage für $(1/M) \cdot f$ gilt, dann impliziert Satz 5.1.13 i), dass sie auch für f gilt. Wir wählen

$$m := \max\{ f(x) \mid x \in [a,b] \} \quad \text{und} \quad M := \max\{1, m\}.$$

Dann haben wir $(1/M) \cdot f \leq 1$. Insgesamt können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \leq f \leq 1$ voraussetzen.

Wir betrachten die Funktion $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^p$. Für $0 \le x_1 \le x_2 \le 1$ gibt es nach dem Mittelwertsatz 4.3.5 ein $\xi \in (0,1)$ mit

$$x_2^p - x_1^p = g'(\xi)\cdot(x_2 - x_1) = p \cdot \xi^{p-1}\cdot(x_2 - x_1) \le p\cdot(x_2 - x_1). \tag{5.1}$$

Es gibt Treppenfunktionen $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\widetilde{\varphi} \le f \le \widetilde{\psi}$ und

$$\widetilde{\psi}(x) - \widetilde{\varphi}(x) \le \frac{\varepsilon}{p\cdot(b-a)}, \quad x \in [a,b].$$

Wir definieren $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \max\{0, \widetilde{\varphi}(x)\}$, und $\psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \min\{1, \widetilde{\psi}(x)\}$. Für diese Funktionen gilt $0 \le \varphi \le f \le \psi \le 1$ und

$$\psi(x) - \varphi(x) \le \frac{\varepsilon}{p\cdot(b-a)}, \quad x \in [a,b].$$

Die Funktionen φ^p und ψ^p sind Treppenfunktionen, und wir haben $\varphi^p \le |f|^p \le \psi^p$. Wegen (5.1) gilt

$$0 \le \int_a^b \big(\psi^p(x) - \varphi^p(x)\big)\mathrm{d}x \le p \cdot \int_a^b \big(\psi(x) - \varphi(x)\big)\mathrm{d}x \le \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass $|f|^p$ integrierbar ist.

Teil iii). Dieser Teil folgt aus Teil ii), der Tatsache

$$f \cdot g = \frac{1}{4} \cdot \big((f+g)^2 - (f-g)^2\big) = \frac{1}{2} \cdot \big(|f+g|^2 - |f-g|^2\big)$$

und Satz 5.1.13. □

5.1.17 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Gegeben seien die* ***stetigen*** *Funktionen*

$$f, \varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Es gelte zudem $\varphi \ge 0$*. Dann gibt es eine Zahl* $\xi \in [a,b]$*, so dass*

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Für $\varphi = 1$ *lautet dieses Ergebnis also*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Beweis. Es seien

$$\begin{aligned} m &:= \min W(f) \\ M &:= \max W(f). \end{aligned}$$

Wegen der Monotonieeigenschaft des Integrals gilt somit

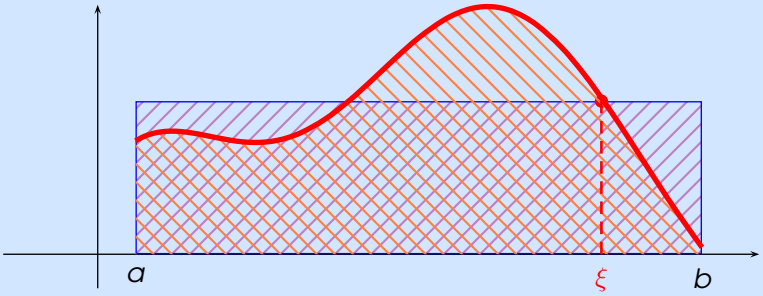
$$m \cdot \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x \le M \cdot \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Daher existiert eine Zahl $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = \mu \cdot \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Nach dem Zwischenwertsatz 3.5.2 gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$. □

Zum Mittelwertsatz der Integralrechnung.
Die Fläche des lila schraffierten Rechtecks stimmt mit der des orange schraffierten Bereichs überein.



5.2 Riemannsche Summen

Die Riemannschen Summen geben eine erste Berechnungsmöglichkeit für Integrale und zeigen, dass der oben eingeführte Integralbegriff mit dem üblicherweise in Schulbüchern eingeführten Begriff übereinstimmt.

5.2.1 Definition. Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

sei eine Unterteilung des Intervalls $[a,b]$. Schließlich seien Stützstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, gegeben. Dann heißt

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

die *Riemannsche Summe der Funktion f bzgl. der Unterteilung* $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ *und der Stützstellen* $(\xi_i)_{i=1,\ldots,n}$.

Die Zahl

$$\eta := \max\{\, x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n \,\}$$

wird die *Feinheit der Unterteilung* $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ genannt.

5.2.2 Bemerkung. Es seien Daten wie in der Definition gegeben. Wir definieren

$$\begin{array}{rcl} F\colon [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(\xi_i), & \text{falls } x \in [x_{i-1}, x_i),\ i = 1, \ldots, n \\ f(b), & \text{falls } x = b \end{cases} \end{array} .$$

Dann ist F eine Treppenfunktion, und die Riemannsche Summe der Funktion f bzgl. der Unterteilung $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ und der Stützstellen $(\xi_i)_{i=1,\ldots,n}$ stimmt mit dem Integral

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

überein.

5.2.3 Satz. *Gegeben sei die integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ des Intervalls $[a,b]$, deren Feinheit höchstens δ ist, die Abschätzung*

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \varepsilon$$

für jede Wahl der Stützstellen $(\xi_i)_{i=1,\dots,n}$ gilt.

5.2.4 Bemerkung. Dieser Satz sagt aus, dass für jede Folge von Unterteilungen $(x_i^k)_{i=1,\dots,n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, für die die Feinheiten η_k gegen Null streben, und jede Folge von Stützstellen $(\xi_i^k)_{i=1,\dots,n_k}$ mit $\xi_i^k \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots,n_i$, $k \in \mathbb{N}$, die Folge der Riemannschen Summen von f bzgl. der Unterteilungen $(x_i^k)_{i=1,\dots,n_k}$ und der Stützstellen $(\xi_i^k)_{i=1,\dots,n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, gegen das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert. Er zeigt damit, dass unser abstrakt definiertes Integral der numerischen Behandlung zugänglich ist.

Beweis von Satz 5.2.3. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 5.1.10 können wir Treppenfunktionen $\varphi, \psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wählen, für die $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2}$$

gilt.

Wir wählen reelle Zahlen $a = t_0 < \cdots < t_m = b$, so dass sowohl φ als auch ψ auf dem Intervall (t_{j-1}, t_j) konstant ist, $j = 1,\dots,m$. Sei η die Feinheit dieser Unterteilung.

Die Integrierbarkeit von f setzt in unserer Konvention die Beschränktheit von f voraus. Deshalb können wir die reelle Zahl

$$S := \sup\{\, |f(x)| \mid x \in [a,b] \,\}$$

definieren.

Sei nun

$$\delta := \min\left\{ \frac{\varepsilon}{8\cdot m \cdot S}, \frac{\eta}{3} \right\}.$$

Seien weiter $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung von $[a,b]$ der Feinheit höchstens δ und $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ Stützstellen, $i = 1,\dots,n$. Wie in Bemerkung 5.2.2 definieren wir zu diesen Daten eine Treppenfunktion F. Sicherlich gilt

$$\varphi - 2S \leq F \leq \psi + 2S.$$

Es sei $I^* \subset \{1,\dots,n\}$ die Menge der Indizes i, zu denen es einen Index $j \in \{1,\dots,m\}$ mit $[x_{i-1}, x_i] \subset (t_{j-1}, t_j)$ gibt. Für $i \in I^*$ und einen Punkt $x \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt

$$\varphi(x) \leq F(x) \leq \psi(x).$$

Die Menge $I^\bullet := \{1,\dots,n\} \setminus I^*$ enthält die Punkte 1 und n sowie zu jedem Index $j \in \{1,\dots,m-1\}$ die Indizes i und $i+1$, falls $t_j = x_i$ gilt, bzw. den Index i, wenn $t_j \in (x_{i-1}, x_i)$ gilt.[2] Offenbar enthält $I^\bullet$ höchstens $2m$ Elemente.

[2] Wir haben δ so gewählt, dass wir mit der geschilderten Definition nicht nochmals die Indizes 0 oder n definieren.

Wir führen die Treppenfunktion

$$\begin{array}{rcl} c\colon [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [x_{i-1}, x_i],\ i \in I^\star \\ 2S, & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

ein. Nach Definition gilt $\varphi - c \leq F \leq \psi + c$ und

$$\int_a^b c(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot S \cdot \sum_{i \in I^\bullet} (x_i - x_{i-1}) \leq 2 \cdot S \cdot 2 \cdot m \cdot \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir folgern

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen Gleichung (5.2) und

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x$$

folgt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon \leq \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon$$

Diese Abschätzung wollten wir erreichen. □

5.2.5 Beispiel. Es sei $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$. Wir wollen

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$$

berechnen.

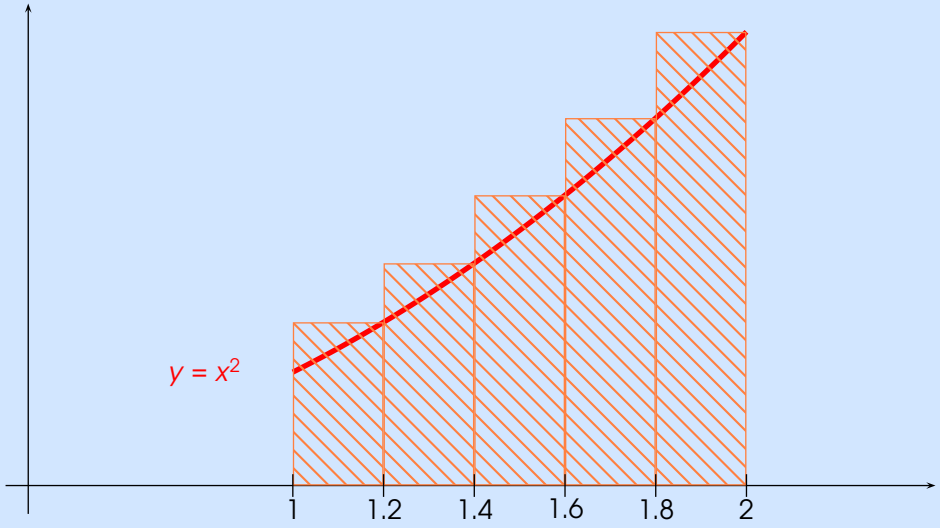
Dazu benutzen wir die (äquidistanten) Unterteilungen $(x_i^k)_{i=0,\ldots,k}$ der Feinheit $1/k$ mit

$$x_i^k := 1 + \frac{i}{k}, \quad i = 0, \ldots, k,\ k \geq 1,$$

und die Stützstellen

$$\xi_i^k := x_i^k = 1 + \frac{i}{k}, \quad i = 1, \ldots, k,\ k \geq 1.$$

Zur Berechnung von S_5.



Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Riemannsche Summe von f bzgl. der Unterteilung $(x_i^k)_{i=0,\dots,k}$ und der Stützstellen $(\xi_i^k)_{i=1,\dots,k}$ damit durch

$$\begin{aligned} S_k &:= \sum_{i=1}^{k} \left(1+\frac{i}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{k} \left(1+2\cdot\frac{i}{k}+\frac{i^2}{k^2}\right)\cdot\frac{1}{k} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} + \frac{2}{k^2}\cdot\sum_{i=1}^{k} i + \frac{1}{k^3}\cdot\sum_{i=1}^{k} i^2 \end{aligned}$$

gegeben.

Man erinnere sich an folgende Formeln (Satz 1.3.6 und (1), S. 74)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} i &= \frac{k\cdot(k+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^{k} i^2 &= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$S_k = 1 + \frac{k+1}{k} + \frac{(k+1)\cdot(2k+1)}{6k^2}.$$

Nun gilt offenbar

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} &= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1 \\ \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\cdot(2k+1)}{6k^2} &= \frac{1}{6}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Wir schließen

$$\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_k = 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

5.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Integration wird oft als die Umkehrung der Differentiation bezeichnet oder gar als „Aufleiten". Die formale Begründung dafür liefert der folgende Satz. Aus ihm ergibt sich dann der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der den wichtigsten Ansatz zur expliziten Berechnung von Integralen liefert.

Im Folgenden sei $I \neq \varnothing$ ein beliebiges offenes Intervall.

5.3.1 Satz. *Es seien $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$. Wir definieren*

$$\begin{array}{rcl} F\colon I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t. \end{array}$$

Die Funktion F ist in I differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis. Für $x \in I$ und $h \in \mathbb{R}^*$, so dass $x + h \in I$, gilt

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{F,x}(h) & = & \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \\ & = & \dfrac{1}{h} \cdot \left(\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right) = \dfrac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t. \end{array}$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung besagt, dass es für $h > 0$ ein $\xi_h \in [x, x+h]$ bzw. für $h < 0$ ein $\xi_h \in [x+h, x]$ gibt mit

$$\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi_h) \cdot h.$$

Für jede Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \xi_{h_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Nun gilt $|x - x_n| \leq h_n$, i.e. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Da f stetig ist, gilt auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Zusammen genommen ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{F,x}(h_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

und der Satz ist bewiesen. □

5.3.2 Bemerkung. Natürlich kann man die Funktion F wie im letzten Satz auch definieren, wenn f nicht stetig ist, das Integral aber dennoch definiert ist (z.B., wenn f eine Treppenfunktion ist). In diesem Fall wird F i.A. nicht differenzierbar sein.

Wir betrachten z.B. die Vorzeichenfunktion sign (Beispiel 3.1.3 vi) und

$$\begin{array}{rcl} F\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{sign}(t)\mathrm{d}t. \end{array}$$

Für $x \leq 0$ gilt

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & \displaystyle\int_0^x \mathrm{sign}(t)\mathrm{d}t = \int_0^x (-1)\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle -\int_x^0 (-1)\mathrm{d}t = -x. \end{array}$$

Für $x > 0$ erhält man $F(x) = x$. Damit ist F = abs der Absolutbetrag und an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

5.3.3 Definition. Es seien I ein offenes Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion von f*, wenn $F' = f$ gilt.
Schreibweise:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F.$$

5.3.4 Bemerkung. Nach dem letzten Satz besitzt jede stetige Funktion auf einem offenen Intervall eine Stammfunktion. Die Stammfunktion ist jedoch nicht eindeutig bestimmt. Es seien $a \in I$ gegeben und F_a die im letzten Satz zu a definierte Stammfunktion. Für $a \neq a' \in I$ erhalten wir eine andere Stammfunktion $F_{a'}$, die sich von F_a um eine Konstante unterscheidet (welche?). Allgemeiner gilt: Sind F eine Stammfunktion von f und $C \in \mathbb{R}$, dann ist auch $F + C$ eine Stammfunktion von f. Und umgekehrt: Sind F und G Stammfunktionen von f, dann gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $G = F + C$. In der Tat gilt $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Mit Folgerung 4.3.7 schließen wir daraus, dass $F - G$ eine konstante Funktion ist. Die gerade geschilderte Mehrdeutigkeit muss man bei der Schreibweise $\int f(x)\mathrm{d}x = F$ im Hinterkopf behalten. Manchmal schreibt man auch etwas korrekter $\int f(x)\mathrm{d}x = F + C$.

5.3.5 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Es seien I ein offenes Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f und $a, b \in I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $G\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Offenbar gilt $G(a) = 0$ und $G(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, also

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

Nun gibt es aber eine Konstante C mit $F = G + C$. Also gilt

$$F(b) - F(a) = G(b) + C - \big(G(a) + C\big) = G(b) - G(a).$$

Der Satz ist damit gezeigt. □

5.3.6 Beispiel. In der folgenden Tabelle haben wir einige Funktionen, die uns im Laufe der Vorlesung bereits begegnet sind, mit jeweils einer Stammfunktion eingetragen.

Funktion	(Eine) Stammfunktion	Funktion	(Eine) Stammfunktion
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{x}$	$\log(\lvert x\rvert)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

5.3.7 Beispiel. i) Wir berechnen

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x.$$

Eine Stammfunktion für x^2 ist $(1/3)x^3$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt somit

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

ii) Gesucht ist das Integral

$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5)\mathrm{d}x.$$

Eine Stammfunktion für den Integranden ist

$$F(x) := \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5)\mathrm{d}x &= F(x)\Big|_1^2 = \left(4 - \frac{16}{3} + 10\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 5\right) = \\ &= \frac{26}{3} - \frac{55}{12} = \frac{104}{12} - \frac{55}{12} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

iii) Man berechne

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\mathrm{d}x.$$

Eine Stammfunktion für den Sinus ist minus Kosinus. Also

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) \\ &= 4.\end{aligned}$$

5.4 Integrationsregeln

Die nun folgenden Integrationsregeln sind Konsequenzen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und den bereits bekannten Differentiationsregeln.

Die Substitutionsregel

5.4.1 Satz. *Es seien I und I' offene Intervalle, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $\varphi\colon I' \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion (d.h. φ' ist ebenfalls stetig) mit $\varphi(I') \subset I$. Dann gilt für $a, b \in I'$*

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis. Es sei $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Nach der Kettenregel gilt auf I'

$$\Big(F\big(\varphi(t)\big)\Big)' = F'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t),$$

d.h. $F \circ \varphi$ ist eine Stammfunktion für $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Also

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)\Big|_a^b = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Dies ist die behauptete Formel. □

Man kann die Substitutionsregel sowohl von links nach rechts als auch von rechts nach links lesen. Wenn man sie von links nach rechts liest, versucht man den Integranden in der Form $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ zu schreiben. Wenn f dann eine Funktion ist, die man integrieren kann, z.B., weil man eine Stammfunktion kennt, dann hat man das Integral gelöst. Liest man die Regel von rechts nach links, dann startet man mit einem Ausdruck der Form $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ und führt eine Variablensubstitution $x = \varphi(t)$ aus. Mit der Merkregel

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) \quad \text{also} \quad \text{„}\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t\text{“}$$

ersetzt man $\mathrm{d}x$ durch $\varphi'(t)\mathrm{d}t$. Schließlich muss man die Integrationsgrenzen a und b durch a' und b' mit $\varphi(a') = a$ und $\varphi(b') = b$ ersetzen. Man sollte dabei φ natürlich so wählen, dass das neue Integral einfacher wird. Das nächste Beispiel erläutert diese beiden Vorgehensweisen.

