

# Skript zur Vorlesung „Geometrie“

Alexander Schmitt

Berlin, Sommersemester 2020



# Inhalt

<b>Einführung</b> . . . . .	v
<b>I Kegelschnitte</b> . . . . .	1
I.1 Der Kegel, Beispiele für Durchschnitte eines Kegels mit einer Ebene . . . . .	1
I.1.1 Das Standardskalarprodukt, die euklidische Norm und der euklidische Abstand . . . . .	1
I.1.2 Der Kegel . . . . .	3
I.1.3 Durchschnitte von $K$ und speziellen Ebenen . . . . .	3
I.2 Koniken . . . . .	6
I.2.1 Parabeln . . . . .	6
I.2.2 Ellipsen . . . . .	8
I.2.3 Hyperbeln . . . . .	11
I.3 Die dandelinischen Sphären . . . . .	15
I.3.1 Querschnitte . . . . .	15
I.3.2 Fall D) . . . . .	16
I.3.3 Fall E) . . . . .	19
I.3.4 Fall F) . . . . .	20
I.3.5 Familien von Kegelschnitten . . . . .	20
I.4 Reflexionen an Koniken . . . . .	22
I.4.1 Tangenten . . . . .	23
I.4.2 Parabeln . . . . .	23
I.4.3 Hyperbeln . . . . .	25
I.4.4 Ellipsen . . . . .	29
<b>II Transformationen in der euklidischen und affinen Geometrie</b> . . . . .	31
II.1 Isometrien . . . . .	31
II.1.1 Die Isometriegruppe . . . . .	33
II.1.2 Die orthogonale Gruppe . . . . .	35
II.1.3 Kongruenz in der euklidischen Geometrie . . . . .	40
II.2 Affine Räume . . . . .	42
II.2.1 Beschreibung affiner Abbildungen mit Matrizen . . . . .	46
II.2.2 Kongruenz in der affinen Geometrie . . . . .	47
II.2.3 Quadriken . . . . .	48
II.2.4 Quadriken in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	58

<b>III Projektive Geometrie</b>	<b>65</b>
III.1 Perspektivische Abbildungen	65
III.1.1 Heuristische Diskussion perspektivischer Abbildungen	66
III.1.2 Der Satz von Desargues	67
III.2 Die Projektivierung eines Vektorraums	69
III.2.1 Die projektive lineare Gruppe	72
III.3 Die projektive Ebene	73
III.3.1 Einbettung der affinen Ebene	73
III.3.2 Zur Geometrie der reellen projektiven Ebene	74
III.4 Der Hauptsatz der projektiven Geometrie	82
III.4.1 Projektive Äquivalenz von Vierecken	82
III.4.2 Der Satz von Desargues	83
III.4.3 Bijektive Selbstabbildungen, die Geraden auf Geraden abbilden, und Körperautomorphismen	85
III.5 Zentralkollineationen	90
III.6 Das Doppelverhältnis	95
III.6.1 Definition und einfache Eigenschaften	96
III.6.2 Invarianz unter projektiven Transformationen	97
III.6.3 Der Satz von Pappos	100
III.6.4 Eine Anwendung des Doppelverhältnisses	101
III.7 Quadriken im projektiven Raum	105
III.7.1 Tangentialräume	106
III.7.2 Die Klassifikation von Quadriken bis auf projektive Äquivalenz	108
III.7.3 Der projektive Abschluss	112
III.7.4 Über Koniken in der projektiven Ebene	120
<b>IV Hyperbolische Geometrie</b>	<b>129</b>
IV.1 Über Kreise	129
IV.1.1 Orthogonale Kreise	129
IV.1.2 Der Körper der komplexen Zahlen	132
IV.1.3 Die Inversion an einem Kreis	133
IV.2 Die hyperbolische Ebene	137
IV.2.1 Geraden	137
IV.2.2 Spiegelungen	140
IV.2.3 Die Symmetriegruppe der hyperbolischen Ebene	142
IV.3 Der hyperbolische Abstand	149
IV.3.1 Ein anderes Modell der hyperbolischen Ebene	149
IV.3.2 Abstandsmessung auf dem Rotationshyperboloid	151
IV.3.3 Die induzierte Abstandsmessung auf der Einheitskreisscheibe	152
IV.3.4 Kreise in der hyperbolischen Ebene	157
IV.3.5 Die hyperbolische Metrik	160
IV.4 Hyperbolische Trigonometrie	165
IV.4.1 Identitäten zwischen den hyperbolischen Funktionen	166
IV.4.2 Der Kosinus- und der Sinussatz	167
IV.4.3 Rechtwinklige Dreiecke	169
IV.4.4 Die Winkelsumme eines hyperbolischen Dreiecks	170

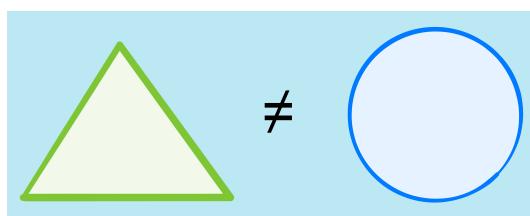
<b>Literaturhinweise</b>	<b>177</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>181</b>