5.4.2 Beispiel. Wir wollen für $a, b \in (-1, 1)$

$$\int_a^b \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

berechnen.

i) Wir sehen, dass $-2t$ die Ableitung der Funktion $1 - t^2$ ist. Es sei also $f(x) := -1/(2\sqrt{x})$ und $\varphi(t) = 1 - t^2$. Nach der Substitutionsregel gilt nun

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t &= \int_{1-a^2}^{1-b^2} -\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -\int_{1-a^2}^{1-b^2} \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= -\sqrt{x}\Big|_{1-a^2}^{1-b^2} = -\sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2}.\end{aligned}$$

ii) Wir setzen $t = \sin(u)$, $u \in (-\pi/2, \pi/2)$, an. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \cos(u) \quad \text{also nach Merkregel} \quad \mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u.$$

Ferner wird aus

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{\cos^2(u)} = \cos(u).^3$$

Nach der Substitutionsregel gilt nun

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{\sin(u)}{\cos(u)}\cdot\cos(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sin(u)\mathrm{d}u = -\cos(u)\Big|_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \\ &= -\sqrt{1-\sin^2(u)}\Big|_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \\ &= -\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}.\end{aligned}$$

5.4.3 Beispiel. i) Es seien $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot f^2(x)\Big|_a^b.$$

Denn mit $G(t) := t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b G\big(f(x)\big)\cdot f'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{f(a)}^{f(b)} G(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot t^2\Big|_{f(a)}^{f(b)}.\end{aligned}$$

Damit ist also $(1/2)f^2$ eine Stammfunktion für $f\cdot f'$.

Als Beispiele finden wir

$$\int \frac{\log(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\log^2(x)$$

und

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\sin^2(x).$$

ii) Für f und a, b wie oben mit $f([a,b]) \subset \mathbb{R}_{>0}$ oder $f([a,b]) \subset \mathbb{R}_{<0}$ gilt

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \log\big(|f(x)|\big)\Big|_a^b.$$

Diesmal benutzen wir $G(t) := 1/t$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x &= \int_a^b G\big(f(x)\big)\cdot f'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{f(a)}^{f(b)} G(t)\mathrm{d}t = \log(|x|)\Big|_{f(a)}^{f(b)}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\log(|f(x)|)$ eine Stammfunktion für f'/f. Z.B.

$$\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+7}\mathrm{d}x = \log\big(|2x^2-3x+7|\big),$$

[3] Wegen $u \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt $\cos(u) > 0$.

$$\int \frac{\exp(x)}{\exp(x)+2}\mathrm{d}x = \log\big(\exp(x)+2\big).$$

iii) Es seien $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ die Hyperbelfunktionen, i.e.

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{1}{2}\big(\exp(x)-\exp(-x)\big)\\ \cosh(x) &= \frac{1}{2}\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x) = 1.$$

In der Tat

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) &= \frac{1}{4}\cdot\big(\exp^2(x)+2\exp(x)\cdot\exp(-x)+\exp^2(-x)\big)\\ &= \frac{1}{4}\cdot\big(\exp(2x)+2+\exp(-2x)\big)\\ -\sinh^2(x) &= -\frac{1}{4}\cdot\big(\exp(2x)-2+\exp(-2x)\big)\\ \hline \cosh^2(x)-\sinh^2(x) &= 1.\end{aligned}$$

Damit können wir

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

berechnen. Wir substituieren

$$x := \sinh(u) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}x = \cosh(u)\mathrm{d}u.$$

Also

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(u)}}\cdot\cosh(u)\mathrm{d}u\\ &= \int \mathrm{d}u = u = \operatorname{Arsinh}(x) \quad \text{(s. Aufgabe 6.12.2).}\end{aligned}$$

Partielle Integration

5.4.4 Satz. *Es seien I ein offenes Intervall und $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt für $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis. Nach der Produktregel ist $f\cdot g$ eine Stammfunktion für $f'\cdot g + f\cdot g'$, also

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \big(f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)\big)\mathrm{d}x\\ &= f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b.\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu der behaupteten. □

5.4.5 Bemerkung. Wie die Substitutionsregel erfordert auch die partielle Integration die richtige Intuition bzw. eine gewisse Erfahrung, um zum Ziel zu kommen. Bei dem Integral

$$\int x \cdot \exp(x)\mathrm{d}x$$

haben wir z.B. zwei Möglichkeiten.

i) $f(x) = x$, $g'(x) = \exp(x)$. Wir können somit offenbar $g(x) = \exp(x)$ wählen. Es folgt

$$\begin{aligned}\int x \cdot \exp(x)\mathrm{d}x &= x \cdot \exp(x) - \int \exp(x)\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \exp(x) - \exp(x) = (x-1) \cdot \exp(x).\end{aligned}$$

ii) $f(x) = \exp(x)$, $g'(x) = x$. Diesmal wählen wir $g(x) = (1/2)x^2$. Also

$$\int x \cdot \exp(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \cdot \exp(x) - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \exp(x)\mathrm{d}x.$$

Diese Vorgehensweise war wenig hilfreich, da wir nun ein noch komplizierteres Integral, nämlich $\int x^2 \cdot \exp(x)\mathrm{d}x$, zu berechnen haben.

5.4.6 Beispiel. i) Wir berechnen, für $a, b > 0$,

$$\int_a^b \log(x)\mathrm{d}x.$$

Dazu wählen wir $f(x) = \log(x)$, $g'(x) = 1$ und $g(x) = x$. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int_a^b \log(x)\mathrm{d}x &= x \cdot \log(x)\Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \log(x)\Big|_a^b - x\Big|_a^b = x \cdot \big(\log(x) - 1\big)\Big|_a^b.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $x \cdot (\log(x) - 1)$ eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus.

ii) Berechnung von

$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x$$

mit $f(x) = \arcsin(x)$, $g'(x) = 1$ und $g(x) = x$.

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\mathrm{d}x &= x \cdot \arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \quad \text{(s. Beispiel 5.4.2).}\end{aligned}$$

iii) Wir berechnen

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x$$

mit $f(x) = \arctan(x)$, $g'(x) = 1$ und $g(x) = x$.

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Nach der Substitutionsregel gilt mit $t = \varphi(x) = 1 + x^2$

$$\begin{aligned}\int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\log(|t|) = \frac{1}{2}\log(1+x^2).\end{aligned}$$

Alles in allem findet man

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

iv) In manchen Fällen muss man zweimal oder noch öfter partiell intergrieren, z.B., um

$$\int x^2 \cdot \cos(x)\mathrm{d}x$$

zu erhalten. Wir setzen $f(x) = x^2$, $g'(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \sin(x)$ an. Damit gilt

$$\int x^2 \cdot \cos(x)\mathrm{d}x = x^2 \cdot \sin(x) - 2 \cdot \int x \cdot \sin(x)\mathrm{d}x.$$

Zur Berechnung von $\int x \cdot \sin(x)$ verwenden wir $f(x) = x$, $g'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = -\cos(x)$. Folglich

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin(x)\mathrm{d}x &= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\mathrm{d}x \\ &= -x \cdot \cos(x) + \sin(x).\end{aligned}$$

Zusammengenommen erhält man

$$\int x^2 \cdot \cos(x)\mathrm{d}x = x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x).$$

v) Das Integral

$$I_m := \int \sin^m(x)\mathrm{d}x$$

soll rekursiv berechnet werden. Die ersten beiden Integrale sind

$$\begin{aligned}I_0 &= \int \mathrm{d}x = x \\ I_1 &= \int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x).\end{aligned}$$

Für $m \geq 2$ nehmen wir $f(x) = \sin^{m-1}(x)$, $g'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = -\cos(x)$. Es folgt

$$\begin{aligned}I_m &= \int \sin^m(x)\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x) \cdot \sin^{m-1}(x) + (m-1) \cdot \int \cos^2(x) \cdot \sin^{m-2}(x)\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x) \cdot \sin^{m-1}(x) + (m-1) \cdot \int \left(1 - \sin^2(x)\right) \cdot \sin^{m-2}(x)\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x) \cdot \sin^{m-1}(x) + (m-1) \cdot I_{m-2} - (m-1) \cdot I_m.\end{aligned}$$

Wir schließen

$$m \cdot I_m = -\cos(x) \cdot \sin^{m-1}(x) + (m-1) \cdot I_{m-2},$$

i.e.

$$I_m = -\frac{1}{m} \cdot \cos(x) \cdot \sin^{m-1}(x) + \frac{m-1}{m} \cdot I_{m-2}.$$

Als Anwendung dieser Rekursionsformel beweisen wir folgendes Resultat:

5.4.7 Satz (Wallissches[4]Produkt)**.**

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{4i^2}{4i^2-1} := \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{4i^2}{4i^2-1}.$$

Beweis. Wir berechnen zunächst

$$A_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x)\mathrm{d}x.$$

Da $\pi/2$ eine Nullstelle des Kosinus ist, gilt mit obiger Rekursionsformel

$$A_m = \frac{m-1}{m} \cdot A_{m-2} \quad \text{für } m \geq 2,$$

sowie $A_0 = \pi/2$ und $A_1 = \cos(0) = 1$. Induktiv findet man für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} A_{2k} &= \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i} \\ A_{2k+1} &= \prod_{i=1}^{k} \frac{2i}{2i+1}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+2}}{A_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+2} = 1.$$

Für $x \in [0, \pi/2]$ gilt $0 \leq \sin(x) \leq 1$ und daher für alle $k \geq 1$

$$\sin^{2k+2}(x) \leq \sin^{2k+1}(x) \leq \sin^{2k}(x)$$

und auf Grund der Monotonie des Integrals

$$A_{2k+2} \leq A_{2k+1} \leq A_{2k}.$$

Für die Grenzwerte ergibt sich

$$1 = \lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+2}}{A_{2k}} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k}}{A_{2k}} = 1.$$

Weiter gilt

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{2}{\pi}$$

und für $k \geq 1$

$$\frac{\frac{A_{2k+1}}{A_{2k}}}{\frac{A_{2k-1}}{A_{2k-2}}} = \frac{\frac{A_{2k+1}}{A_{2k-1}}}{\frac{A_{2k}}{A_{2k-2}}} = \frac{\frac{2k}{2k+1}}{\frac{2k-1}{2k}} = \frac{2k \cdot 2k}{(2k+1)\cdot(2k-1)} = \frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

Es folgt induktiv

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{4i^2}{4i^2-1}$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{4i^2}{4i^2-1} = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}} = \frac{\pi}{2}.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

[4]John Wallis (1616 - 1703), englischer Mathematiker.

5.5 Die Trapezregel

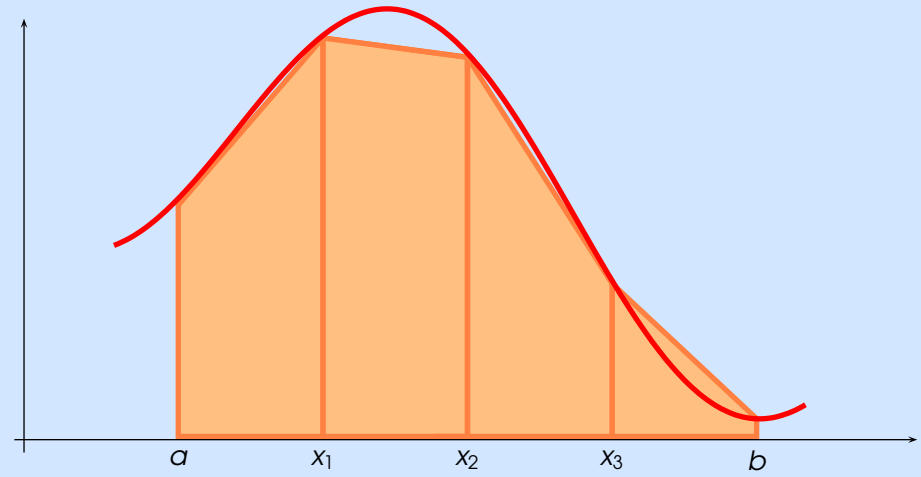
Auch für die Integration gibt es Näherungsverfahren. Eines davon ist die Methode der Riemannschen Summen. Ist die Funktion, die integriert werden soll, (mehrmals) differenzierbar, dann gibt es verbesserte Näherungsverfahren. Eines davon ist die Trapezregel, die in diesem Abschnitt vorgestellt wird.

5.5.1 Satz (Trapezregel). *Es seien $\alpha < a < b < \beta$ reelle Zahlen und $f\colon (\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Weiter seien K eine reelle Zahl mit $|f''(x)| \leq K$ für alle $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, und $h := (b-a)/n$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \cdot h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(a+i\cdot h) + f(a+(i+1)\cdot h)\big) \right| \leq \frac{K}{12\cdot n^2} \cdot (b-a)^3.$$

Man erinnere sich, dass die Fläche eines Trapezes mit den Seitenlängen l_1 und l_2 und der Höhe d durch $(1/2)\cdot d\cdot(l_1+l_2)$ gegeben ist. (Der Beweis der Trapezregel wird dafür einen Beweis liefern.) In der Formel des Satzes wird das Integral also durch eine Summe von Trapezflächen angenähert. Die folgende Skizze illustriert das.

Zur Trapezregel.



5.5.2 Bemerkung. Die Abschätzung mit der Krümmung, d.h. mit der zweiten Ableitung, ist unmittelbar plausibel: Ist $K = 0$, dann ist die Funktion linear, und die Formel ist exakt. Ist die Krümmung klein, so ist die lineare Approximation gut und der gemachte Fehler gering.

Beweis. **Schritt 1:** Wir definieren die lineare Funktion $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto c_1\cdot x + c_0$, durch die Forderungen $p(a) = f(a)$ und $p(b) = f(b)$. Wir behaupten, dass es zu jeder Zahl $x \in (a,b)$ eine Zahl $\xi_x \in (a,b)$ mit

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{2}\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot f''(\xi_x) \tag{5.3}$$

gibt. Dazu definieren wir die zweimal differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) - p(t) - (t-a)\cdot(t-b)\cdot\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)\cdot(x-b)}. \end{aligned}$$

Diese Funktion hat die Nullstellen $a < x < b$. Nach dem Satz von Rolle 4.3.4 hat die erste Ableitung g' Nullstellen η_1 und η_2 mit $a < \eta_1 < x < \eta_2 < b$. Nach dem Satz von Rolle für g' gibt es eine Nullstelle ξ_x mit $a < \eta_1 < \xi_x < \eta_2 < b$ der zweiten Ableitung. Da

$$g''(t) = f''(t) - 2\cdot t\cdot\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)\cdot(x-b)}, \quad t\in(a,b),$$

hat ξ_x die gewünschte Eigenschaft.

Schritt 2: Wir betrachten hier den Fall $n = 1$. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)\mathrm{d}x &= \left(c_0\cdot x + \frac{1}{2}\cdot c_1\cdot x^2\right)\Big|_a^b = (b-a)\cdot\left(c_0 + \frac{1}{2}\cdot c_1\cdot(b+a)\right) \\ &= \frac{b-a}{2}\cdot\big((c_0 + c_1\cdot a) + (c_0 + c_1\cdot b)\big) = \frac{b-a}{2}\cdot\big(f(a)+f(b)\big). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b \big|f(x)-p(x)\big|\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\cdot K\cdot\int_a^b (x-a)\cdot(b-x)\mathrm{d}x.$$

Bei der ersten Abschätzung haben wir Satz 5.1.13, iii), und 5.1.15 benutzt, bei der zweiten Satz 5.1.13 und (5.3).

Schließlich ist es eine einfache Übungsaufgabe, die Gleichung

$$\int_a^b (x-a)\cdot(b-x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{6}$$

zu überprüfen. Insgesamt haben wir die behauptete Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\cdot\big(f(a)+f(b)\big)\right| \le \frac{1}{12}\cdot K\cdot(b-a)^3$$

nachgewiesen.

Schritt 3: Wir setzen $x_i := a + i\cdot h$, $i = 0,\ldots,n$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}h\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}h\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)\right|.$$

Nach Schritt 2 haben wir

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\cdot h\cdot\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)\right| \le \frac{1}{12}\cdot K\cdot h^3 = \frac{1}{12}\cdot K\cdot\frac{(b-a)^3}{n^3}, \quad i = 0,\ldots,n-1.$$

Zusammen ergeben diese Ungleichungen die behauptete Abschätzung. □

5.5.3 Bemerkung. In `Maple` ist die Trapezregel implementiert. Der Befehl lautet `ApproximateInt(f(x), x = a..b, method = trapezoid,opts)`.

5.5.4 Beispiel. Es sei $f\colon \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$. Es gilt

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log(x)\Big|_1^2 = \log(2) - \log(1) = \log(2).$$

Die Trapezregel liefert uns ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\log(2)$. Wir arbeiten mit $n = 5$. Die Stützstellen sind

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{7}{5}, \quad x_3 = \frac{8}{5}, \quad x_4 = \frac{9}{5}, \quad x_5 = 2.$$

Der Nährungswert aus der Trapezregel ist

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(1+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\cdots+\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\right) = 0,69563 \pm 0,000005. \tag{5.4}$$

Die zweite Ableitung ist $f''(x) = 2/x^3$, $x \in \mathbb{R}^\star$. Für $x \in [1,2]$ gilt $1 \leq x^3 \leq 8$ und daher $|f''(x)| \leq 2$. Damit weicht $\log(2)$ von dem Wert in (5.4) um einen Betrag von höchstens $1/(6\cdot 5^2) = 1/150 = 0,00\overline{6} \leq 0,007$ ab. Wir schließen

$$0,688 < \log(2) < 0,703.$$

In der Tat gilt

$$\log(2) = 0,69314718\cdots.$$

Für weitere Informationen zu diesem Themenkreis verweisen wir auf (1), Abschnitt 12.5, (6), Abschnitt 4.3 II.

5.6 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale sind Integrale, bei denen eine oder beide Integrationsgrenzen kritisch sind. Dabei nennen wir eine Integrationsgrenze a *kritisch*, wenn $a = \pm\infty$ oder die zu integrierende Funktion in a nicht definiert ist. Das entsprechende uneigentliche Integral ist dann als Grenzwert von Folgen gewisser „herkömmlicher" Integrale gegeben. Wir gehen nun die verschiedenen Fälle durch.