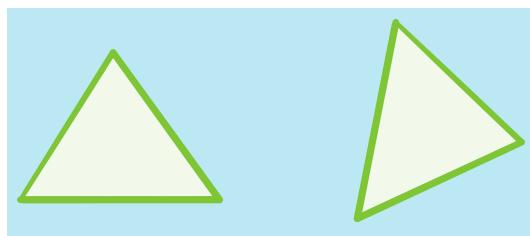
# Einführung

Geometrie befasst sich, grob gesagt, mit dem Erfassen und Einordnen von Formen. Der dreidimensionale Raum  $\mathbb{R}^3$  zusammen mit dem euklidischen Abstand  $d: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  modelliert unsere Umwelt sehr genau. Durch unsere Alltagserfahrung haben wir somit eine gute Anschauung für die mathematische Struktur  $(\mathbb{R}^3, d)$ . Schließlich ist es für die Orientierung im Alltag unerlässlich, dass wir eine Vielzahl von verschiedenen Formen, die uns als Bäume, Häuser, Autos, andere Menschen usw. begegnen, unterscheiden und einordnen können. Begeben wir uns in eine unbekannte Umgebung, dann versuchen wir uns unter Anderem dadurch zurechtzufinden, dass wir das Gesehene mit bereits bekannten Mustern und Formen vergleichen. Die Mathematik ermöglicht es uns, diese Prozesse zu formalisieren. Zunächst ist festzuhalten, dass die Mathematik eine Vielzahl von einfachen Grundformen, wie Punkten, Geraden, Kreisen, Dreiecken, Ebenen, Kugeln, Quader, Zylinder usw. beschreibt, die bereits vielen der Objekte, denen wir im Alltag begegnen, ähneln und aus denen sich komplexere Formen (näherungsweise) zusammensetzen lassen. Einige dieser Grundformen üben eine besondere Faszination aus. Dazu gehören Kugeln und Pyramiden.

Wir präzisieren die obigen Aussagen. Dazu arbeiten wir in  $\mathbb{R}^2$  statt in  $\mathbb{R}^3$ . Bereits in früher Kindheit setzt man sich mit einigen dieser Grundformen auseinander. Man lernt z.B., dass ein Kreis etwas anderes ist als ein Dreieck.



Bei den Dreiecken



ist die Entscheidung, ob sie in gewisser Weise gleich sind oder nicht, schon nicht so offensichtlich. Natürlich sind die beiden Dreiecke als Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  verschieden.

Gleichheit von Teilmengen ist aber kein hilfreiches Konzept bei der Einordnung von Formen. Um die beiden Dreiecke in obigem Bild zu vergleichen, stellen wir uns vor, dass wir sie aus Papier ausschneiden und sie dann in der Ebene durch Drehen und Verschieben bewegen und sie eventuell auch umdrehen. Wenn es dann möglich ist, die beiden Figuren zur Deckung zu bringen, nennen wir sie *kongruent*. Die obigen Dreiecke sind z.B. kongruent. Die gerade entwickelte Vorstellung lässt sich mathematisch genau fassen. Dazu betrachten wir folgende bijektive Selbstabbildungen der Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

a) (Translationen). Es sei  $v_0 \in \mathbb{R}^2$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau_{v_0}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\longmapsto v + v_0\end{aligned}$$

ist die *Translation* um den Vektor  $v_0$ . Diese Abbildung ist umkehrbar mit  $\tau_{-v_0}$  als Umkehrabbildung.

b) (Drehungen). Es sei  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  ein Winkel. Die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\varrho_\vartheta: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\vartheta) - b \cdot \sin(\vartheta) \\ a \cdot \sin(\vartheta) + b \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ist die *Drehung* um den Winkel  $\vartheta$ . Sie ist eine bijektive Abbildung mit Umkehrabbildung  $2\pi - \vartheta$ .

c) (Eine Spiegelung). Die *Spiegelung* an der  $x$ -Achse ist

$$\begin{aligned}\sigma: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist umkehrbar mit  $\sigma^{-1} = \sigma$ .

Es sei

$$S(\mathbb{R}^2) := \{\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \varphi \text{ ist bijektiv}\}$$

die Gruppe der bijektiven Selbstabbildungen von  $\mathbb{R}^2$ . Wir definieren die *euklidische Gruppe*  $G$  als die Untergruppe von  $S(\mathbb{R}^2)$ , die von den Abbildungen vom Typ a), b) und c) erzeugt wird. Sie besteht aus allen endlichen Verknüpfungen von Abbildungen vom Typ a), b) und c) und umfasst unter Anderem Spiegelungen an beliebigen Geraden und Drehungen um beliebige Zentren.

Wir haben jetzt bereits eine wichtige Zutat für eine Geometrie im Sinne des Erlanger Programms [23] von Felix Klein<sup>1</sup> gefunden. Eine Geometrie umfasst eine Menge  $M$  und eine Untergruppe

$$G \subset \{\varphi: M \longrightarrow M \mid \varphi \text{ ist bijektiv}\}.$$

Wenn diese Daten gegeben sind, dann bezeichnen wir zwei Teilmengen  $X, Y \subset M$  als *kongruent*, wenn es eine Transformation  $\varphi \in G$  mit  $\varphi(X) = Y$  gibt. Es ist leicht zu sehen, dass Kongruenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Teilmengen von  $M$  ist.

<sup>1</sup>Felix Christian Klein (1849 - 1925), deutscher Mathematiker.

Wenn  $M = \mathbb{R}^2$  und  $G$  die euklidische Gruppe ist, dann charakterisieren die Kongruenzsätze (s. z.B. [25], Chapter 5) die Relation der Kongruenz auf der Menge der Dreiecke in  $\mathbb{R}^2$ . Zwei Dreiecke sind z.B. genau dann kongruent, wenn sie dieselben Seitenlängen haben („SSS“).

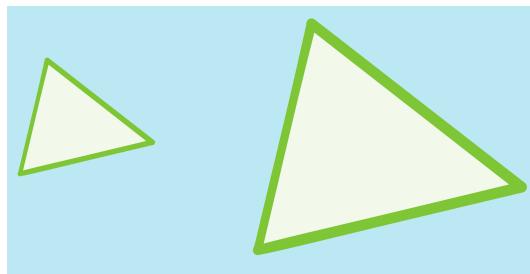
Es gibt natürlich verschiedene Gruppen, die man auf derselben Menge betrachten kann. So gibt es z.B. noch folgende bijektive Abbildungen.

d) Es sei  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  eine positive reelle Zahl. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\zeta_\lambda: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\longmapsto \lambda \cdot v\end{aligned}$$

ist dann eine *zentrische Streckung*. Sie ist bijektiv, und die Umkehrabbildung ist  $\zeta_{1/\lambda}$ .

Wir erhalten die Untergruppe  $G' \subset S(\mathbb{R}^2)$ , die von der euklidischen Gruppe  $G$  und den zentrischen Streckungen  $\zeta_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ , erzeugt wird. Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ , die unter der Gruppe  $G'$  kongruent sind, nennt man *ähnlich*. Die folgenden Dreiecke sind ähnlich aber nicht kongruent unter der euklidischen Gruppe  $G$ .



Bevor wir die Geometrien, die in dieser Vorlesung behandelt werden, kurz vorstellen, erläutern wir noch kurz die Bedeutung der Geometrie für die moderne Mathematik. Diese geht auf die Elemente von Euklid<sup>2</sup> (s. z.B. [7]) zurück, die im dritten Jahrhundert v.u.Z. entstanden. In diesem Werk hat Euklid das mathematische Wissen seiner Zeit gesammelt und auf einheitliche Weise dargestellt. Für die Geometrie der Ebene hat er ein einfaches Axiomensystem aufgestellt, das die Grundannahmen enthält. Alle Sätze der Geometrie hat er dann mittels logischer Schlussregeln auf diese Axiome zurückgeführt. Vom heutigen Standpunkt sind diese Axiome zu ungenau formuliert. Das Axiomensystem ist auch nicht vollständig, d.h., Euklid verwendet (schon ziemlich früh) Aussagen, die nicht aus den Axiomen folgen. Diese Mängel haben sich allerdings als geringfügig herausgestellt. So hat etwa der Mathematiker David Hilbert<sup>3</sup> in [18] ein neues Axiomensystem für die euklidische Ebene entwickelt, das den heutigen Standards genügt.<sup>4</sup> Auf Basis dieses neuen Axiomensystems behalten fast alle Beweise von Euklid Gültigkeit und sind auch heute noch gut nachzuvollziehen. Euklids Werk war somit grundlegend für die moderne Mathematik.

<sup>2</sup>Euklid von Alexandria, griechischer Mathematiker, der wahrscheinlich im 3. Jahrhundert v.u.Z. gelebt hat.

<sup>3</sup>David Hilbert (1862 - 1943), deutscher Mathematiker.

<sup>4</sup>Andere Axiomensysteme findet man z.B. in [25].

Im ursprünglichen Axiomensystem von Euklid (ebenso wie in Hilberts) ist das Parallelenaxiom enthalten. Es fordert, dass es zu einer Geraden  $\ell$  in der Ebene und einem Punkt  $P$  der Ebene, der nicht auf  $\ell$  liegt, genau eine Gerade  $\ell'$  gibt, die  $P$  enthält und parallel zu  $\ell$  ist, d.h.,  $\ell$  nicht schneidet. Dieses Axiom erscheint so natürlich, dass Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler über Jahrhunderte versucht haben, es aus den anderen Axiomen abzuleiten. Interessante Beiträge wurden dabei von Chayyām<sup>5</sup> [22] und Saccheri<sup>6</sup> [33] geleistet. Letzterer setzte voraus, dass das Parallelenaxiom falsch sei, und versuchte auf dieser Basis einen logischen Widerspruch zu erhalten. Er fand dabei Eigenschaften, die schwer intuitiv zu fassen sind und die er deshalb nicht zulassen wollte. Der letzte Schritt wurde dann (unabhängig voneinander) von Bolyai<sup>7</sup> und Lobatschewski<sup>8</sup> gegangen. Man betrachtet dazu die sogenannte neutrale Geometrie, in der alle Axiome bis auf das Parallelenaxiom gelten. (Saccheris Resultate haben z.B. in der neutralen Geometrie Gültigkeit.) Dieses Axiomensystem kann man nun mit dem bereits erwähnten Parallelenaxiom zum Axiomensystem der euklidischen Geometrie erweitern. Man kann aber auch das *hyperbolische Parallelenaxiom* hinzufügen. Es fordert, dass es zu einer Geraden  $\ell$  in der Ebene und einem Punkt  $P$  der Ebene, der nicht auf  $\ell$  liegt, unendlich viele Geraden existieren, die  $P$  enthalten und parallel zu  $\ell$  sind. Die fundamentale Entdeckung ist, dass dies immer noch ein konsistentes Axiomensystem ist. Dazu muss man eine mathematische Struktur angeben, in der dieses Axiomensystem erfüllt ist. Dadurch wurde engültig nachgewiesen, dass das Parallelenaxiom nicht aus den anderen Axiomen ableitbar ist. Diese fundamentale Entdeckung war nicht nur für die Mathematik bedeutsam, sondern hat weit über sie hinausgestrahlt. Das Buch [17] legt z.B. Zeugnis davon ab.