Eine Integrationsgrenze ist $\pm\infty$

5.6.1 Definition. i) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f_{|[a,r]}$ für jedes $r \in (a,\infty)$ integrierbar ist. Das *uneigentliche Integral* $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ ist die Funktion

$$r \longmapsto \int_a^r f(x)\mathrm{d}x, \quad r \in [a,\infty).$$

Es wird *konvergent* genannt, wenn der Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty}\int_a^r f(x)\mathrm{d}x$$

als reelle Zahl existiert. Andernfalls nennt man das uneigentliche Integral *divergent*. Ist das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konvergent, dann setzt man[5]

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty}\int_a^r f(x)\mathrm{d}x.$$

[5]Dieser Notationsmissbrauch ist analog zu dem bei Reihen.

ii) Für $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $f\colon (-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f_{|[r,a]}$ für jedes $r \in (-\infty, a]$ integrierbar ist, wird das *uneigentliche Integral* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ als die Funktion

$$r \longmapsto \int_r^a f(x)\mathrm{d}x, \quad r \in (-\infty, a],$$

definiert und *konvergent* genannt, wenn der Grenzwert

$$\lim_{r\to-\infty} \int_r^a f(x)\mathrm{d}x$$

als reelle Zahl existiert, und man definiert in diesem Fall

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{r\to-\infty} \int_r^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Ansonsten nennt man $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ *divergent*.

5.6.2 Beispiel. i) Es sei $\alpha > 1$. Für $r > 1$ finden wir

$$\int_1^r \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^r = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^{\alpha-1}}\right).$$

Es gilt $\lim_{r\to\infty}(1/r^{\alpha-1}) = 0$,[6] so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty (1/x^\alpha)\mathrm{d}x$ konvergiert mit

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \lim_{r\to\infty}\left(1 - \frac{1}{r^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1}.$$

ii) Für $r > 1$ gilt

$$\int_1^r \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log(x)\Big|_1^r = \log(r).$$

Wegen $\lim_{r\to\infty}\log(r) = \infty$ ist das uneigentliche Integral $\int_1^\infty (1/x)\mathrm{d}x$ divergent. (Das Analogon zu diesem uneigentlichen Integral ist die harmonische Reihe aus Beispiel 2.3.13. Der genaue Zusammenhang wird in Satz 5.6.8 erklärt.)

Der Integrand ist an einer Integrationsgrenze nicht definiert

5.6.3 Definition. i) Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f_{|[a,r]}$ für jedes $r \in (a, b)$ integrierbar ist. Das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ist die Funktion

$$r \longmapsto \int_a^r f(x)\mathrm{d}x, \quad r \in [a, b).$$

Es wird *konvergent* genannt, wenn der Grenzwert

$$\lim_{r\to b-0} \int_a^r f(x)\mathrm{d}x$$

[6] Man erinnere sich, dass $r^{\alpha-1} = \exp((\alpha-1)\cdot\log(r))$, $r > 0$.

als reelle Zahl existiert. In diesem Fall definiert man

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{r\to b-0}\int_a^r f(x)\mathrm{d}x.$$

Andernfalls nennt man das uneigentliche Integral *divergent*.

ii) Gegeben sei die Funktion $f\colon (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, für die $f_{|[r,b]}$ für jedes $r \in (a,b)$ integrierbar ist. Dann ist das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ die Funktion

$$r \longmapsto \int_r^b f(x)\mathrm{d}x, \quad r \in (a,b].$$

Man nennt es *konvergent*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{r\to a+0}\int_r^b f(x)\mathrm{d}x$$

als reelle Zahl existiert, und setzt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{r\to a+0}\int_a^r f(x)\mathrm{d}x.$$

Andernfalls spricht man von einem *divergenten uneigentlichen Integral*.

5.6.4 Beispiel. i) Es sei $0 < \alpha < 1$. Für jedes $r \in (0,1)$ hat man

$$\int_r^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\Big|_r^1 = \frac{1}{1-\alpha}\cdot(1-r^{1-\alpha}).$$

Nun gilt $\lim_{r\to 0+0} r^{1-\alpha} = 0$. Daher ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 (1/x^\alpha)\mathrm{d}x$ konvergent mit

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{r\to 0+0}(1-r^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

ii) Für $0 < r < 1$ hat man

$$\int_r^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log(r)\Big|_r^1 = -\log(r).$$

Mit $\lim_{r\to 0+0}\log(r) = -\infty$ folgt, dass $\int_0^1 (1/x)\mathrm{d}x$ nicht konvergent ist.

Beide Integrationsgrenzen sind kritisch

5.6.5 Definition. Es seien $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ mit $a < b$ und $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f_{|[\alpha,\beta]}$ für jedes abgeschlossene Teilintervall $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ integrierbar ist. Schließlich wähle man $c \in (a,b)$.

a) Das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ besteht dann aus den Funktionen

$$r \longmapsto \int_c^r f(x)\mathrm{d}x, \quad r \in [c,b).$$

und

$$s \longmapsto \int_s^c f(x)\mathrm{d}x, \quad s \in (a,c].$$

Es ist *konvergent*, wenn die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

konvergieren. In diesem Fall erklärt man

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Man nennt $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *divergent*, wenn $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ oder $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ divergiert.

5.6.6 Bemerkung. Der Begriff der Konvergenz hängt nicht von der Auswahl von c ab. Ebenso ist $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ unabhängig von c (Übung).

5.6.7 Beispiel. i) Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

ist für jedes $\alpha > 0$ divergent.

ii) Es ist die Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

zu untersuchen. Wir berechnen zunächst

$$\int_0^r \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x)\Big|_0^r = \arctan(r).$$

Es folgt

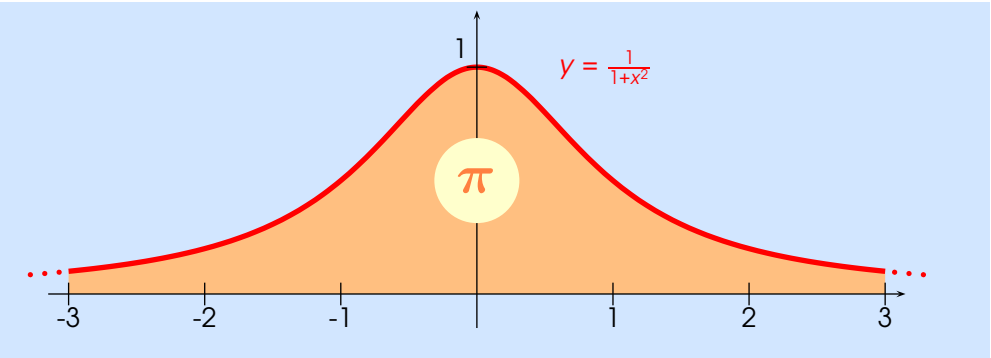
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \arctan(r) = \frac{\pi}{2}.$$

Entsprechend findet man

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Wir schließen, dass $\int_{-\infty}^\infty (1/1+x^2)\mathrm{d}x$ konvergiert mit

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi.$$



Das Integralvergleichskriterium

5.6.8 Satz (Das Integralvergleichskriterium für Reihen)**.** *Es sei* $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine* ***monoton fallende***[7] *Funktion, so dass* $f(x) > 0$ *für alle* $x > 0$*. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ *genau dann, wenn das uneigentliche Integral* $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *konvergiert.*

Beweis. Da wir die Funktion f als monoton fallend voraussetzen, gilt

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $n \leq x \leq n+1$. Daraus leiten wir mit Satz 5.1.13, iii),

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \geq f(n+1), \quad n \in \mathbb{N},$$

ab. Diese Ungleichung liefert wiederum

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \geq \int_0^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n+1} f(k), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Wir nehmen zunächst an, dass $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ existiert. Da $f(x) > 0$, $x > 0$, ist die Folge $(\sum_{k=0}^{n} f(k))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Die zweite Ungleichung in (5.5) zeigt, dass sie auch beschränkt ist. Wegen Satz 2.3.2 konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$.

Nun konvergiere die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$. Die Folge

$$\left(\int_0^n f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist monoton wachsend, weil f nur positive Werte annimmt, und durch $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ nach oben beschränkt. Wiederum nach Satz 2.3.2 konvergiert sie. Es sei A ihr Grenzwert. Man beachte

$$0 \leq \int_0^n f(x)\mathrm{d}x \leq A, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Seien nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit

$$A - \int_0^n f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

und $N' \geq N$ mit

$$x_n \geq N, \quad n \geq N'.$$

Dann haben wir

$$A - \varepsilon \leq \int_0^N f(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{x_n} f(x)\mathrm{d}x, \quad n \geq N'.$$

[7] Nach Satz 5.1.9 ist eine monoton fallende Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall integrierbar.

Auf der anderen Seite gibt es zu x_n ein $M_n \in \mathbb{N}$ mit $x_n < M_n$, $n \in \mathbb{N}$ (Satz von Eudoxos 1.7.14). Daher haben wir

$$\int_0^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{M_n} f(x)\mathrm{d}x \overset{(5.6)}{\leq} A.$$

Alles in allem folgt

$$A - \varepsilon < \int_0^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \leq A, \quad n \geq N'.$$

Wir schließen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = A.$$

Damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ gegen A. □

5.6.9 Bemerkung. i) Im Falle der Konvergenz müssen der Wert der unendlichen Reihe und der Wert des Integrals nicht übereinstimmen. (In Beispiel 5.6.2 haben wir $\int_1^\infty 1/x^2\mathrm{d}x = 1$ nachgewiesen. Andererseits gilt $\sum_{k=1}^\infty 1/k^2 = \pi^2/6$.)

ii) In der Situation des Integralvergleichskriteriums sei

$$\Delta_n := \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(x)\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach (5.5) gilt

$$0 \leq \Delta_n \leq f(0) - f(n+1) < f(0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Außerdem haben wir

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)\mathrm{d}x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt und daher konvergent. Ein interessantes Beispiel wird in 5.6.11 vorgestellt.

iii) Wenn wir die Voraussetzung an die Monotonie von f weglassen, wird die Aussage falsch. Dazu konstruieren wir die stetige Funktion $g\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ wie folgt: Für $n \geq 1$ setzen wir $g(n) := 1$, auf dem Intervall $[n-n^{-2}, n]$ definieren wir g als von 0 auf 1 linear anwachsend und auf $[n, n+n^{-2}]$ als von 1 auf 0 linear abfallend. In allen anderen Punkten definieren wir g als 0. Offenbar gilt

$$\int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}.$$

Wir schließen

$$\int_1^\infty g(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Sei nun $f\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(x) + 1/x^2$. Dann ist f stetig[8] und nimmt nur positive Werte an. Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert, aber $\sum_{k=1}^\infty f(k) = \sum_{k=1}^\infty (1 + 1/k^2)$ divergiert (Aufgabe 6.16.4, b).

Mit ähnlichen Methoden kann man eine stetige Funktion $h\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ erhalten, die nur positive Werte annimmt und für die $\int_1^\infty h(x)\mathrm{d}x$ divergiert und $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergiert.

[8] Damit garantieren wir in diesem Fall die Integrierbarkeit über abgeschlossene Teilintervalle (s. Satz 5.1.9).

5.6.10 Beispiel. i) Es sei $\alpha \geq 1$ eine reelle Zahl. In Beispiel 5.6.2 haben wir gezeigt, dass $\int_1^\infty 1/x^\alpha dx$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ gilt. Damit folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty k^\alpha$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ (vgl. Folgerung 2.7.5).

ii) Wir behaupten, dass die Reihe $\sum_{k=2}^\infty 1/(k \cdot \log(k))$ divergiert. Die Funktion $f\colon [2,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/(x \cdot \log(x))$ ist stetig, monoton fallend und nimmt nur positive Werte an. Ferner zeigt die Kettenregel 4.2.4, dass $x \longmapsto \log(\log(x))$, $x > 1$, eine Stammfunktion von $x \longmapsto 1/(x \cdot \log(x))$, $x > 1$, ist. Damit gilt

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \log(x)} dx = \lim_{x\to\infty} \log\big(\log(x)\big) - \log\big(\log(2)\big) = \infty.$$

Unsere Behauptung folgt deshalb aus dem Integralvergleichskriterium.

5.6.11 Beispiel (Die Euler–Mascheroni[9]-Konstante). Wir betrachten die Funktion $f\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$. Die zugehörige Reihe ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^\infty 1/k$, von der wir wissen, dass sie divergiert (Bemerkung 2.3.13). Weiter gilt $\int_1^x 1/x dx = \log(x)$ für $x \geq 1$. Damit sehen wir auch sofort, dass $\int_1^\infty 1/x dx$ divergiert. Sehr interessant ist allerdings die Folge $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ mit

$$\gamma_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n), \quad n \geq 1.$$

Wir beweisen, dass diese Folge konvergiert. Da $\log(n+1) - \log(n) = \log((n+1)/n)$ gegen 0 strebt, wenn n gegen ∞ läuft, reicht es, die Konvergenz der Folge $(\gamma'_n)_{n\geq 1}$ mit

$$\gamma'_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1), \quad n \geq 1,$$

nachzuweisen. Das folgt aber aus 5.6.9, ii), denn die Zahl γ'_n stimmt mit Δ_n in jener Bemerkung überein, $n \geq 1$. (Dabei ist 0 an den entsprechenden Stellen durch 1 zu ersetzen.)

Die Zahl

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \gamma_n$$

heißt *Euler–Mascheroni-Konstante*. Es ist eine offene Frage, ob γ irrational oder gar transzendent ist. Eine ausführliche Diskussion dieser berühmten Zahl findet der Leser in (7).

Die Γ-Funktion

5.6.12 Definition. Die Funktion

$$\begin{aligned} \Gamma\colon \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^\infty t^{x-1} \cdot \exp(-t) dt \end{aligned}$$

heißt *Γ-Funktion*.

Zunächst müssen wir uns davon überzeugen, dass die obige Definition überhaupt sinnvoll ist.

[9] Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800), italienischer Mathematiker.

Wir beginnen mit der Integrationsgrenze 0. Für $x > 1$ bzw. $x = 1$ ist sie nicht kritisch, da sich $t^{x-1} \cdot \exp(-t)$ dann durch 0 bzw. 1 nach 0 stetig fortsetzen lässt. Für $x < 1$ haben wir die Abschätzung

$$0 \leq t^{x-1} \cdot \exp(-t) \leq t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}, \quad t > 0,$$

und daher

$$0 \leq \int_0^1 t^{x-1} \cdot \exp(-t)dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt \overset{\text{Beispiel 5.6.4 i)}}{=} \frac{1}{x}.$$

Schauen wir uns nun die Integrationsgrenze ∞ an. Es gilt (s. Aufgabe 6.15.2 b):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1} \cdot \exp(-t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{\exp(t)} = 0.$$

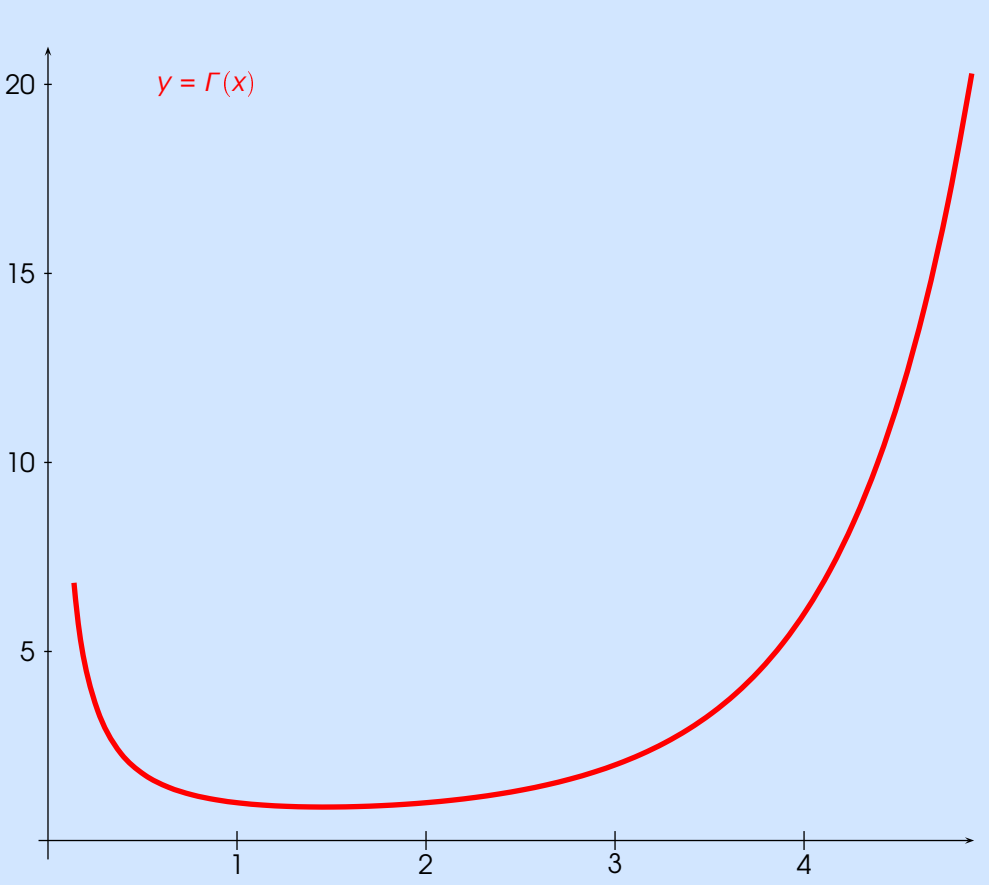
Es gibt also ein t_0, so dass für alle $t \geq t_0$ gilt

$$0 \leq t^{x-1} \cdot \exp(-t) \leq \frac{1}{t^2}. \tag{5.7}$$

Mit Gleichung (5.7) und Satz 5.1.13, iii), ergibt sich

$$0 \leq \int_{t_0}^{\infty} t^{x-1} \cdot \exp(-t)dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{t_0}.$$

Da der Integrand nur positive Werte annimmt, ist damit nachgewiesen, dass für alle x das uneigentliche Integral $\int_0^\infty t^{x-1} \cdot \exp(-t)$ konvergiert und $\Gamma(x)$ definiert ist.