In der Vorlesung beginnen wir mit einem klassischen Thema der euklidischen Geometrie der Ebene, den Kegelschnitten. Sie entstehen, wenn man einen Kegel im dreidimensionalen Raum mit einer Ebene schneidet. Sie charakterisieren also die möglichen Lagen einer Ebene zu einem Kegel im Raum. Wir werden eine Definition von Koniken in der Ebene angeben, Gleichungen für diese Koniken bestimmen und mit einem eleganten Argument nachweisen, dass der Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene eine Konik in der betreffenden Ebene ist. Das Kapitel endet mit einigen interessanten Beobachtungen zu Reflexionen an Koniken, die auch technische Anwendungen betreffen.

Das zweite Kapitel greift zunächst die oben erwähnte euklidische Gruppe auf. Die Elemente dieser Gruppe werden als diejenigen bijektiven Selbstabbildungen von  $\mathbb{R}^2$  charakterisiert, die den euklidischen Abstand nicht verändern. Es wird deutlich gemacht, wie die euklidische Gruppe aus der aus der linearen Algebra bekannten orthogonalen Gruppe und der additiven Gruppe  $(\mathbb{R}^2, +)$ , die wir mit der Gruppe der Translationen identifizieren, als semidirektes Produkt aufgebaut ist. Danach führen wir die *affine Gruppe* ein. Sie ist ein semidirektes Produkt, das aus der Gruppe  $GL_2(\mathbb{R})$  der linearen Transformationen von  $\mathbb{R}^2$  und der Gruppe  $(\mathbb{R}^2, +)$  der Translationen gebildet wird. Den Kongruenzbegriff, der sich aus der Wirkung der affinen Gruppe auf  $\mathbb{R}^2$  ergibt, nennen wir zur Unterscheidung von der euklidischen Kongruenz *affine Äquivalenz*. Der Hauptsatz der affinen Geometrie für die Ebene  $\mathbb{R}^2$  besagt, dass je zwei Dreiecke affin äquivalent sind, und illustriert,

---

<sup>5</sup>Omar Chayyām (1048 - 1131), persischer Mathematiker, Astronom, Astrologe, Kalenderreformer, Philosoph und Dichter.

<sup>6</sup>Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733), Jesuit, Philosoph, Theologe und Mathematiker.

<sup>7</sup>János Bolyai (1802 - 1860), ungarischer Mathematiker.

<sup>8</sup>Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 - 1856), russischer Mathematiker.

wieviel größer affine Äquivalenz als euklidische Äquivalenz ist. Koniken in der Ebene lassen sich als Nullstellengebilde von polynomialem Gleichungen vom Grad zwei darstellen. Analog kann man in  $\mathbb{R}^n$  Quadriken als Nullstellengebilde von polynomialem Gleichungen vom Grad zwei einführen. Mit Techniken der linearen Algebra, insbesondere dem Spektralsatz, lassen sich Quadriken bis auf euklidische Kongruenz und affine Äquivalenz klassifizieren. Zum Abschluss des Kapitels werfen wir einen Blick auf die Geometrie einiger Quadriken in  $\mathbb{R}^3$ , die auch in der Baukunst eingesetzt werden.