5.6.13 Satz. i) *Wir haben* $\Gamma(1) = 1$.
ii) *Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung*

$$x \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x+1), \quad x > 0.$$

iii) *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Beweis. i) Man hat

$$\Gamma(1) = \lim_{r\to\infty} \int_0^r \exp(-t)\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \big(-\exp(-t)\big)\Big|_0^r = \lim_{r\to\infty} \big(1 - \exp(-r)\big) = 1.$$

ii) Wir integrieren partiell mit $g(t) = -\exp(-t)$ und $f(t) = t^x$. Für $r < R$ erhält man

$$\int_r^R t^x \cdot \exp(-t)\mathrm{d}t = -t^x \cdot \exp(-t)\Big|_r^R + x \cdot \int_r^R t^{x-1} \cdot \exp(-t)\mathrm{d}t.$$

Führt man nun die Grenzübergänge $r \to 0{+}0$ und $R \to \infty$ durch, dann wird die linke Seite zu $\Gamma(x{+}1)$ und die rechte Seite zu $x{\cdot}\Gamma(x)$, denn $\lim_{r\to 0+0} r^x{\cdot}\exp(-r) = 0$ und $\lim_{r\to\infty} r^x \cdot \exp(-r) = \lim_{r\to\infty} r^x/\exp(r) = 0$.

iii) Durch vollständige Induktion: Der Fall $n = 1$ ist Gegenstand von Teil i) des Satzes. Für $n+1$ gilt nach Teil ii), dass

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) \overset{\text{IV}}{=} n{\cdot}(n-1)! = n!.$$

Damit ist die behauptete Gleichung bewiesen. □

Die Γ-Funktion interpoliert also die Fakultät. Sie hat noch folgende Zusatzeigenschaft:

5.6.14 Satz. *Die* Γ*-Funktion ist* logarithmisch konvex, *d.h. für alle* $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ *und alle* $\lambda \in [0,1]$ *gilt*

$$\Gamma(\lambda \cdot x{+}(1-\lambda) \cdot y) \leq \Gamma(x)^\lambda \cdot \Gamma(y)^{1-\lambda}.$$

Mit anderen Worten, die Funktion $\log(\Gamma)$ *ist konvex.*

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf:

5.6.15 Satz (Die Höldersche[10] Ungleichung)**.** *Gegeben seien reelle Zahlen p, q mit* $p > 1$, $q > 1$ *und*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

i) *Für reelle Zahlen* $x \geq 0$ *und* $y \geq 0$ *folgt*

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

[10] Otto Ludwig Hölder (1859 - 1937), deutscher Mathematiker.

ii) Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b |f(t)\cdot g(t)|\mathrm{d}t \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t}\cdot \sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t}.$$

Beweis. i) Falls $x = 0$ oder $y = 0$, ist die Ungleichung trivial. Andernfalls benutzen wir die Tatsache, dass der Logarithmus konkav ist. Nach Satz 4.4.2 folgt das aus der Tatsache $\log''(x) = -1/x^2 < 0$, $x > 0$. Nach Definition einer konkaven Funktion (Definition 4.4.1) gilt daher

$$\log\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{p}\right) \geq \frac{1}{p}\cdot\log(x)+\frac{1}{q}\cdot\log(y).$$

Wenden wir die Exponentialfunktion auf beiden Seiten an, dann wird daraus die behauptete Ungleichung.

ii) Zunächst bemerken wir, dass die auftretenden Integrale nach Satz 5.1.15 existieren. Außerdem ist die Ungleichung richtig, wenn $\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t = 0$ oder $\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t = 0$ gilt: Wir nehmen an, dass $\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t = 0$.. Dann muss auch $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 0$ gelten. Denn wenn $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t > 0$ gilt, dann gibt es eine Treppenfunktion $h\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq h \leq |f|$ und $\int_a^b h(t)\mathrm{d}t > 0$. Dann ist h^p eine Treppenfunktion mit $0 \leq h^p \leq |f|^p$ und $\int_a^b h^p(t)\mathrm{d}t > 0$. Dies impliziert $\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t > 0$.

Ferner sei $C > 0$ eine reelle Zahl mit $|g| \leq C$.[11] Dann gilt nach Satz 5.1.13 iii):

$$0 \leq \int_a^b |f(t)\cdot g(t)|\mathrm{d}t \leq C\cdot\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 0.$$

Wir nehmen also $\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t > 0$ und $\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t > 0$ an. Nach i) gilt

$$\frac{|f(t)|}{\sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t}}\cdot\frac{|g(t)|}{\sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t}} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t}+\frac{1}{q}\cdot\frac{|g(t)|^q}{\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t}, \quad t\in[a,b].$$

Jetzt werden beide Seiten über das Intervall $[a,b]$ integriert. Es folgt die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t}}\cdot\frac{1}{\sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t}}\cdot\int_a^b |f(t)\cdot g(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Der Satz ist damit bewiesen. □

Beweis von Satz 5.6.14. Wir fixieren zunächst reelle Zahlen $0 < \varepsilon < R$ und setzen $p := 1/\lambda$ und $q := 1/(1-\lambda)$. Weiter erklären wir die Funktionen

$$f(t) := t^{\frac{x-1}{p}}\cdot\exp\left(-\frac{t}{p}\right) \quad \text{und} \quad g(t) := t^{\frac{y-1}{q}}\cdot\exp\left(-\frac{t}{q}\right), \quad t > 0.$$

[11] Man erinnere sich, dass eine integrierbare Funktion nach Voraussetzung beschränkt ist.

Die Höldersche Ungleichung führt zu der Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^R t^{\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y-1}\cdot\exp(-t)\mathrm{d}t \\
&\qquad = \int_\varepsilon^R \big|f(t)\cdot g(t)\big|\mathrm{d}t \\
&\qquad \le \sqrt[p]{\int_\varepsilon^R |f(t)|^p\mathrm{d}t}\cdot\sqrt[q]{\int_\varepsilon^R |g(t)|^q\mathrm{d}t} \\
&\qquad = \left(\int_\varepsilon^R t^{x-1}\cdot\exp(-t)\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\cdot\left(\int_\varepsilon^R t^{y-1}\cdot\exp(-t)\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

Lässt man nun ε gegen Null streben und R gegen unendlich, dann folgt die behauptete Ungleichung. □

Damit haben wir nun alle Eigenschaften zusammengetragen, die die Γ-Funktion charakterisieren:

5.6.16 Satz (Satz von Bohr–Mollerup)**.** *Es sei* $F\colon \mathbb{R}_{>0}\longrightarrow\mathbb{R}$ *eine Funktion mit folgenden Eigenschaften*

1. $F(1)=1$.
2. $x\cdot F(x)=F(x+1)$ *für alle* $x>0$.
3. F *ist logarithmisch konvex.*

Dann gilt $F(x)=\Gamma(x)$ *für alle* $x>0$.

Beweis. Zu jedem $x\in\mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $x-n\in(0,1]$. Mit der Funktionalgleichung in 2. sieht man, dass $F(x)$ aus $F(x-n)$ berechnet werden kann. Nach Voraussetzung 1. haben wir $F(1)=1$. Wir müssen also $F(x)$ für $x\in(0,1)$ verstehen.

Mit Voraussetzung 2. folgt $F(n+1)=n!$, $n\ge 1$. Sei nun $x\in(0,1)$. Für $n\in\mathbb{N}$ schreiben wir

$$n+x=(1-x)\cdot n+x\cdot(n+1).$$

Auf Grund der logarithmischen Konvexität erhalten wir die Abschätzung

$$F(n+x)\le F(n)^{1-x}\cdot F(n+1)^x=(n-1)!^{1-x}\cdot n!^x=(n-1)!\cdot n^x,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.8}$$

Es gilt auch

$$n+1=x\cdot(n+x)+(1-x)\cdot(n+1+x),$$

so dass

$$n!=F(n+1)\le F(n+x)^x\cdot F(n+1+x)^{1-x}=F(n+x)\cdot(n+x)^{1-x},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.9}$$

Aus Gleichung (5.8) und (5.9) folgt

$$n!\cdot(n+x)^{x-1}\le F(n+x)\le(n-1)!\cdot n^x,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.10}$$

Mit Voraussetzung 2. erhalten wir

$$F(n+x)=(x+n-1)\cdot\dots\cdot x\cdot F(x),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Damit formen wir Ungleichung (5.10) zu

$$a_n(x):=\frac{n!\cdot(n+x)^{x-1}}{x\cdot\dots\cdot(x+n-1)}\le F(x)\le\frac{(n-1)!\cdot n^x}{x\cdot\dots\cdot(x+n-1)}=:b_n(x),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{5.11}$$

um. Da

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(x)}{a_n(x)} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n}\cdot\exp\big(x\cdot\log(n)-x\cdot\log(n+x)\big)\right)=\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n}\cdot\exp\left(x\cdot\log\Big(\frac{n}{n+x}\Big)\right)\right)=1,\end{aligned}$$

leiten wir aus (5.11) die Identität

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}b_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\cdot n^x}{x\cdot\dots\cdot(x+n-1)} \tag{5.12}$$

ab. Diese Formel legt $F(x)$ unabhänig von allen Wahlen fest. Damit ist der Satz gezeigt. □

5.6.17 Folgerung (Gauß)**.** *Für* ***jede*** *reelle Zahl $x>0$ gilt*

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}. \tag{5.13}$$

5.6.18 Bemerkung. Mit der obigen Formel kann man direkt einsehen, warum die Γ-Funktion die Fakultät interpoliert. Dazu machen wir für $l\geq 1$ folgende Umformungen:

$$(l-1)!=\frac{(n+l)!}{l\cdot\dots\cdot n+l}=\frac{n!\cdot n^l}{\prod_{k=0}^{n}(l+k)}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\dots\cdot\frac{n+l}{n}.$$

Da $\lim_{n\to\infty}(n+i)/n=1$, $i=1,\dots,l$, folgt

$$(l-1)!=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^l}{\prod_{k=0}^{n}(l+k)},\quad l\geq 1.$$

Beweis. Wir untersuchen erst einmal den Fall $x<1$. Die Folgenglieder in Gleichung (5.13) unterscheiden sich von denen in Gleichung (5.12) nur um den Faktor $n/(x+n)$, $n\in\mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty}n/(x+n)=1$, folgt (5.13) in diesem Fall aus dem Beweis des vorigen Satzes.

Wie zuvor bemerkt wurde, gibt es zu jeder positiven reellen Zahl x eine natürliche Zahl n, so dass $x-n\in(0,1]$. Daher genügt es, Folgendes zu zeigen: Sei $x>0$ eine reelle Zahl, für die Gleichung (5.13) erfüllt ist, dann ist (5.13) auch für die Zahl $x+1$ erfüllt.

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= x\cdot\Gamma(x)=x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}=\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^x}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^{(x+1)-1}}{\prod_{k=0}^{n-1}\big((x+1)+k\big)}.\end{aligned}$$

Da $\lim_{n\to\infty} n/(x+1+n) = 1$, stimmt dieser Grenzwert mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{(x+1)}}{\prod_{k=0}^{n} \left((x+1)+k\right)}$$

überein, und der Satz ist bewiesen. □

5.6.19 Folgerung.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Nach Folgerung 5.6.17 gilt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot \sqrt{n}}{\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}+k\right)}.$$

Nun gilt offenbar

$$\frac{1}{2} + k = k + 1 - \frac{1}{2},$$

d.h.

$$P := \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}+k\right) = \prod_{k=1}^{n+1} \left(k - \frac{1}{2}\right).$$

Man folgert

$$P^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(k^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Schließlich berechnen wir

$$\begin{aligned} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(n!)^2}{\prod_{k=1}^{n} \left(k^2 - \frac{1}{4}\right)} \\ &= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)} = \pi. \end{aligned}$$

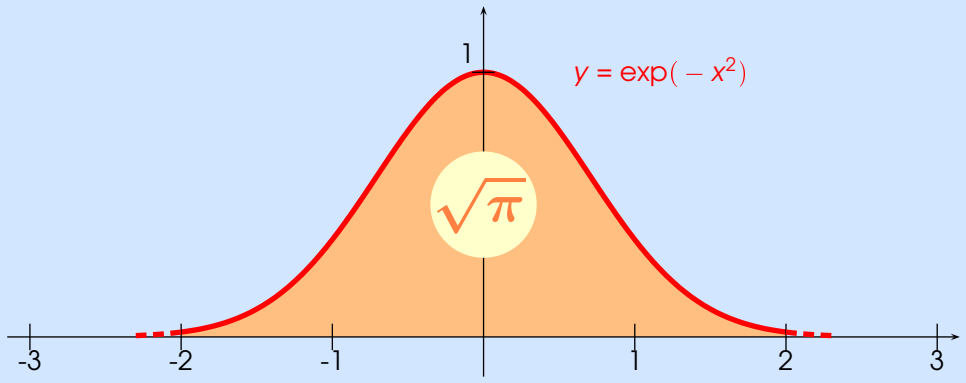
Die letzte Gleichung folgt dabei aus Satz 5.4.7. □

5.6.20 Folgerung.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

5.6.21 Bemerkung. Man kennt keinen analytischen Ausdruck für die Stammfunktion von $\exp(-x^2)$, d.h. man kann die Funktion $\exp(-x^2)$ nur numerisch integrieren oder hier mit einem Trick.

Die Gaußsche Glockenkurve



Beweis. Es sei $0 < r < R$. Man substituiert $x = \sqrt{t}$ in dem Integral $\int_r^R \exp(-x^2)\mathrm{d}x$. Man muss dann auch $\mathrm{d}x = 1/(2\sqrt{t})\mathrm{d}t$ ersetzen. Also

$$\int_r^R \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \int_{r^2}^{R^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \exp(-t)\mathrm{d}t.$$

Wenn man jetzt die Grenzprozesse $r \to 0{+}0$ und $R \to \infty$ durchführt, dann steht dort

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Schließlich gilt

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^\infty \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi},$$

weil $\exp(-x^2)$ eine gerade Funktion ist. □

5.7 Taylor-Reihen

Differenzierbarkeit einer Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in I$ ist äquivalent dazu, dass sich f in a durch eine lineare Funktion approximieren lässt. Das bedeutet, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\eta\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to a} \eta(x) = 0$ gibt, so dass

$$f(x) = c\cdot(x-a) + f(a) + \eta(x)\cdot(x-a) \text{ für alle } x \in I.$$

Es liegt nahe zu fragen, ob sich das Resultat verschärfen lässt, wenn f z.B. n-mal differenzierbar ist.

5.7.1 Satz (Taylorsche Formel). *Es sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I $(n+1)$-mal **stetig** differenzierbare Funktion. Es sei $a \in I$ fest. Dann gilt für alle $x \in I$*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + R_{n+1}(x) \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1}(x) := \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

Beweis. Wir führen Induktion über n. Für $n = 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \mathrm{d}t.$$

Eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion ist insbesondere n-mal stetig differenzierbar. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für das Restglied

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_a^x (x-t)^{n-1} \cdot f^{(n)}(t) \mathrm{d}t.$$

Für die Ableitung nach t gilt

$$\left(\frac{(x-t)^n}{n!} \right)' = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Damit lässt sich partielle Integration 5.4.4 anwenden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_a^x (x-t)^{n-1} \cdot f^{(n)}(t) \mathrm{d}t \\ = \; & -f^{(n)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \\ = \; & f^{(n)}(a) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt getan. □

5.7.2 Folgerung. *Es sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion mit $f^{(n+1)} = 0$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.*

5.7.3 Satz (Lagrangesche[12] Form des Restgliedes). *Es seien $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann existiert für jedes $x \in I$ ein $\xi_x \in [a,x]$ bzw. $\in [x,a]$ mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Beweis. Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 5.1.17 folgt, dass es ein ξ_x gibt mit

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi_x) \cdot \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

Mit

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

folgt die Behauptung. □

5.7.4 Folgerung. *Es seien $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I **n**-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann gibt es eine Funktion $\eta: I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to a}\eta(x) = 0$, so dass*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k + \eta(x) \cdot (x-a)^n.$$

Beweis. Wegen

$$\frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \cdot (x-a)^n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \frac{f^{(n)}(\xi_x) - f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

folgt aus dem letzten Satz

$$\eta(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_x) - f^{(n)}(a)}{n!}$$

für ein geeignetes $\xi_x \in [a, x]$ bzw. $\in [x, a]$. Wenn x gegen a strebt, dann strebt ξ_x ebenfalls gegen a. Deshalb gilt

$$\lim_{x\to a} \eta(x) = \lim_{\xi\to a} \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ in a. □

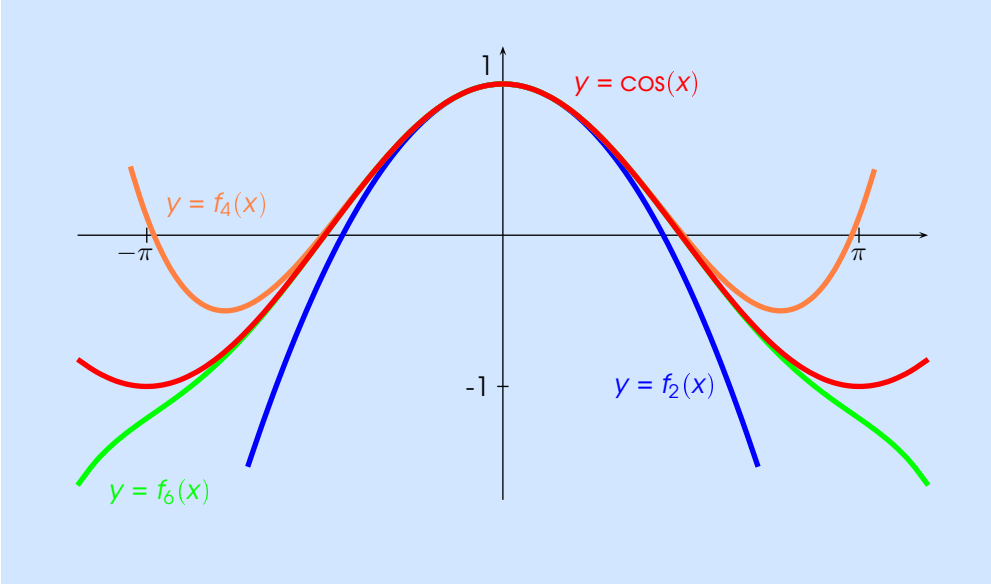
5.7.5 Beispiel. Wir betrachten die Kosinusfunktion an der Stelle $a = 0$. Aus der Potenzreihe des Kosinus 3.8.19 lesen wir ab:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + R_7(x).$$

Die ersten Näherungspolynome für den Kosinus sind also

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} = 1 - \frac{x^2}{2} \\ f_4(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ f_6(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}. \end{aligned}$$

[12] Joseph-Louis de Lagrange (eigentlich Giuseppe Lodovico Lagrangia; 1736 - 1813), italienischer Mathematiker und Astronom.



Es ist klar, dass sich die Periodizität der Kosinusfunktion mit keinem Taylorpolynom abbilden lässt.

5.7.6 Satz (Restglied der Exponentialfunktion). *Es sei*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x).$$

Dann gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$ *mit* $|\alpha| \leq 1+(n/2)$

$$\left|R_{n+1}(\alpha)\right| \leq 2 \cdot \frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Beweis. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \left|R_{n+1}(\alpha)\right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{\alpha^k}{k!}\right| \\ &= \frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{|\alpha|}{n+2} + \cdots + \frac{|\alpha|^k}{(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+k+1)} + \cdots\right) \\ &\leq \frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|\alpha|}{n+2}\right)^k. \end{aligned}$$

Wenn $|\alpha| \leq 1+(n/2)$, d.h. $|\alpha|/(n+2) \leq 1/2$ gilt, dann erhält man mit der geometrischen Reihe

$$\left|R_{n+1}(\alpha)\right| \leq \frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \cdot \frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dies ist die gewünschte Abschätzung. □

5.7.7 Beispiel (Näherungsweise Berechnung von e). Nach Satz 5.7.6 gilt für $n \geq 1$ die Abschätzung

$$0 \leq R_{n+1}(1) \leq \frac{2}{(n+1)!}.$$

Für $n = 5$ erhält man

$$R_6(1) \leq \frac{2}{6!} = \frac{1}{360} \leq 0,003.$$

Mit

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 2,71\overline{6}$$

ergibt sich

$$2,716 \leq e \leq 2,7197.$$

Nimmt man $n = 8$, so folgt wegen

$$R_8(1) \leq 0,000\,006$$

und

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} = 2,718\,278\,770,$$

dass

$$2,718\,278\,770 \leq e \leq 2,718\,284\,770.$$

Wir haben somit den Wert der Eulerschen Zahl bis auf vier Nachkommastellen genau berechnet.

5.7.8 Definition. Es seien I ein offenes Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt die Potenzreihe

$$T_{f,a}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt a*.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar:

5.7.9 Satz. *Es seien I ein offenes Intervall, $a \in I$, und*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-a)^k$$

sei eine Potenzreihe, die auf I konvergiert. Fassen wir f als unendlich oft differenzierbare Funktion auf I auf, dann gilt

$$T_{f,a}(x) = f(x).$$

5.7.10 Bemerkung. i) Einer Potenzreihe $p(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0 und positivem Konvergenzradius ρ ordnen wir eine (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f\colon (x_0-\rho, x_0+\rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ zu. Die Koeffizienten von $p(x)$ erhalten wir aus den Ableitungen von f an der Stelle x_0 zurück. Die Taylorreihe $T_{f,a}(x)$ ist die einzige Möglichkeit, eine (unendlich oft differenzierbare) Funktion f in einer Umgebung eines Punktes a ihres Definitionsbereichs durch eine Potenzreihe darzustellen.

ii) Im Allgemeinen treten folgende Probleme auf:

- Der Konvergenzradius von $T_{f,a}(x)$ kann null sein.
- Die durch die Taylorreihe $T_{f,a}(x)$ definierte Funktion muss nicht mit f übereinstimmen.

5.7.11 Bemerkung. Nach einem Satz von Borel[13] ((3), Satz (4.5)) tritt jede Potenzreihe als Taylorreihe einer unendlich oft differenzierbaren Funktion auf. Der Beweis ist konstruktiv, d.h. zu einer gegebenen Potenzreihe wird eine Funktion mit dieser Potenzreihe als Taylorreihe angegeben. Damit findet man sofort Beispiele für Funktionen, deren Taylorreihe den Konvergenzradius 0 hat.

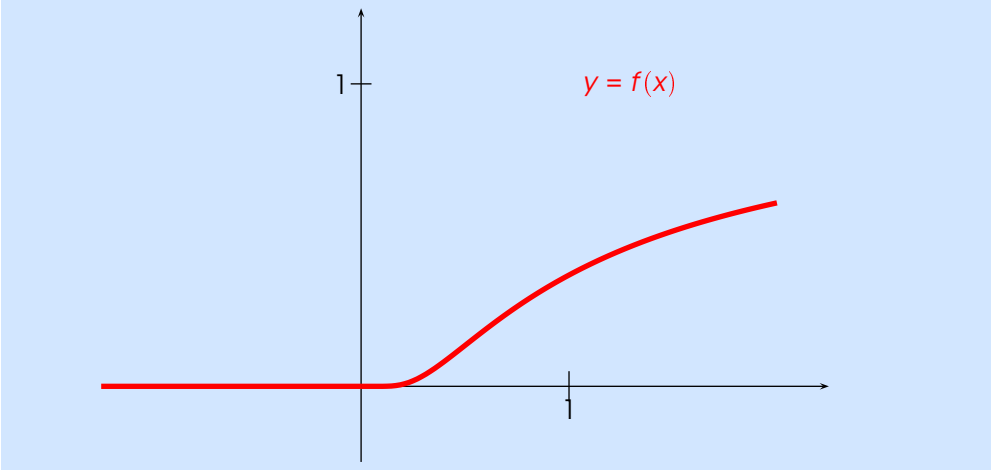
5.7.12 Beispiel. i) In Aufgabe 6.17.5 wird folgende Funktion besprochen:

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases} . \end{array}$$

Es wird gezeigt, dass die Funktion f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0 ist also

$$T_{f,0}(x) = 0.$$

Sie hat unendlichen Konvergenzradius und definiert die Nullfunktion. Insbesondere stimmt die durch die Taylorreihe definierte Funktion in keiner Umgebung von Null mit f überein.



ii) Es sei $g(x) := 1/(1-x)$ für $x \neq 1$. Des Weiteren sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Wir haben bereits gesehen, dass diese Reihe genau für die $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| < 1$ konvergiert und für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| < 1$

$$f(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$$

gilt. Aus den obigen Sätzen über Potenz- und Taylorreihen folgt daher

$$T_{g,0}(x) = f(x).$$

[13] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956), französischer Mathematiker und Politiker.

Das nächste Beispiel erfordert einige Vorbereitungen. Für natürliche Zahlen $k \leq n$ ist gemäß Definition 1.7.15 der Binomialkoeffizient durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

gegeben. Dies lässt sich nun verallgemeinern:

5.7.13 Definition. Für eine beliebige reelle Zahl ν und $k \in \mathbb{N}$ setzt man[14]

$$\binom{\nu}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\nu+1-i}{i}.$$

5.7.14 Eigenschaften. i) *Für $n \in \mathbb{N}$ und $k > n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = 0.$$

ii) *Für $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ hat man*

$$\binom{\nu}{k} \neq 0.$$

5.7.15 Satz (Die binomische Reihe)**.** *Es seien $\nu \in \mathbb{R}$ und $f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (1+x)^{\nu}$.*

i) *Die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0 ist*

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} \cdot x^k.$$

ii) *Die Reihe $T_{f,0}(\alpha)$ konvergiert für jedes $\alpha \in (-1,1)$ gegen $f(\alpha)$.*

5.7.16 Bemerkung. Für $\nu \in \mathbb{N}$ ist dies bis auf die Tatsache, dass dann Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$ vorliegt, der binomische Lehrsatz 1.7.19.

Beweis. Zu i): Nach den Ableitungsregeln aus Abschnitt 4.2 gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $t \in (-1,1)$

$$f^{(k)}(t) = \nu\cdot(\nu-1)\cdot\cdots\cdot(\nu+1-k)\cdot(1+t)^{\nu-k} = k!\cdot\binom{\nu}{k}\cdot(1+t)^{\nu-k},$$

so dass

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\nu}{k}.$$

Zu ii): Die Konvergenz wird mit dem Quotientenkriterium 2.10.2 überprüft. Wir dürfen dabei $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ und $\alpha \in (-1,1) \setminus \{0\}$ annehmen, da ansonsten die Reihe endlich ist. Es sei $a_k := \binom{\nu}{k} \cdot \alpha^k$, $k \in \mathbb{N}$.

[14] Ein Produkt ohne Faktoren hat definitionsgemäß den Wert 1 (vgl. Aufgabe 6.1.3), so dass $\binom{\nu}{0} = 1$ gilt.

Man erhält für $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\binom{\nu}{k+1}\cdot\alpha^{k+1}}{\binom{\nu}{k}\cdot\alpha^{k}}\right| = |\alpha|\cdot\left|\frac{\nu-k}{k+1}\right|$$

und folglich

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |\alpha|\cdot\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\nu-k}{k+1}\right| = |\alpha| < 1.$$

Für $|\alpha| < q < 1$ existiert also ein k_0, so dass $|a_{k+1}/a_k| < q$ für jedes $k \geq k_0$ gilt.

Um nun zu zeigen, dass die Taylorreihe gegen $f(\alpha)$ konvergiert, müssen wir zeigen, dass für jedes $\alpha \in (-1,1)$

$$\lim_{k\to\infty} R_{k+1}(\alpha) = 0$$

gilt.

Fall A): $0 \leq \alpha < 1$. Mit $C := \max\{1,(1+\alpha)^\nu\} = \max\{(1+t)^\nu \mid t \in [0,\alpha]\}$ gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $t \in [0,\alpha]$ die Abschätzung

$$0 \leq (1+t)^{\nu-k-1} \leq (1+t)^\nu \leq C.$$

Es folgt (mit Satz 5.1.13)

$$\begin{aligned}
\left|R_{k+1}(\alpha)\right| &= \frac{1}{k!}\cdot\left|\int_0^\alpha (\alpha-t)^k\cdot f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \\
&= (k+1)\cdot\left|\binom{\nu}{k+1}\right|\cdot\int_0^\alpha (\alpha-t)^k\cdot(1+t)^{\nu-k-1}\mathrm{d}t \\
&\leq C\cdot(k+1)\cdot\left|\binom{\nu}{k+1}\right|\cdot\int_0^\alpha (\alpha-t)^k\mathrm{d}t \\
&= C\cdot\left|\binom{\nu}{k+1}\right|\cdot\alpha^{k+1}.
\end{aligned}$$

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^\infty \binom{\nu}{k}\cdot\alpha^k$ folgt nach 2.7.2

$$\lim_{k\to\infty}\left|\binom{\nu}{k}\right|\cdot\alpha^k = 0$$

und daher

$$\lim_{k\to\infty} R_{k+1}(\alpha) = 0.$$

Fall B): $-1 < \alpha < 0$. Hier gilt

$$\begin{aligned}
\left|R_{k+1}(\alpha)\right| &= \frac{1}{k!}\cdot\left|\int_0^\alpha (\alpha-t)^k\cdot f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \\
&= (k+1)\cdot\left|\binom{\nu}{k+1}\cdot\int_0^\alpha (\alpha-t)^k\cdot(1+t)^{\nu-k-1}\mathrm{d}t\right| \\
&= (k+1)\cdot\left|\binom{\nu}{k+1}\right|\cdot\int_0^{|\alpha|} (|\alpha|-t)^k\cdot(1-t)^{\nu-k-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Man kann keine Abschätzung von $(1-t)^{\nu-k-1}$ angeben, die für alle $t \in [0,|\alpha|]$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gültig ist. Wegen $|\alpha| < 1$ gilt allerdings $(|\alpha|-t)^k \leq (|\alpha|-|\alpha|\cdot t)^k = |\alpha|^k\cdot(1-t)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Damit können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left|R_{k+1}(\alpha)\right| &\leq \left|\nu\cdot\binom{\nu-1}{k}\right|\cdot|\alpha|^k\cdot\int_0^{|\alpha|}(1-t)^{\nu-1}\mathrm{d}t \\
&= C\cdot\left|\binom{\nu-1}{k}\right|\cdot|\alpha|^k.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$C := |\nu| \cdot \int_0^{|\alpha|} (1-t)^{\nu-1} \mathrm{d}t$$

gesetzt.

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\binom{\nu-1}{k}\right| \cdot |\alpha|^k$ strebt der Ausdruck $\left|\binom{\nu-1}{k}\right| \cdot |\alpha|^k$ und damit auch der Ausdruck $|R_{k+1}(\alpha)|$ gegen Null, wenn k gegen unendlich läuft. □

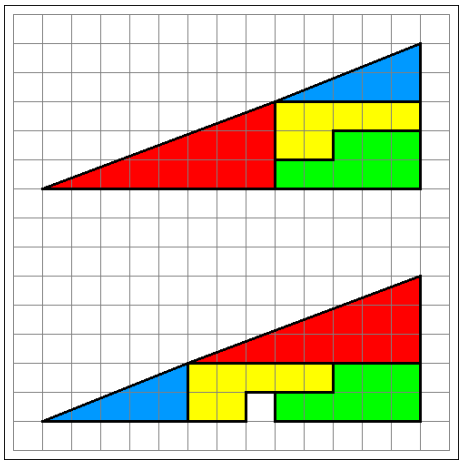
5.7.17 Beispiel. Die folgende Tabelle enthält die Taylorreihen weiterer wichtiger Funktionen.

Funktion	Entwicklungspunkt	Reihe	Konvergenzradius
$\log(x)$	1	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k}$	1
$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	0	$2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	1
$\tan(x)$	0	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\tanh(x)$	0	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 \mp \cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\arcsin(x)$	0	$x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots$	1
$\arccos(x)$	0	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 - \cdots$	1
$\arctan(x)$	0	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	1

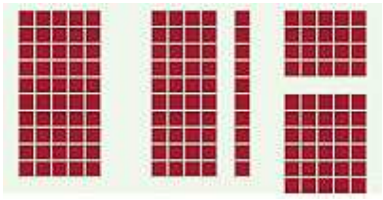
Die Aufgabenblätter

Blatt 1

Aufgabe 6.1.1.
a) Werden wie in der folgenden Abbildung gezeigt die vier Puzzleteile anders angeordnet, entsteht eine Lücke.



Erklären Sie das Phänomen.
b) Eine Tafel Schokolade bilde ein Rechteck von $5 \cdot 10$ Stücken und soll in 50 Einzelstücke zerbrochen werden. Dabei darf in jedem Schritt eins der vorher erhaltenen Stücke entlang einer Kante gebrochen werden. Das folgende Bild zeigt zwei Möglichkeiten für den ersten Schritt.



Wie kommt man am schnellsten zum Ziel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6.1.2 (Aussagenlogik).
a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $T_n := \{ q \in \mathbb{N} \mid q \text{ ist Teiler von } n \}$ die *Teilermenge von n*.
(Eine natürliche Zahl q ist Teiler der natürlichen Zahl n, wenn ein $p \in \mathbb{N}$ mit $n = p \cdot q$ existiert.)
Bestimmen Sie T_{84}.
b) Ist die Aussage

$$9 \in T_{39} \cap T_{81} \text{ oder } 7 \in T_{12} \cup T_{56}$$

wahr?
c) Ist die Aussage

$$-2 \in \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 2 \}$$

wahr?
(Die Antworten sind jeweils zu begründen.)

Aufgabe 6.1.3 (Das Summenzeichen).
Es seien $m \leq n$ ganze und $a_m,\ldots,a_n$ reelle Zahlen. Wir setzen

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + \cdots + a_n.$$

(Für $m > n$ legt man $\sum_{i=m}^{n} a_i = 0$ fest.)
a) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit bzw. ohne Summenzeichen:

$$\text{i) } 2+3+4+\cdots+8, \quad \text{ii) } x+2x^2+3x^3+\cdots+9x^9, \quad \text{iii) } \sum_{j=1}^{4} x_j, \quad \text{iv) } \sum_{k=4}^{7} a_k b_{10-k}.$$

b) Berechnen Sie

$$\text{i) } \sum_{i=1}^{4} (i-2)(i-3), \quad \text{ii) } \sum_{j=-5}^{5} j(j^2-1).$$

Aufgabe 6.1.4 (Rationale und reelle Zahlen).
Es seien $x \in \mathbb{R}$ eine irrationale Zahl und $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen. Zeigen Sie: Wenn $ad - bc \neq 0$ gilt, dann ist auch

$$y := \frac{ax+b}{cx+d}$$

eine irrationale Zahl.
(**Erinnerung:** Die Elemente von $\mathbb{Q}$ heißen *rationale Zahlen*, die Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d.h. die reellen Zahlen, die nicht rational sind, *irrationale Zahlen*.)

Blatt 2

Aufgabe 6.2.1 (Mengenalgebra).
a) Es seien $A, B \subset C$ Mengen. Zeigen Sie die De Morganschen[1] Regeln

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\ C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Illustrieren Sie die Gleichungen mit einem Bild.
b) Es seien A und B Mengen. Überprüfen Sie die Gleichung

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Man nennt

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

die *symmetrische Mengendifferenz.*
Skizzieren Sie die symmetrische Mengendifferenz in einem Bild.
Welcher Aussage in der Logik entspricht die symmetrische Mengendifferenz?

[1] Augustus De Morgan (1806 - 1871), englischer Mathematiker.

c) Es seien A und B Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

$$\begin{aligned} &\text{i)} && A \subset B \\ &\text{ii)} && A \cap B = A \\ &\text{iii)} && A \cup B = B. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2.2 (Rekursive Definitionen).
a) Geben Sie die definierende Abbildung $f\colon A \longrightarrow A$ und das Element $a_0 \in A$ zu den folgenden Rekursionsvorschriften an:

$$\text{i) } A := \mathbb{Q}_{>0},\ F(n+1) = 1 + \frac{1}{1+F(n)},\ n \in \mathbb{N},\ F(2) = \frac{13}{9};$$

$$\text{ii) } A := \mathbb{R}_{>0},\ F(n+1) = F(n)^2,\ n \in \mathbb{N},\ F(3) = 8.$$

b) Geben Sie die definierenden Abbildungen $f_n\colon A^{\times(n+1)} \longrightarrow A$, $n \in \mathbb{N}$, und ggfs. das Element $a_0 \in A$ zu folgenden Daten an:

$$\text{i) } a_0 = 5,\ a_1 = 4,\ a_{n+2} = \frac{3}{2} \cdot a_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot a_n,\ n \in \mathbb{N};$$

$$\text{ii) } n!! := \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n, & n \text{ ungerade} \\ 2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n, & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

c) Für die Zahlen a_n, $n \in \mathbb{N}$, aus Teil b), i), zeige man: Es gibt eindeutig bestimmte rationale Zahlen b_1 und b_2, so dass

$$a_n = b_1 + b_2 \cdot \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 6.2.3 (Vollständige Induktion I).
Behauptung: Für jede natürliche Zahl n gilt $n = 0$, d.h. alle natürlichen Zahlen sind gleich.
Beweis durch vollständige Induktion über n.
$n = 0$: Trivialerweise haben wir $0 = 0$.
$n \to n+1$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt $0 = \cdots = n - 1 = n$. Durch Addieren von 1 zu der Gleichung $n - 1 = n$ folgt $n = n + 1$ und wegen $n = 0$ (Induktionsvoraussetzung) auch $n + 1 = 0$.
Wo liegt der Fehler in dieser Argumentation?