Das dritte Kapitel bildet den Kern der Vorlesung. Hier wird die sogenannte projektive Geometrie eingeführt. Sie lässt sich mit dem Problem der perspektivischen Darstellung des dreidimensionalen Raums motivieren. Mathematisch definiert man den  $n$ -dimensionalen projektiven Raum  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  als die Menge der Ursprungsgeraden in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Die Gruppe  $GL_{n+1}(\mathbb{R})$  wirkt auf die offensichtliche Weise auf  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Bei dieser Wirkung werden lineare Teilräume auf lineare Teilräume derselben Dimension abgebildet und damit insbesondere Ursprungsgeraden auf Ursprungsgeraden. Auf diese Weise erhält man eine Wirkung von  $GL_{n+1}(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Dabei wirkt die Untergruppe  $\mathcal{Z} \subset GL_{n+1}(\mathbb{R})$  der Skalarmatrizen trivial. Da  $\mathcal{Z}$  das Zentrum von  $GL_{n+1}(\mathbb{R})$  ist und damit eine normale Untergruppe, kann man die Quotientengruppe  $PGL_{n+1}(\mathbb{R}) := GL_{n+1}(\mathbb{R})/\mathcal{Z}$  bilden. Dies ist die projektive lineare Gruppe und nach Definition die Symmetriegruppe von  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Ihre Wirkung auf  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  induziert die Relation der *projektiven Äquivalenz*. Wir werden erklären, wie man die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  als Kompaktifizierung der affinen Ebene  $\mathbb{R}^2$  ansehen kann und somit affine Geometrie im Rahmen der projektiven Geometrie betreiben kann. Als kleinen Exkurs werfen wir einen Blick „von außen“ auf die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Sie ist nicht orientierbar und kann daher nicht in  $\mathbb{R}^3$  eingebettet werden. Es existiert allerdings eine sogenannte Immersion in  $\mathbb{R}^3$ , die den best möglichen Ersatz für eine Einbettung darstellt und die wir vorstellen werden. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie für  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  hat gewissermaßen zwei Teile. Der erste Teil erklärt, wie man eine projektive Transformation durch die Angabe eines Vierecks spezifiziert. Der zweite Teil zeigt, dass eine bijektive Selbstabbildung  $\varphi: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , die Geraden auf Geraden abbildet, aus einer projektiven Transformation und einem Automorphismus des Körpers der reellen Zahlen aufgebaut ist. Da die Identität aber der einzige Körperautomorphismus von  $\mathbb{R}$  ist, liefert dieses Resultat eine wertvolle Charakterisierung von projektiven Transformationen. Die projektiven Transformationen, die sich aus dem Problem der perspektivischen Darstellung ergeben, sind die Zentralkollineationen. Aus ihnen lassen sich alle projektiven Transformationen aufbauen, und sie sind nützliche Instrumente bei der Untersuchung gewisser geometrischer Konfigurationen. Im vorletzten Abschnitt des Kapitels untersuchen wir die Klassifikation von Vierupeln von kollinearen Punkten in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  bis auf projektive Äquivalenz. Es stellt sich heraus, dass man für solche Vierupel eine Invariante definieren kann, das sogenannte Doppelverhältnis, die entscheidet, wann zwei Vierupel von kollinearen Punkten projektiv äquivalent sind. Das Doppelverhältnis hat auch eine praktische Bedeutung, z.B. bei der Auswertung von Luftaufnahmen. Zum Abschluss des Kapitels kehren wir zu Quadriken zurück. Wie bereits im Zweidimensionalen erwähnt, ist  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  eine Kompaktifizierung von  $\mathbb{R}^n$ . Dementsprechend kann man eine Quadrik  $Q \subset \mathbb{R}^n$  zu einer Quadrik  $\overline{Q} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  kompaktifizieren, und zwar zum einem mit Hilfe von Gleichungen und zum anderen mit Hilfe der Topologie. Wir werden zeigen, dass beide Verfahren in den meisten Fällen dasselbe Resultat liefern, und Quadriken in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  bis auf projektive Äquivalenz klassifizieren.

Das abschließende vierte Kapitel behandelt die Grundlagen der hyperbolischen Geometrie. Genauer gesagt wird das Kreisscheiben-Modell der hyperbolischen Ebene von Poincaré<sup>9</sup> vorgestellt. Die Menge, die diesem Modell zugrundeliegt, ist die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  in  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{C}$ . Wir stellen zunächst die hyperbolischen Geraden vor. Dies sind Durchschnitte von  $\mathbb{D}$  mit euklidischen Geraden durch den Ursprung und mit Kreisen, die senkrecht auf dem Einheitskreis stehen. Man erkennt schnell, dass es eine Gerade  $\ell$  und einen Punkt  $P \in \mathbb{D}$  gibt, so dass durch  $P$  unendlich viele zu  $\ell$  parallele Geraden verlaufen. Um das hyperbolische Parallelenaxiom abzuleiten, benötigen wir hinreichend viele Symmetrien der hyperbolischen Ebene. Mit Hilfe der Spiegelungen an euklidischen Geraden und der Inversionen an Kreisen werden hyperbolische Spiegelungen erklärt. Die Symmetriegruppe der hyperbolischen Ebene ist die Untergruppe von  $S(\mathbb{D}) := \{\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \mid \varphi \text{ ist bijektiv}\}$ , die von den hyperbolischen Spiegelungen erzeugt wird. (Diese Definition ist durch die Tatsache motiviert, dass jede euklidische Transformation von  $\mathbb{R}^2$  ein Produkt von Spiegelungen ist.) Mittels der Inklusion  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  können hyperbolische Transformationen als projektive Transformationen aufgefasst werden. Dies ist hilfreich, um diese Transformationen zu beschreiben. Die komplizierteste Zutat der hyperbolischen Geometrie ist die hyperbolische Metrik. Wir führen sie zunächst in einem anderen Modell der hyperbolischen Ebene, einer Halbschale des zweischaligen Rotationshyperboloids, ein. Auf dem Kreisscheibenmodell ergibt sich eine Metrik, die mit Hilfe des Areahyperbeltangens definiert wird. Dadurch lassen sich explizite Berechnungen auf Basis der Eigenschaften der Hyperbelfunktionen durchführen. Diese sind insbesondere bei der Untersuchung hyperbolischer Dreiecke nützlich. Die Besonderheiten der hyperbolischen Geometrie manifestieren sich unter Anderem in der Tatsache, dass die Summe der Innenwinkel in jedem hyperbolischen Dreieck kleiner als  $\pi$  ist und dass zwei hyperbolische Dreiecke bereits dann kongruent sind, wenn sie dieselben Innenwinkel haben.