Aufgabe 6.2.4 (Vollständige Induktion II).
a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für jede natürliche Zahl n ist $2n^3 + 3n^2 + n$ durch 6 teilbar.
b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Potenzmenge von $\{1, \ldots, n\}$ genau 2^n Elemente hat, $n \geq 1$.

Blatt 3

Aufgabe 6.3.1 (Graphen und Äquivalenzrelationen).
Es sei A eine Menge. Wir definieren

$$A^{(2)} := \{\, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A) \mid a, b \in A \,\}$$

als Menge der ein- und zweielementigen Teilmengen von A.
Ein *Graph* ist ein Paar (S, K), das aus einer **endlichen** Menge S und einer Teilmenge $K \subset S^{(2)}$ besteht. Die Elemente von S heißen *Scheitelpunkte* und die

von *K Kanten*. Einen Graphen visualisieren wir, indem wir die Scheitelpunkte in der Ebene aufmalen und eine Kante $\{s_1, s_2\}$ als Verbindungslinie der Punkte s_1 und s_2.
So führen $S := \{1,2,3,4,5,6,7\}$ und

$$K := \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{4,5\},\{4,6\},\{4,7\}\}$$

zum Bild

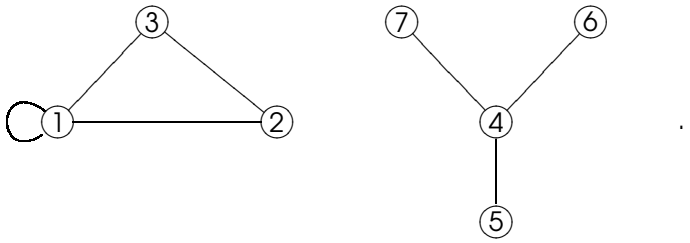


Abbildung 6.2: Ein Graph

a) Bestimmen Sie die Mengen S und K, die zu Abbildung 6.2 führen.

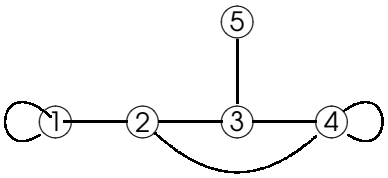


Abbildung 6.3: Der Graph zu Aufgabe 1a)

b) Zeichnen Sie das Bild des Graphen (S,K) mit $S := \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ und

$$K := \{\{1,2\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{6,7\},\{6,10\},\{7,8\},\{8,9\},\{9,10\}\}.$$

c) Es seien (S,K) ein Graph und $s,t \in S$. Ein *Weg von s nach t* ist ein Tupel $(s_0,\ldots,s_k)$ mit $s_0 = s$, $s_k = t$ und $\{s_{i-1}, s_i\} \in K$, $i = 1,\ldots,k$.[2] Wir sagen $s,t \in S$ sind *verbindbar*, wenn es einen Weg von s nach t gibt, und definieren die Relation „$\sim$" auf S durch

$$s \sim t \quad :\Longleftrightarrow \quad (s = t) \vee (s \text{ und } t \text{ sind verbindbar}).$$

Weisen Sie nach, dass „$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist.
d) Bestimmen Sie die Menge der Äquivalenzklassen für Abbildung 6.1 und die Beispiele aus a) und b). Welches „Bild" vermuten Sie im Allgemeinen?

Aufgabe 6.3.2 (Rationale Zahlen).
a) Zeigen Sie, dass durch

$$(a,b) \sim (c,d) \quad :\Longleftrightarrow \quad ad = bc$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definiert wird.
b) Zeigen Sie, dass die Addition

$$\begin{array}{rcl} +\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) & \longmapsto & \frac{ad+bc}{bd} \end{array}$$

[2] Die Länge k kann variieren.

und die Multiplikation

$$\begin{array}{rcl} \cdot\colon \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) & \longmapsto & \frac{ac}{bd} \end{array}$$

auf den rationalen Zahlen wohldefiniert sind.

Aufgabe 6.3.3 (Anordnungen).
a) Überprüfen Sie, dass durch

$$[a,b]\leq[c,d] \quad :\Longleftrightarrow \quad a+d\leq b+c$$

eine Anordnung von $\mathbb{Z}$ definiert wird.
b) Beweisen Sie folgende Eigenschaften der obigen Anordnung von $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcl} \forall a,b,c\in\mathbb{Z}: a<b & \Rightarrow & a+c<b+c. \\ \forall a,b,c\in\mathbb{Z}: a\leq b & \Rightarrow & \begin{cases} ac\leq bc, & \text{falls } c\geq 0 \\ ac\geq bc, & \text{falls } c\leq 0 \end{cases}. \end{array}$$

c) Weisen Sie nach, dass die Relation „$\leq$“ auf $\mathbb{Q}$ mit

$$\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ad\leq bc, & \text{falls } bd>0 \\ ad\geq bc, & \text{falls } bd<0 \end{cases}$$

eine Anordnung ist.
Hinweis: Werden Sie zuerst den Fall $bd<0$ los.

Zusatzaufgabe 6.3.4 (Die natürlichen Zahlen).
a) (Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen) Es sei $(N,0_N,\nu)$ eine Menge von natürlichen Zahlen. Zeigen Sie, dass es genau eine **bijektive** Abbildung $F\colon \mathbb{N}\longrightarrow N$ mit $F(0)=0_N$ und $F(n+1)=\nu(F(n))$, $n\in\mathbb{N}$, gibt.
Hinweis:
Die Bijektivität von F kann man durch Angabe einer Abbildung $G\colon N\longrightarrow\mathbb{N}$ mit $G\circ F=\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ und $F\circ G=\mathrm{id}_N$ nachweisen. Die Aussage folgt dann durch mehrmaliges Anwenden des Dedekindschen Rekursionssatzes.
b) Wir definieren die Teilmengen $A_n\subset\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, durch

$$\begin{array}{rcl} A_0 & := & \varnothing, \\ A_{n+1} & := & A_n\cup\{n+1\}, \quad n\in\mathbb{N}, \\ \text{also } A_n & = & \{1,\ldots,n\}, \quad n\geq 1. \end{array}$$

Beweisen Sie: Für jede Menge B, $m,n\in\mathbb{N}$ und Bijektionen $\alpha\colon A_m\longrightarrow B$ und $\beta\colon A_n\longrightarrow B$ gilt $m=n$.[3]
Anleitung:
Beweisen Sie die Aussage durch vollständige Induktion über m.
Unterscheiden Sie im Induktionschritt die Fälle $n=0$ und $n=n'+1>0$. Untersuchen Sie im zweiten Fall zunächst, was für $\alpha(m+1)=\beta(n'+1)$ passiert.
Erklären Sie schießlich, wie man die Situation $\alpha(m+1)=\beta(n'+1)$ herstellen kann.

[3] Dieser Satz erlaubt es, den Begriff einer endlichen Menge mit n Elementen zu definieren (s. Definition 1.9.1).

Blatt 4

Aufgabe 6.4.1 (Die Körperaxiome).
Bestimmen Sie alle Tupel $(K, 0, 1, +, \cdot)$, die aus einer Menge K, $0, 1 \in K$ und Abbildungen $+\colon K \times K \longrightarrow K$ und $\cdot\colon K \times K \longrightarrow K$ bestehen, in denen die Körperaxiome (a), (m1)-(m4) und (d) gelten und $0 = 1$ statt (b).

Aufgabe 6.4.2 (Absolutbetrag und Vorzeichenfunktion).
Es sei K ein angeordneter Körper. Überprüfen Sie folgende Eigenschaften der Abbildungen $|.|$ und sign:
a) $\forall x \in K : x = \operatorname{sign}(x) \cdot |x|$.
b) $\forall x, y \in K : (|x \cdot y| = |x| \cdot |y|) \wedge (\operatorname{sign}(x \cdot y) = \operatorname{sign}(x) \cdot \operatorname{sign}(y))$.
c) $\forall x \in K : (|x| \geq 0) \wedge (|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$.
d) $\forall x \in K, \varepsilon \in K, \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$.

Aufgabe 6.4.3 (Dedekindsche Schnitte).
a) Es seien R_1 und R_2 Dedekindsche Schnitte. Zeigen Sie, dass $R_1 + R_2$ wieder ein Schnitt ist.
b) Zeigen Sie, dass $R := \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^3 > 3 \}$ ein Schnitt ist.

Aufgabe 6.4.4 (Die Formel von Moivre[4]–Binet[5]).
Wir definieren die Folge $(b_n)_{n \geq 0}$ rekursiv wie folgt:
- $b_0 := 0$,
- $b_1 := 1$,
- $b_{n+1} := b_n + b_{n-1}$, $n \geq 1$.[6] Beweisen Sie:

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Wie entwickeln sich die beiden Summanden auf der rechten Seite für $n \to \infty$?

Zusatzaufgabe 6.4.5 (Fibonacci-Zahlen).
Recherchieren Sie mindestens drei weitere Beispiele für das Auftreten der Fibonacci-Zahlen in den Naturwissenschaften.

Blatt 5

Aufgabe 6.5.1 (Folgen).
a) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := (n-2)/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie eine natürliche Zahl N, so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, für folgende Werte von ε:

$$\text{i) } \varepsilon = \frac{1}{10}, \quad \text{ii) } \varepsilon = \frac{1}{100}.$$

b) Untersuchen die nachstehenden Folgen auf Beschränktheit und Monotonie.

$$\text{i) } \left(\frac{1-n+n^2}{1+n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{ii) } \left(\frac{1-n+n^2}{n \cdot (n+1)} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{iii) } \left(\frac{1}{1+(-2)^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Aufgabe 6.5.2 (Nullfolgen).
Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Beweisen Sie, dass auch die Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit

$$b_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \geq 1,$$

[4] Abraham de Moivre (1667 - 1754), französischer Mathematiker.
[5] Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856), französischer Mathematiker.
[6] Somit stimmt b_{n+1} mit der Fibonacci-Zahl a_n überein, $n \in \mathbb{N}$.

eine Nullfolge ist.

Aufgabe 6.5.3 (Der Calkin–Wilf[7]-Baum).
Wir betrachten $\mathbb{Q}_{>0} := \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \}$. Ein Element $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ können wir in eindeutiger Weise als gekürzten Bruch $x = p/q$ von natürlichen Zahlen schreiben, d.h. $p, q \in \mathbb{N}$ sind teilerfremd.[8] Jede rationale Zahl p/q bekommt zwei Nachfolger: den *linken Nachfolger* $p/(p+q)$ und den *rechten Nachfolger* $(p+q)/q$. Beginnend mit $1/1$ erhalten wir auf diese Weise ein Beispiel für einen *binären Baum*, den sogenannten *Calkin–Wilf-Baum* (s. Abbildung 6.3).

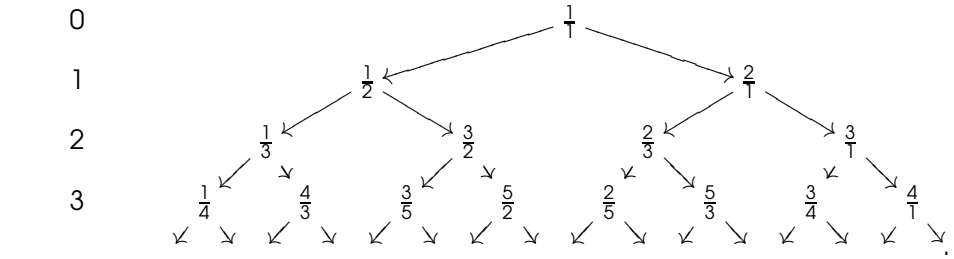


Abbildung 6.4: Der Calkin–Wilf-Baum

a) Beweisen Sie, dass jeder Bruch im Calkin–Wilf-Baum gekürzt ist.
b) Zeigen Sie, dass jede positive rationale Zahl im Calkin–Wilf-Baum vorkommt.
c) Beweisen Sie, dass jeder gekürzte Bruch **genau einmal** im Calkin–Wilf-Baum auftritt.
d) Durch Abzählen des Baums von oben nach unten und von links nach rechts ergibt sich eine bijektive Abbildung $\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_{>0}$. Zeigen Sie, dass der Nenner von $\alpha(n)$ mit dem Zähler von $\alpha(n+1)$ übereinstimmt.
e) Wegen d) gibt es eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\alpha(n) = \frac{b_n}{b_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Rekursionsvorschriften

$$b_{2n+1} = b_n \quad \text{und} \quad b_{2n+2} = b_n + b_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

erfüllt.[9]

Zusatzaufgabe 6.5.4 (Die Formel von Newman).
Für jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ sei $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, und $\{x\} := x - [x]$ der gebrochene Anteil von x.
Begründen Sie, dass man die Abzählung α mit der Rekursionsvorschrift

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{Q}_{>0} \\ x &\longmapsto \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}} \end{aligned}$$

[7] Herbert Wilf (* 1931), US-amerikanischer Mathematiker.
[8] Die Zahlen p und q sind *teilerfremd*, wenn es außer 1 keine natürliche Zahl s gibt, die sowohl p als auch q teilt.
[9] Zusammen mit der Bedingung $b_0 = 1$ legt dies die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit die Abzählung α fest.

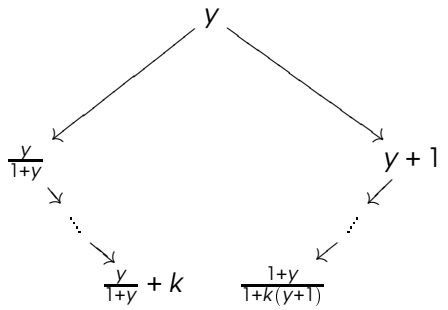


Abbildung 6.5: Benachbarte Elemente im Calkin–Wilf-Baum

und dem Startwert 1/1 erhält.

Anleitung.
Überlegen Sie sich die Formel im Fall, dass man bei der Abzählung im Baum von einer Zeile zur nächsten springt.
Begründen Sie, dass man andernfalls ein Diagramm wie in Abbildung 6.4 im Baum findet, und leiten Sie damit die Formel ab.

Blatt 6

Aufgabe 6.6.1 (Konvergente Folgen).
a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeigen Sie, dass die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$ konvergiert.
b) Beweisen Sie folgendes **Majorantenkriterium**: Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine reelle Zahl a, eine Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine natürliche Zahl N_0. Gilt

$$|a_n - a| \leq |b_n| \quad \text{für alle } n \geq N_0,$$

so konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.
c) Ermitteln Sie, ob die unten angegebenen Folgen konvergieren, bestimmt divergieren oder keins von beiden, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\text{i)}\ \left(\frac{3n^3 - 15n^2 - 12n - 19}{18n^4 + 25n + 1}\right)_{n\geq 0}, \quad \text{ii)}\ \left(\frac{n^3 - 2n^2 - 4}{7n - 15}\right)_{n\geq 0},$$

$$\text{iii)}\ \left(\frac{5n^4 - 34n^2 + 1}{25n^4 + 15n^3 + 56n^2 + 13n + 5}\right)_{n\geq 0},$$

$$\text{iv)}\ \left(\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3 + 1}\right)_{n\geq 0}, \quad \text{v)}\ \left(\frac{(-1)^n n^3 + 2n^2 + 1}{13n^3 + 5n^2 + 76n + 9}\right)_{n\geq 0}.$$

d) Zeigen Sie, dass die Folge

$$\left(\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\geq 1}$$

konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
e) Weisen Sie die Konvergenz der Folge

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$$

nach.
Hinweis: Untersuchen Sie die Quotienten a_{n+1}/a_n, $n \geq 1$.

Aufgabe 6.6.2 (Häufungspunkte).
Zeigen Sie, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die jede reelle Zahl als Häufungspunkt hat.

Aufgabe 6.6.3 (Limes superior und Limes inferior).
Wir betrachten eine **beschränkte** Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und definieren

$$\begin{aligned}\alpha_n &:= \sup\{\, a_k \mid k \geq n\,\}, \quad n \in \mathbb{N},\\ \beta_n &:= \inf\{\, a_k \mid k \geq n\,\}, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.
(**Definition.** Der Grenzwert

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$

heißt *Limes superior* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Grenzwert

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \beta_n$$

Limes inferior.)
b) Weisen Sie, dass $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind und die Folge genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = a = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

gilt.
c) Bestimmen Sie Limes superior und Limes inferior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

Blatt 7

Aufgabe 6.7.1 (Wurzeln).
a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ **nicht negative** reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass $x < y$ auch $x^2 < y^2$ impliziert.
b) Weisen Sie nach, dass umgekehrt für **nicht negative** reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ aus $x^2 < y^2$ auch $x < y$ folgt.
c) Sie sollen $\sqrt{5}$ mit dem Verfahren aus der Vorlesung berechnen. Dabei sollen Sie einen **absoluten** Fehler von weniger als 10^{-9} machen: Wählen Sie einen geeigneten Startwert a_0 und schätzen Sie ab, wieviele Iterationen Sie durchführen müssen, d.h., bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - \sqrt{5}| < 10^{-9}$. Geben Sie auch die Werte $a_0, \ldots, a_n$ an.

Aufgabe 6.7.2 (Die Eulerzahl).
Es sei

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

gegen e konvergiert.

Aufgabe 6.7.3 (Konvergente Reihen).
a) Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + k^2}$$

konvergiert.
b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

konvergiert und bestimmen Sie ihren Wert.

Aufgabe 6.7.4 (Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen).
a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge **ganzer** Zahlen mit $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$, $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^k$$

konvergiert.
b) Es sei x eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass man eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von ganzen Zahlen mit $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$, $n \geq 1$, finden kann, so dass

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^k .$$

c) Weisen Sie nach, dass man in b) die Folge **ohne Neunerperiode** wählen kann, d.h. so dass

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists l \geq n : \quad a_l \neq 9.$$

Überprüfen Sie auch, dass die Folge ohne Neunerperiode **eindeutig** durch x festgelegt ist.

Blatt 8

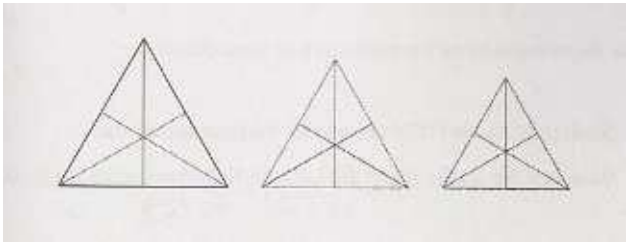
Aufgabe 6.8.1 (Rekursiv definierte Folgen).
Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über

- $a_0 := \alpha$,
- $a_{n+1} := \frac{1}{4} \cdot (a_n^2 + 3)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie die möglichen Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Trick, der in der Vorlesung bei der Berechnung von Quadratwurzeln angewandt wurde („Fixpunktgleichung").
b) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz in **Abhängigkeit von α**.
Hinweise.
• Schreiben Sie die Differenzen $a_{n+1} - b$ als Funktion von a_n, $n \in \mathbb{N}$, b ein möglicher Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Folge und die Beschränktheit.
• Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha = \pm 1, \pm 3$, $\alpha < -3$ und $\alpha > 3$, $-3 < \alpha < -1$ und $1 < \alpha < 3$, $-1 < \alpha < 1$.

Aufgabe 6.8.2 (Geometrische Reihen).
Es sei $a_0 \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir definieren rekursiv Dreiecke A_n, $n \in \mathbb{N}$. Dabei sei A_0 ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a_0 und A_{n+1} ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge a_{n+1} mit der Höhe h_n des Dreiecks A_n übereinstimmt, $n \in \mathbb{N}$.



Es seien u_n der Umfang des Dreiecks A_n und f_n sein Flächeninhalt, $n \in \mathbb{N}$.
a) Geben Sie Formeln für u_n und f_n, $n \in \mathbb{N}$, an.
b) Begründen Sie, warum die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergieren, und bestimmen Sie ihre Werte.

Aufgabe 6.8.3 (Konvergenzkriterien).
a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{4k}{3k}^{-1}$$

(absolut) konvergiert.
b) Weisen Sie die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{k}\right)^k$$

nach. (**Hinweis.** $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$.)

Aufgabe 6.8.4 (Bedingt konvergente Reihen).
Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine **bedingt** konvergente Reihe.
a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \cdot a_k$ gegen a konvergiert.
b) Weisen Sie auch nach, dass man die Vorzeichenfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so wählen kann, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \cdot a_k$ divergiert.

Blatt 9

Aufgabe 6.9.1 (Klammerungen von Reihen).
Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe und $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Auswahlfolge. Die zugehörige *Klammerung* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist die Reihe

$$\underbrace{(a_0 + \cdots + a_{n_0})}_{=:b_0} + \cdots + \underbrace{(a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k})}_{=:b_k} + \cdots,$$

d.h. die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit
• $b_0 := \sum_{l=0}^{n_0} a_l$,

• $b_k := \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} a_l$, $k \geq 1$.

Beispiel: Die Auswahlfolge $(2l)_{l\geq 1}$ führt bei der alternierenden harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ zu

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

a) Beweisen Sie: Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

b) Klammern Sie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ so, dass die resultierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ i) den Wert 1 und ii) den Wert 0 annimmt.

Aufgabe 6.9.2 (Konvergenz von Reihen).
a) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{k}-2)^2}{k^2+\sqrt{k^4+1}}$$

auf Konvergenz.
b) Zeigen Sie, dass für $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n$$

konvergiert, und berechnen Sie ihren Wert.
Hinweis: Cauchyprodukte und geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$.

Aufgabe 6.9.3 (Polynomdivision).
a) Bestimmen Sie Polynome t und r mit $p = t \cdot q + r$ und $\deg(r) < \deg(q)$ für

i) $p := x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 15x + 5$, $q := x^2 - 5x + 2$;

ii) $p := x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 4$, $q := x^2 - 3x + 4$;

iii) $p := 9x^3 + 9x^2 - 13x + 19$, $q := 3x - 1$.

b) Schreiben Sie folgende Polynome in der Form $(x-\alpha_1)^{a_1}\cdot\cdots\cdot(x-\alpha_r)^{a_r}\cdot q$ für paarweise verschiedene reelle Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, positive ganze Zahlen $a_1,\ldots,a_r$ und ein Polynom q ohne Nullstellen.

i) $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$; ii) $x^3+(1-2\sqrt{2})x^2+(2-2\sqrt{2})x+2$;

iii) $x^6 + x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 2$.

Hinweis: Bevor man bei einem Polynom vom Grad 2 oder einem Polynom ohne Nullstellen ankommt, suche man eine Nullstelle in $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

Aufgabe 6.9.4 (Kurvendiskussion).
Für die folgenden rationalen Funktionen bestimme man die Polstellen und hebbaren Definitionslücken sowie die Nullstellen der stetigen Fortsetzung und das Verhalten an den Polstellen und im Unendlichen.

i) $\frac{x^3-3x+2}{x^2-3x+2}$; ii) $\frac{x^2+4x+4}{x^3-x}$; iii) $\frac{x^3+4x^2-3x-18}{x^3-2x-4}$.

Fertigen Sie Skizzen der Funktionsgraphen an.

Blatt 10

Aufgabe 6.10.1 (Gerade und ungerade Funktionen).
Es seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_n x^n + \cdots + a_0 \end{aligned}$$

die zugehörige Polynomfunktion. Unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f gerade bzw. ungerade?

Aufgabe 6.10.2 (Perioden).
a) Welches sind die Perioden einer konstanten Funktion?
b) Welches sind die Perioden der Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} ? \end{aligned}$$

Gibt es eine primitive Periode?
c) Es sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine periodische und **stetige** Funktion. Nehmen Sie an, dass f nicht konstant ist, und zeigen Sie, dass f eine primitive Periode hat.

Aufgabe 6.10.3 (Injektive stetige Funktionen).
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie: Wenn f injektiv ist, dann ist f entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

Aufgabe 6.10.4 (Wertebereich und Extrema einer Funktion).
Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

a) Ist die Funktion f stetig? (Begründung!)
b) Bestimmen Sie den Wertebereich von f. Nimmt f ein Minimum bzw. ein Maximum an?
Hinweis. Sie dürfen lediglich den Inhalt der Vorlesung bis einschließlich Stetigkeit verwenden. Differenzieren ist verboten.

Blatt 11

Aufgabe 6.11.1 (Eine Funktionalgleichung).
Bestimmen Sie alle **stetigen** Funktionen $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

genügen.

Aufgabe 6.11.2 (Konvergenzradien von Potenzreihen).
a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

i) Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ und $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ für $n \geq n_0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert.

ii) Es gelte $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für **unendlich viele** $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent ist.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^4}{(4k)!} \cdot x^k.$$

(**Hinweis:** Quotientenkriterium und Teil a) i) der Aufgabe.)
c) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^k \cdot (x-2)^k.$$

(**Hinweis:** Wurzelkriterium und Teil a) ii) der Aufgabe.)

Aufgabe 6.11.3 (Exponentialfunktion und Sinus).
a) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}.$$

Aufgabe 6.11.4 (Die Formel von Cauchy–Hadamard).
Beweisen Sie den Satz von Cauchy–Hadamard[10] aus der Vorlesung.

Blatt 12

Aufgabe 6.12.1 (Ableitungen I).
a) Beweisen Sie mit Hilfe des Grenzwerts

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \quad \text{(Blatt 11, Aufgabe 3 b)}$$

und der Funktionalgleichung, dass die Exponentialfunktion überall differenzierbar ist und

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \exp'(x) = \exp(x)$$

gilt.
Hinweis: Sie dürfen die allgemeine Ableitungsregel für Potenzreihen **nicht** benutzen.
b) Es seien $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $n \geq 1$ und $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass auch die Produktfunktion $f \cdot g: D \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar ist und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

gilt.

Aufgabe 6.12.2 (Die Hyperbelfunktionen).
Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} \sinh: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sinh(x) := \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \end{array}$$

[10] Jacques Salomon Hadamard (1865 - 1963), französischer Mathematiker.

heißt *Hyperbelsinus* oder *Sinus hyperbolicus* und die Funktion

$$\begin{aligned} \cosh\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cosh(x) := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \end{aligned}$$

Hyperbelkosinus oder *Kosinus hyperbolicus*.
a) Welches Symmetrieverhalten weisen diese Funktionen auf?
b) Stellen Sie die beiden Hyperbelfunktionen als Potenzreihen dar.
c) Überprüfen Sie die Identität

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

d) Weisen Sie

$$\begin{aligned} W(\sinh) &= \mathbb{R} \\ W(\cosh) &= [1, \infty) \end{aligned}$$

nach.
e) Zeigen Sie, dass die Hyperbelfunktionen differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitungen.
f) Verifizieren Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

die Umkehrfunktion von sinh ist und

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcosh}\colon [1, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

diejenige von $\cosh_{|[0,\infty)}$.
g) Der *Hyperbeltangens* oder *Tangens hyperbolicus* ist die Funktion

$$\begin{aligned} \tanh\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie die Identität

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x) + 1}.$$

Aufgabe 6.12.3 (Ableitungen II).
Bestimmen Sie für folgende Ausdrücke die maximalen Definitionsbereiche der zugehörigen Funktion und die Ableitung:

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$
b) $\sqrt{x}$
c) $a^x, \quad a \in \mathbb{R}_{>0}$
d) $\tanh(x)$
e) x^{x^x}.

Blatt 13

Aufgabe 6.13.1 (∞ als Wert der Ableitung).
Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, für die

$$\lim_{h\to\infty} \Delta_{f,0}(h) = \infty$$

gilt und die in 0 **nicht stetig** ist.
(Dies ist ein Grund dafür, dass wir ∞ nicht als Wert der Ableitung zugelassen haben.)

Aufgabe 6.13.2 (Kurvendiskussion).
a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion

$$f\colon x \longmapsto \frac{x^3}{x^2-4}.$$

b) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion f.
c) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f.
d) Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion f an den Polstellen und das Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
e) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion f.
f) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.
g) Ermitteln Sie die Wendepunkte von f.
h) Beschreiben Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten von f.
i) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 6.13.3 (Extrema unter Nebenbedingungen). Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\cdot y \end{array}$$

und die Kreislinie

$$S^1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf S^1. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
a) Für $(x,y) \in S^1$ mit $y \geq 0$ bzw. $y \leq 0$ kann man y als Funktion von x schreiben. Tun Sie dies und setzen Sie den erhaltenen Ausdruck in $f(x,y)$ ein. Sie erhalten zwei Funktionen

$$f_\pm\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f_+ bzw. f_- auf dem offenen Intervall $(-1,1)$ mit den Methoden der Differentialrechnung.
c) Berechnen Sie die Funktionswerte in den in b) gefundenen Extremstellen sowie für $x=-1$ und $x=1$. Welches sind die globalen Extremstellen?

Aufgabe 6.13.4 (Ableitungen).
a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcll} \tan'(x) & = & \dfrac{1}{\cos^2(x)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \cot'(x) & = & \dfrac{-1}{\sin^2(x)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\cdot\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \} \end{array}$$

gilt.
b) Überprüfen Sie folgende Formeln für $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

c) Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^{\alpha}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.

Blatt 14 (=Analysis II, Blatt 1)

Aufgabe 6.14.1.
Bestimmen Sie für die folgenden Ausdrücke jeweils die Menge D aller reellen Zahlen, für die sie definiert sind. Geben Sie für die resultierenden Funktionen $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ jeweils eine Stammfunktion $F\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ an.

$$\text{a)}\quad f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 5, \quad \text{b)}\quad f(x) = \frac{5}{3+3x^2} - \frac{1}{4}x^4,$$

$$\text{c)}\quad f(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\cos^2(x)},$$

$$\text{d)}\quad f(x) = 3\sin(x) - \frac{6}{x} + 7x^2, \quad \text{e)}\quad f(x) = -3\exp(x) - \cos(x).$$

Aufgabe 6.14.2 (Die Substitutionsregel).
a) Berechnen Sie folgende Integrale durch geeignete Substitutionen.

$$\text{i)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t, \quad \text{ii)}\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t, \quad \text{iii)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{5+x}{5-x}\mathrm{d}x.$$

b) Lösen Sie die folgenden Integrale mit der angegebenen Substitution.

$$\text{i)}\quad \int_{0}^{\frac{1}{2}} x\cdot\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,\ x = \sin(u), \quad \text{ii)}\quad \int \frac{2-x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\ u = 1+\sqrt{x}.$$

Aufgabe 6.14.3 (Partielle Integration).
Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration. (Unter Umständen muss mehrmals partiell integriert werden.)

$$\text{a)}\quad \int x\cdot\sin(3x)\mathrm{d}x, \quad \text{b)}\quad \int \arctan(x)\mathrm{d}x, \quad \text{c)}\quad \int \sin^2(\omega t)\mathrm{d}t,\ \omega \in \mathbb{R},$$

$$\text{d)}\quad \int \exp(x)\cdot\cos(x)\mathrm{d}x, \quad \text{e)}\quad \int x^2\cdot\exp(-x)\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 6.14.4.
Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = 0$$

für alle stetigen Funktionen $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(a) = 0 = g(b)$ gilt.
Beweisen Sie, dass $f(x) = 0$, $x \in [a,b]$, folgt.

Blatt 15 (=Analysis II, Blatt 2)

Aufgabe 6.15.1 (Integration durch Partialbruchzerlegung).
Es seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome mit $\deg(p) < \deg(q)$. Es gebe reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, so dass

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{\mu_1} \cdot \cdots \cdot (x-\alpha_r)^{\mu_r}.$$

Um

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

zu bestimmen, berechne man die reellen Zahlen c_{ij}, $j = 1, \ldots, \mu_i$, $i = 1, \ldots, r$, durch die Gleichung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{c_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}.$$

Die einzelnen Summanden lassen sich dann elementar integrieren.
Ermitteln Sie mit diesem Verfahren

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx.$$

Aufgabe 6.15.2 (Die Regel von de l'Hôpital).
a) Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right).$$

b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\exp(x)} = 0$$

gilt. (Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenzfunktion.)

Aufgabe 6.15.3 (Newton-Verfahren).
a) Es ist eine nährungsweise Lösung der Gleichung $\cos(x) = x^2$ zu bestimmen. Führen Sie dazu sechs Iterationen des Newton-Verfahrens zu den Startwerten $x_0 := -0,1$ und $x_0 := 1$ aus. Diskutieren Sie das Ergebnis.
b) Es sei

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{\frac{4}{3}}, & \text{falls } x \geq 0 \\ -|x|^{\frac{4}{3}}, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Für welche Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert das Newton-Verfahren? Können Sie etwas über die Geschwindigkeit der Konvergenz aussagen?
c) Es sei

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|}, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Bestimmen Sie die Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$, für die das Newton-Verfahren konvergiert.

Aufgabe 6.15.4 (Die Trapezregel).
Es sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x)\cdot\sin(5x). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie mit der Trapezregel Näherungswerte für

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

indem Sie das Intervall $[0,1]$ in 2^k gleichlange Teilintervalle für $k = 0,\ldots,5$ zerlegen.

Blatt 16 (=Analysis II, Blatt 3)

Aufgabe 6.16.1 (Newton- vs. Fixpunktverfahren).
Man stelle das Newton-Verfahren als Spezialfall des Fixpunktverfahrens dar und formuliere das sich aus dieser Sichtweise ergebende hinreichende Kriterium für die Konvergenz des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 6.16.2 (Uneigentliche Integrale I).
a) Bestimmen Sie die Werte der folgenden uneigentlichen Integrale:

i) $\displaystyle\int_0^\infty \big(\exp(-2x)+\exp(-3x)+\exp(-4x)\big)\mathrm{d}x,$

ii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$ (**Hinweis:** Substitution $t = 4-x^2$).

b) Konvergiert

$$\int_0^1 \log(x)\mathrm{d}x?$$

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\int_0^\infty x^2\cdot\exp(-\alpha\cdot x)\mathrm{d}x?$$

Geben Sie im Fall der Konvergenz den Wert des Integrals an.

Aufgabe 6.16.3 (Uneigentliche Integrale II).
a) Zeigen Sie, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

konvergieren, und bestimmen Sie ihre Werte. Schließen Sie, dass auch das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

konvergiert.
b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\cdot|\log(x)|}$$

auf Konvergenz.
c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$$

divergiert.

Aufgabe 6.16.4 (Das Integralvergleichskriterium).
a) Konvergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \log^2(k)}?$$

b) Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f(x) > 0$, $x \in [1,\infty)$, gilt, das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ divergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert.

Blatt 17 (=Analysis II, Blatt 4)

Aufgabe 6.17.1 (Euler–Mascheroni-Konstante und Γ-Funktion).
Recherchieren Sie Eigenschaften der Euler–Mascheroni-Konstante und der Γ-Funktion sowie den Zusammenhang zwischen Euler–Mascheroni-Konstante und Γ-Funktion.

Aufgabe 6.17.2 (Die Γ-Funktion).
a) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Funktionen $F_\lambda\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit der Eigenschaft

$$F_\lambda(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

gibt, so dass $\Gamma - F_\lambda$ differenzierbar ist, $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) Beweisen Sie die Legendre[11]-Verdopplungsformel:

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \cdot \Gamma(x), \quad x > 0.$$

Aufgabe 6.17.3 (Die Taylorformel).
a) Zeigen Sie, dass für $x \in (-1,1)$, $n \geq 1$ und ein geeignetes $\xi_n \in (0,1)$ die Taylorformel

$$\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + R_{2n}(x)$$

mit dem Restglied

$$R_{2n}(x) = -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{(1+\xi_n \cdot x)^{2n+1}} + \frac{1}{(1-\xi_n \cdot x)^{2n+1}}\right)$$

gilt.
b) Benutzen Sie diese Formel für $n = 2$ und eine geeignete Abschätzung des Restglieds, um $\log(2/3)$ bis auf einen Fehler, der kleiner als $5 \cdot 10^{-4}$ ist, zu berechnen.

[11] Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), französischer Mathematiker.

Aufgabe 6.17.4 (Taylorpolynome und -reihen).
a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad neun am Entwicklungspunkt 0 der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon (0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}. \end{array}$$

b) Berechnen Sie die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 1 für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x \cdot \exp(x-1)$.

Aufgabe 6.17.5 (Taylorreihen).
a) Es sei

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.
b) Überprüfen Sie

$$T_{f,0}(x) = 0.$$

Literaturhinweise

(1) T. Arens, F. Hettlich, Ch. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel, *Mathematik*, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2008, xiv+1496 S. ISBN 978-3-8274-1758-9/hbk.

(2) Ch. Blatter, *Analysis* 1, 3. Aufl., Berlin etc., Springer-Verlag, 1980, xviii+223 S. ISBN 3-540-09483-0.
S.a. `http://www.math.ethz.ch/~blatter/`.[1]

(3) Th. Bröcker, *Analysis* 1, 2., korr. Aufl., Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1995, ii+242 S. ISBN 3-86025-417-0.
S.a. `www.mathematik.uni-regensburg.de/broecker/index.htm`.