Inhaltlich haben wir uns an dem Buch [4] orientiert, aus dem wir auch viele Argumente übernommen haben. Das Buch [10] enthält eine Einführung in die affine Geometrie und die Klassifikation der Quadriken (sowohl im Affinen als auch im Projektiven). Die Informationen zur Immersion der projektiven Ebene stammen vor allem aus den Büchern [1] und [11]. Bei der Diskussion der hyperbolischen Trigonometrie haben wir uns auf das Buch [42] gestützt. Dort werden die Hyperbelfunktionen konsequent genutzt, um die benötigten Formeln abzuleiten. Weitere Quellen sind im Text angegeben.

Ich danke Herrn Lin für die Durchsicht des Manuskripts und zahlreiche Korrekturen und den Hörern und Hörerinnen der Vorlesung für verschiedene Hinweise auf Unklarheiten und Fehler.

Alexander Schmitt  
Berlin, im Juli 2020

---

<sup>9</sup>(Jules) Henri Poincaré (1854 - 1912), französischer Mathematiker, theoretischer Physiker, theoretischer Astronom und Philosoph.

# I

## Kegelschnitte

Wir untersuchen in diesem Kapitel die möglichen Durchschnitte eines Kegels mit einer Ebene. Eine entsprechende Untersuchung ließe sich auch für einen Zylinder durchführen. Diesen Fall kann man leicht praktisch nachvollziehen, indem man etwa eine Gurke auf verschiedene Weisen mit einem Messer aufschneidet.

### I.1 Der Kegel, Beispiele für Durchschnitte eines Kegels mit einer Ebene

Wir beschreiben zunächst einen speziellen Kegel in  $\mathbb{R}^3$  durch eine explizite Gleichung. Dies ermöglicht es uns, den Durchschnitt dieses Kegels mit einigen speziell gewählten Ebenen durch Gleichungen zu beschreiben und damit zu verstehen, welche Gestalt dieser Durchschnitt hat.

#### I.1.1 Das Standardskalarprodukt, die euklidische Norm und der euklidische Abstand

Der Gegenstand der Untersuchungen in diesem Kapitel gehört der euklidischen Geometrie an. Wir wiederholen kurz die relevanten Strukturen aus der linearen Algebra.

Es sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl. Das *Standardskalarprodukt* auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) &\longmapsto a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n.\end{aligned}$$

Sie induziert die (*euklidische*) *Norm*

$$\begin{aligned}\|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}\end{aligned}$$

auf  $\mathbb{R}^n$ . Vermöge

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \|p - q\| \end{aligned}$$

kann man den (*euklidischen*) Abstand von Punkten im Raum  $\mathbb{R}^n$  messen. Diese Strukturen werden z.B. im Skript [38], Abschnitt 1.2, ausführlich beschrieben.

Es seien  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist

$$d(p, A) := \inf\{d(p, q) \mid q \in A\} \quad (\text{I.1})$$

der Abstand von  $p$  zu  $A$ . Nach [37], 3.3.4 Lemma, ist der Abstand von  $x$  zu  $A$  genau dann positiv, wenn  $x \notin A$ .

Zwei Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n$  stehen *senkrecht* aufeinander, wenn  $\langle v, w \rangle = 0$  gilt. Wir schreiben  $v \perp w$ .

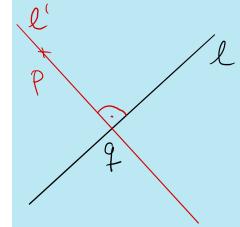
*I.1.1 Beispiel.* Es seien  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  eine Gerade und  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \ell$  ein Punkt. Von  $p$  aus fällen wir das Lot auf  $\ell$ . Dies ist die eindeutig bestimmte Gerade  $\ell'$ , die senkrecht auf  $\ell$  steht und den Punkt  $p$  enthält. Die Gerade  $\ell'$  schneidet die Gerade  $\ell$  in einem und nur einem Punkt  $q$ , und es gilt

$$d(p, \ell) = d(p, q).$$

Die Konstruktion wird mit den folgenden Betrachtungen verständlich. Zu einer Geraden  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  existiert ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , so dass für jeden Punkt  $p \in \gamma$

$$\gamma = \{p + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gilt.



Man nennt  $p$  einen *Aufpunkt* und  $v$  einen *Richtungsvektor*.<sup>1</sup> Der Richtungsvektor ist bis auf einen Faktor  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  bestimmt. Es seien

$$\gamma_i = \{p_i + \lambda \cdot v_i \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad i = 1, 2,$$

zwei Geraden in  $\mathbb{R}^2$ . Sie stehen *senkrecht* aufeinander, wenn die Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  senkrecht aufeinander stehen, d.h.  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$  gilt. Diese Bedingung ist unabhängig von der Auswahl der Richtungsvektoren. (Warum?) Wir schreiben  $\gamma_1 \perp \gamma_2$ .

*I.1.2 Aufgabe.* Es seien  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  eine Gerade und  $p \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt. Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit des Lots von  $p$  auf  $\ell$ .

*I.1.3 Bemerkungen.* i) Dass wir Elemente von  $\mathbb{R}^2$  einmal als Punkte und einmal als Vektoren ansprechen, liegt darin begründet, dass wir  $\mathbb{R}^2$  als affinen Raum im Sinne von II.2.1 Definition oder [10], 1.0.5, ansehen. Dazu setzen wir  $V := \mathbb{R}^2$ ,  $M := \mathbb{R}^2$  und

$$\begin{aligned} \tau: V \times M &\longrightarrow M \\ (v, p) &\longmapsto p + v. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Dies ist ein Spezialfall des allgemeinen Konzepts eines affinen Unterraums (II.2.4 Definition).

Hierbei sehen wir  $V$  als Vektorraum an und bezeichnen seine Elemente als Vektoren und  $M$  nur als Menge. Die Elemente von  $M$  nennen wir Punkte. Für Punkte gibt es keine Addition und keine Skalarmultiplikation. Lediglich vermöge  $\tau$  können Vektoren auf Punkte durch Translationen wirken.

ii) Wir führen auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  die Äquivalenzrelation

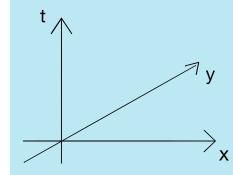
$$v \sim v' \iff \exists t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : v' = t \cdot v$$

ein. Die Menge der Äquivalenzklassen ist die *projektive Gerade*  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Eine Gerade definiert also über Richtungsvektoren ein Element in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Dieser Art von Konstruktion werden wir in Kapitel III in Form der projektiven Ebene erneut begegnen.

## I.1.2 Der Kegel

Wir versehen den Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit den Koordinaten  $(x, y, t)$ . In  $\mathbb{R}^3$  betrachten wir die Geraden

$$\gamma := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 0 \wedge a = c\}.$$



Der Kegel  $K$  entsteht, indem wir die Gerade  $\gamma$  um die  $t$ -Achse rotieren lassen. Schneiden wir  $K$  mit der Ebene

$$E_\lambda := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = \lambda\}, \quad (\text{I.2})$$

dann entsteht offenbar ein Kreis vom Radius  $\lambda$  in der Ebene  $E_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (Der Abstand von Punkten in  $\mathbb{R}^3$  wird hier wie in Abschnitt I.1.1 beschrieben gemessen.) Für  $\lambda = 0$  besteht der Durchschnitt also nur aus einem Punkt. Aus dieser geometrischen Beschreibung erhalten wir eine Gleichung für  $K$ :

$$K = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2\}.$$

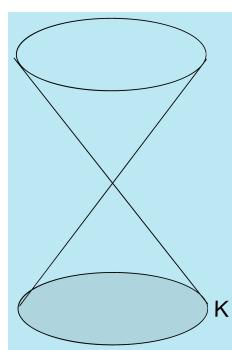


Abbildung I.1: Der Kegel  $K$

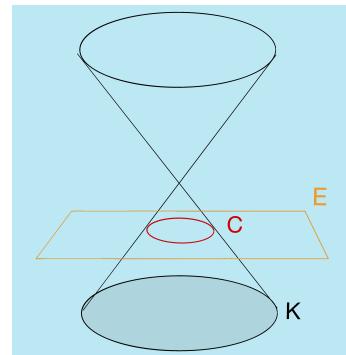


Abbildung I.2: Ein Kreis als Kegelschnitt

## I.1.3 Durchschnitte von $K$ und speziellen Ebenen

Wir beginnen mit der Ebene

$$E^1 := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 0\}.$$

Wir können in  $E$  die Koordinaten  $x$  und  $t$  verwenden. In diesen Koordinaten gilt

$$E^1 \cap K = \{(a, c) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 = c^2\}.$$

Die Gleichung für  $E \cap K$  lautet also  $(a - c) \cdot (a + c) = a^2 - c^2 = 0$ . Dies ist die Vereinigung der Geraden  $\gamma_1 := \{(a, c) \in E \mid a = c\}$  und der Geraden  $\gamma_2 := \{(a, c) \in E \mid a = -c\}$ .