(4) O. Forster, *Analysis* 1. *Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, 9. überarb. Aufl., Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik, Braunschweig, 2008, x+290 S. ISBN 978-3-8348-0395-5/pbk

(5) U. Friedrichsdorf, A. Prestel, *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg Studium **58**, Grundkurs Mathematik, Braunschweig/Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn, 1985, vi+103 S. ISBN 3-528-07258-X.

(6) K. Fritzsche, *Grundkurs Analysis* 1. *Differentiation und Integration in einer Veränderlichen. Fr Bachelor und Diplom,* 2. Aufl., Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2008, xii+372 S. ISBN 978-3-8274-1878-4/pbk

(7) J. Havil, *Gamma. Eulers Konstante, Primzahlstrände und die Riemannsche Vermutung*, Berlin: Springer, 2007, xvi+307 S. ISBN 978-3-540-48495-0/hbk.

(8) H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.*, 17. überarb. Aufl., Studium, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, 643 S. ISBN 978-3-8348-0777-9/pbk.

(9) G.L. Isaacs, *Real numbers. A development of the real numbers in an axiomatic set theory.*, European Mathematics Series, London–New York–Sydney–Toronto–Mexico–Johannesburg, McGraw–Hill, 1968, x+112 S.

(10) H.H. Körle, *Die phantastische Geschichte der Analysis. Ihre Probleme und Methoden seit Demokrit und Archimedes. Dazu die Grundbegriffe von heute.*, München, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2009, xiv+217 S. ISBN 978-3-486-58825-5/pbk.

(11) E. Landau, *Grundlagen der Analysis. Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen und komplexen Zahlen. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. In ein neues Gewand gekleidet*

[1] In den neueren Auflagen und der Online-Version werden Dedekindsche Schnitte kaum noch behandelt.

und abgerundet mit einem Kapitel über Potenzen mit reellen Exponenten von Heinz Dalkowski., Berliner Studienreihe zur Mathematik 11, Lemgo, Heldermann Verlag, 2004, xii+102 S. ISBN 3-88538-111-7/pbk; ISBN 3-88538-501-5/E-Book.

(12) W. Rautenberg, *Reelle Zahlen in elementarer Darstellung*, Klett Studienbücher Mathematik, Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1979, 181 S.

(13) W. Rautenberg, *Einführung in die mathematische Logik. Ein Lehrbuch.*, 3. Aufl., Studium, Wiesbaden, Vieweg+Teubner, 2008, xxi+256 S. ISBN 978-3-8348-0578-2/pbk.

(14) R.H. Schulz, *Lineare Algebra* I, `http://page.mi.fu-berlin.de/schulz/Lina/lina1.html`.

(15) V. Schulze, *Lineare Algebra,* `http://page.mi.fu-berlin.de/klarner/index`.

(16) H.-P. Tuschik, H. Wolter, *Mathematische Logik – kurzgefaßt*, 2. Aufl., Spektrum Hochschultaschenbuch, Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag, 2002, viii+214 S. ISBN 3-8274-1387-7/pbk.

(17) N.N. Vorobiev, *Fibonacci numbers*, Birkhäuser, Basel, 2002, ix+176 S. ISBN 3-7643-6135-2/pbk.

Stichwortverzeichnis

abelsche Gruppe, 27
abgeschlossen, 8
Ableitung, 122
    der Umkehrfunktion, 129
    Monotonie und erste —, 132
Abschluss, 100
absolut
    er Fehler, 62
    konvergent, 71
Absolutbetrag, 28, 86, 92, 191
abzählbar, 38
    e Menge, 38
    unendlich, 38
Achilles und die Schildkröte, 63
Addition, 1, 2, 4, 16
    Dedekindscher Schnitte, 33
    ganzer Zahlen, 22
    komplexer Zahlen, 169
    rationaler Zahlen, 25
    stheoreme, 151, 171
    von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen, 83
    von Folgen rationaler Zahlen, 82
Additionstheoreme, 151, 171
alternierend
    e harmonische Reihe, 71, 72, 76, 115
    e Reihe, 69
angeordneter Körper, 27
Anordnung, 2, 4, 18, 24, 26, 32
Antinomie von Russell und Zermelo, 6
Antisymmetrie, 18
Anzahl der Elemente, 38
Äquivalenz
    klasse, 20
    relation, 20
Archimedes, 35
Arkus
    kosinus, 99
    sinus, 99
Assoziativgesetz, 17, 24, 27
äußere Funktion, 128
Auswahlfolge, 56
Axiom, 7
    Ersetzungs—, 10
    Extensionalitäts—, 7
    Fundierungs—, 12
    Nullmengen—, 10
    Paarmengen—, 10, 11
    Peano —e, 12
    Potenzmengen—, 11, 32
    Teilmengen—, 8, 32
    Unendlichkeits—, 13
    Vereinigungsmengen—, 10
axiomatische Mengenlehre, 5

Banach, 162
    scher Fixpunktssatz, 162
Baum
    binärer —, 229
    Calkin–Wilf- —, 229
bedingt konvergent, 72
Bernoulli, 14
    sche Ungleichung, 14
beschränkt, 31, 68
    e Folge, 49
    nach oben —, 31, 49
    nach unten —, 31, 49
bestimmt divergent, 59, 65
Betrag einer komplexen Zahl, 169
Binet, 228
Binomialkoeffizient, 35, 220
binomisch
    e Formel, 50
    e Reihe, 220
    er Lehrsatz, 36, 220
Bohr, 211
Bolzano, 57
Borel, 219
Bruch, 2

Calkin, 229
    –Wilf-Baum, 229
Cantor, 5, 40, 44
    s Diagonalverfahren, 40
Cauchy
    Folge, 58, 170
    Kriterium, 67

Produkt, 80, 117
Cohen, 44
Curry, 6

De Morgan, 224
sche Regeln, 224
Dedekind, 14
scher Rekursionssatz, 14, 15
scher Schnitt, 31
Definitionsbereich, 89
Dezimal
bruch, 3, 37, 232
zahlen, 3, 37
Diagonalverfahren, 40
dicht, 34
Differentialgleichung der Exponentialfunktion, 150
Differenz, 93
enquotient, 122
differenzierbar, 122
linksseitig —, 123
rechtsseitig —, 123
stetig —, 123
Distributivgesetz, 17, 24, 27
divergent, 49, 201, 203, 204
bestimmt —, 59, 65
Division mit Rest, 3, 107
Dorfbarbier, 6
Dreiecksungleichung, 29
Dualbruch, 42
entwicklung, 43
Durchschnitt, 9

Einheitswurzeln, 172
Element, 5, 7
Anzahl der —e, 38
inverses —, 24, 27
endlich, 38
e Menge, 38
Entwicklungspunkt, 218
Epimenides, 6
Ersetzungsaxiom, 10
Eudoxos, 35
Euler, 50, 207
Mascheroni-Konstante, 207
sche Formel, 171
sche Zahl, 50, 217
Existenz von Minima und Maxima, 105
Exponentialfunktion, 117, 150
Differentialgleichung der —, 150
Funktionalgleichung der komplexen —, 171
komplexe —, 171
Extensionalitätsaxiom, 7
Extremum, 130
globales —, 130
hinreichendes Kriterium für lokales —, 133
lokales —, 130
notwendiges Kriterium für lokales —, 130

Faktorregel, 126, 175, 182
Fakultät, 16
Familie, 10
Fehler
absoluter —, 62
relativer —, 62
Feinheit, 186
Fibonacci, 45, 228
Folge, 45
Zahlen, 228
Fixpunkt, 161
gleichung, 232
Folge, 45
beschränkte —, 49
Cauchy—, 58
der Partialsummen, 64
Fibonacci—, 45
Funktionen—, 111
komplexer Zahlen, 170
konstante —, 49
Formel von Moivre–Binet, 228
Fraenkel, 7
Fundierungsaxiom, 12
Funktion
algleichung
der Exponentialfunktion, 117
der komplexen Exponentialfunktion, 171
äußere —, 128
enfolge, 111
ganzrationale —, 106
gebrochen rationale —, 109
gerade —, 95
Grenz—, 111
innere —, 128
konstante —, 90
lineare —, 90
Polynom —, 106
quadratische —, 91
rationale —, 109
reelle —, 89
Sägezahn—, 96
sgraph, 14
ungerade —, 95

Γ-Funktion, 207

ganze Zahlen, 2, 22
ganzrationale Funktion, 106
Gauß, 13, 212
    klammer, 92
    sche Glockenkurve, 214
gebrochen rationale Funktion, 109
geometrische Reihe, 64, 65
geordnetes Paar, 11
gerade Funktion, 95
gleich, 7, 89, 113
gleichmäßig
    konvergent, 112
    stetig, 178
globales
    Extremum, 130
    Maximum, 130
    Minimum, 130
Gödel, 7, 44
Grad, 106
Graph, 89, 225
Grenz
    funktion, 111
    wert, 49, 100
      linksseitiger —, 100
      rechtsseitiger —, 100
größte untere Schranke, 30

Hadamard, 236
halboffen, 9
harmonische Reihe, 59, 66, 68, 77, 115, 202
Häufungspunkt, 56, 100
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 191
hebbare Definitionslücke, 109
Hilbert, 43
    s Hotel, 43
hinreichendes Kriterium für lokales Extremum, 133
Hölder, 209
    sche Ungleichung, 209
Hôpital, 144
    Die Regel von de l'—, 144
Hyperbel, 93
    kosinus, 237
    sinus, 237
    tangens, 237

Imaginärteil, 169
Induktion
    sanfang, 13
    sschritt, 13
    svoraussetzung, 13
    vollständige —, 13
Infimum, 30
injektiv, 97
innere Funktion, 128
Integral, 177
    einer Treppenfunktion, 175
    Ober —, 176
    uneigentliches —, 201–203
    Unter —, 176
    vergleichskriterium, 205
integrierbar, 177
Intervall, 8
    abgeschlossenes —, 8
    halboffenes —, 9
inverses Element, 24, 27
irrationale Zahlen, 4, 224
isoliertes lokales
    Maximum, 130
    Minimum, 130
Iteration
    sverfahren, 160
    svorschrift, 160

Kaninchen, 46
Kante, 226
Kardinalzahl, 42
kartesisches Produkt, 11, 40
Kettenregel, 128
Klammerung, 233
kleinste obere Schranke, 30
kommutativer Ring, 24
Kommutativgesetz, 17, 24, 27
komplexe
    Exponentialfunktion, 171
    Zahlen, 169
Komposition, 94
konjugiert komplex, 169
konkav, 134
konstant
    e Folge, 49
    e Funktion, 90
Kontinuumshypothese, 44
konvergent, 49, 170, 201, 202, 204
    gleichmäßig —, 112
    punktweise —, 111
    uneigentlich —, 59, 65
Konvergenz, 48
    absolute —, 71
    bedingte —, 72
    einer Reihe, 65
    radius, 115, 218
konvex, 134, 209
    logarithmisch —, 209
Körper, 3, 26
    angeordneter —, 27

Kosinus, 95, 119, 151, 216
    hyperbolicus, 237
Kotangens, 96
Kreiszahl π, 154

Lagrange, 215
    sche Form des Restglieds, 215
leere Menge, 9
Legendre, 242
    Verdopplungsformel, 242
Leibniz, 7
    Kriterium, 70, 76
    sches Gesetz, 7
Limes
    inferior, 231
    superior, 231
lineare Funktion, 90
Linearfaktor, 108
linker Nachfolger, 229
linksgekrümmt, 134
linksseitig
    differenzierbar, 123
    er Grenzwert, 100
    stetig, 101
Löcher, 3, 29
logarithmisch konvex, 209
Logarithmus, 118, 151
    natürlicher —, 118, 151
lokales
    Extremum, 130
    Maximum, 130
    Minimum, 130

Majorantenkriterium, 76, 230
Maple, 138, 200
Mascheroni, 207
Maximum, 31, 105, 130
    globales —, 130
    isoliertes lokales —, 130
    lokales —, 130
Menge, 5
    abzählbar unendliche —, 38
    abzählbare —, 38
    aller Mengen, 5
    endliche —, 8, 38
    leere —, 9
    ndifferenz, 10
      symmetrische —, 224
    überabzählbar unendliche —, 38
    unendliche —, 38
Mertens, 81
Minimum, 31, 105, 130
    globales —, 130
    isoliertes lokales —, 130
    lokales —, 130
Mittelwertsatz
    der Differentialrechnung, 131
    der Integralrechnung, 185
    zweiter —, 144
Moivre, 228
Mollerup, 211
Momentangeschwindigkeit, 121
monoton
    fallend, 55, 98
    wachsend, 55, 98
Monotonie, 176, 182
    und erste Ableitung, 132
    verhalten, 54
Multiplikation, 1, 2, 4
    Dedekindscher Schnitte, 33
    ganzer Zahlen, 22
    komplexer Zahlen, 169
    natürlicher Zahlen, 16
    rationaler Zahlen, 25
    von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen, 83
    von Folgen rationaler Zahlen, 82

nach
    oben beschränkt, 31, 49
    unten beschränkt, 31, 49
Nachfolger, 229
    abbildung, 1, 12
    linker —, 229
    rechter —, 229
Näherungsverfahren, 160
natürliche Zahlen, 1, 12
    alle — sind gleich, 225
    Eindeutigkeit der —, 16
natürlicher Logarithmus, 118, 151
Nennerpolynom, 109
Neunerperiode, 3, 37, 232
Neutralelement, 1, 17, 24, 27
Newman, 229
Newton, 165
Normalparabel, 124
notwendiges Kriterium für lokales Extremum, 130
Null, 1
    folge, 49
    mengenaxiom, 10
    polynom, 106
    stelle, 94
    teiler, 83

obere Schranke, 30
Oberintegral, 176
ordnungsvollständig, 30, 32

Paar
    geordnetes —, 11
    mengenaxiom, 10, 11
Parabel, 91
Paradoxon
    Currys —, 6, 7
    des Epimenides, 6
Partialbruchzerlegung, 240
Partialsumme, 64
Partielle Integration, 195
Peano-Axiome, 12
Periode, 96
    primitive —, 96
periodisch, 96
Permutation, 72
Polstelle, 100
    mit Vorzeichenwechsel, 101
Polynom, 106
    division, 107
    funktion, 106
Potenz
    en, 118
    menge, 11, 42, 225
      naxiom, 11, 32
    reihe, 113
primitive Periode, 96
Prinzip vom kleinsten Element, 20
Produkt, 33, 93
    kartesisches —, 11, 40
    regel, 126
punktweise konvergent, 111

quadratisch
    e Funktion, 91
    e Konvergenz, 62
Quadratwurzel, 60
Quotient
    enkriterium, 77
    enregel, 126

rationale
    Funktion, 109
    Zahlen, 2, 25, 224
Raum
    der Cauchy-Folgen rationaler Zahlen, 83
    der Folgen rationaler Zahlen, 82
Realteil, 169
rechter Nachfolger, 229
rechtsgekrümmt, 134
rechtsseitig
    differenzierbar, 123
    er Grenzwert, 100
    stetig, 101
reelle
    Funktion, 89
    Zahlen, 3
Reflexivität, 18, 20
Regel von de l'Hôpital, 144
Reihe, 65
    alternierende —, 69
    alternierende harmonische —, 71, 72, 76, 115
    binomische —, 220
    geometrische —, 64, 65
    harmonische —, 59, 66, 68, 77, 115, 202
    komplexer Zahlen, 170
    konvergente —, 65
rekursive Definition, 14
relativer Fehler, 62
Repräsentant, 20
Restglied, 215
    der Exponentialfunktion, 217
Riemann, 186
    sche Summe, 186
Ring, 24
Rolle, 131
Russell, 6

Sägezahnfunktion, 96
Sattelpunkt, 135
Satz
    des Archimedes, 35
    des Eudoxos, 35
    vom kleinen Gauß, 13
    von Bohr–Mollerup, 211
    von Bolzano–Weierstraß, 57
    von Borel, 219
    von Mertens, 81
    von Rolle, 131
Scheitelpunkt, 91, 225
    form, 91
Schnitt, 31
Schranke
    größte untere —, 30
    kleinste obere —, 30
    obere —, 30
    untere —, 20, 30
Sekante, 121
Selbstbezug, 6
Sinus, 95, 119, 151
    hyperbolicus, 237
smf, 98
smw, 98
Stammfunktion, 191
stetig, 101, 170
    ε-δ-Definition, 102

differenzierbar, 123
e Ergänzung/Fortsetzung, 103
gleichmäßig —, 178
linksseitig —, 101
rechtsseitig —, 101
streng monoton
fallend, 55, 98
wachsend, 55, 98
Substitutionsregel, 193
Summe, 93
nregel, 126, 175, 182
nzeichen, 224
Supremum, 30, 37
Symmetrie, 20
symmetrische Mengendifferenz, 224

Tangens, 96, 155
hyperbolicus, 237
Taylor, 215
polynom, 217
reihe, 218
sche Formel, 215
Teil
folge, 56
menge, 8
naxiom, 8, 32
Teiler, 223
menge, 223
teilerfremd, 229
Totalität, 18, 32
Transitivität, 18, 20
Transposition, 72
Trapez, 199
regel, 199
Treppenfunktion, 174

überabzählbar unendlich, 38
Uhr, 21
umkehrbar, 97
Umkehrfunktion, 97
Ableitung der —, 129
Umordnung, 72
absolut konvergenter Reihen, 72
bedingt konvergenter Reihen, 74
uneigentlich
es Integral, 201–203
konvergent, 59, 65
unendlich, 38
e Menge, 38
e Reihe, 65
Unendlichkeitsaxiom, 13
ungerade Funktion, 95
Ungleichung
Höldersche —, 209
unstetig, 101
untere Schranke, 20, 30
Unterintegral, 176

verbindbar, 226
Vereinigung, 10
smenge, 10
naxiom, 10
Verknüpfung, 94
Vertauschung von Differentiation und Grenzwertbildung, 147
vollständige Induktion, 13
Vorzeichenfunktion, 29, 92, 190

Wahrheitstabelle, 6
Wallis, 198
sches Produkt, 198
Weg, 226
Weierstraß, 57
Weihnachtsmann, 6
Wendepunkt, 135
Wertebereich, 89
Wilf, 229
wohldefiniert, 23, 25
Wohlordnung, 20
Wurzel, 60, 168
kriterium, 79

Zahlen
ganze —, 2, 22
irrationale —, 4, 224
komplexe —, 169
natürliche —, 1, 12
rationale —, 2, 25, 224
reelle —, 3
Zählerpolynom, 109
Zenon, 63
Zermelo, 6, 7
zweiter Mittelwertsatz, 144
Zwischenwertsatz, 105, 157