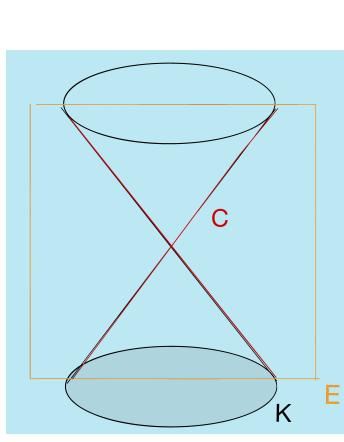


Abbildung I.3: Die Vereinigung zweier Geraden als Kegelschnitt

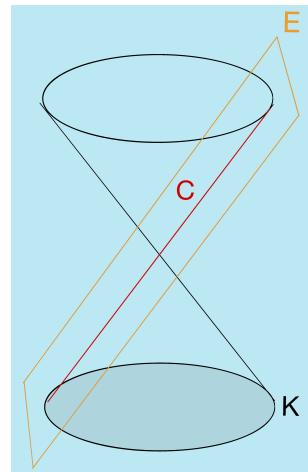


Abbildung I.4: Eine Gerade als Kegelschnitt

Wir fahren mit der Ebene  $E^2 := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = c\}$  fort und berechnen

$$\begin{aligned} E^2 \cap K &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = c \wedge a^2 + b^2 = a^2\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = c \wedge b = 0\}. \end{aligned}$$

Dies ist eine einzelne Gerade im  $\mathbb{R}^3$ .

Nun betrachten wir die Ebene

$$E^3 := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = a + 1\}.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} E^3 \cap K &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = a + 1 \wedge a^2 + b^2 = a^2 + 2 \cdot a + 1\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = a + 1 \wedge a = \frac{1}{2} \cdot (b^2 - 1)\}. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung beschreibt eine Parabel in der Ebene  $E^3$ .<sup>2</sup>

Das nächste Beispiel ist durch die Ebene

$$E^4 := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 1\}$$

<sup>2</sup>Genauer gesagt zeigt die Überlegung, dass das Bild von  $E^3 \cap K$  unter der Abbildung  $(a, b, c) \mapsto (b, c)$  eine Parabel ist. Diese Abbildung ist keine Isometrie (II.1.1 Definition), sondern nur eine bijektive affine Abbildung (Seite 43). In II.2.34 Bemerkung werden wir nachweisen, dass eine bijektive affine Abbildung Parabeln auf Parabeln abbildet.

gegeben. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} E^4 \cap K &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 1 \wedge 1 + b^2 = c^2\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 1 \wedge c^2 - b^2 = 1\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 1 \wedge (c - b) \cdot (c + b) = 1\}. \end{aligned}$$

Dies ist eine Hyperbel. In der Ebene  $E$  können wir die Koordinaten  $y$  und  $t$  verwenden. Die Standardhyperbel, die man aus der Analysis ([37], 3.1.3 Beispiel, viii) kennt, ist der Graph  $\Gamma_f$  der Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b &\longmapsto \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Offensichtlich hat man

$$\Gamma_f = \{(b, c) \in E \mid b \cdot c = 1\}.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass eine Drehung der Ebene  $E$  die Menge  $\Gamma_f$  auf  $E \cap K$  abbildet.

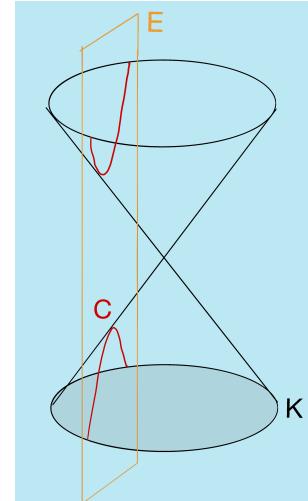
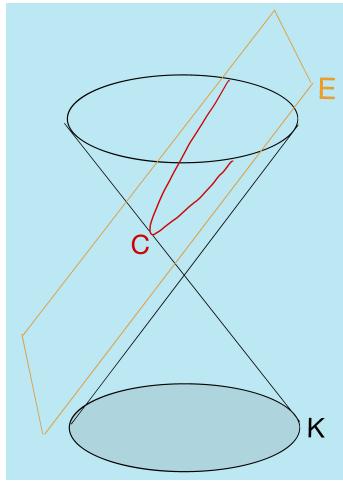


Abbildung I.5: Eine Parabel als Kegelschnitt Abbildung I.6: Eine Hyperbel als Kegelschnitt

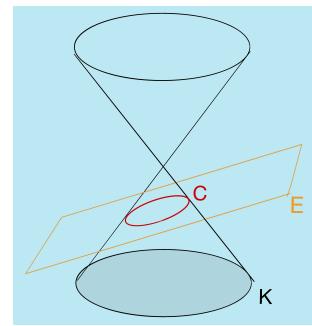
Zum Abschluss betrachten wir die Ebene

$$E^5 := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 2 \cdot c - 2\}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} & E^5 \cap K \\ &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = \frac{1}{2} \cdot a + 1 \wedge a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 + a + 1 \right\} \\ &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = \frac{1}{2} \cdot a + 1 \wedge \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + b^2 = \frac{4}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. (Die Bemerkung aus Fußnote<sup>2</sup> gilt sinngemäß.) Wir werden die Gleichungen von Ellipsen in Abschnitt I.2.2 und II.2.31 Beispiel genauer anschauen.



Das Hauptziel dieses Kapitels ist es nachzuweisen, dass durch die obigen Beispiele bereits alle Möglichkeiten erschöpft sind.

## I.2 Koniken

Wir definieren Koniken als Teilmengen der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Die Definition benötigt nur Begriffe der euklidischen Geometrie der Ebene.

**I.2.1 Definition.** Es sei  $e \in (0, \infty)$ . Eine Teilmenge  $C \subset \mathbb{R}^2$  heißt *Konik* der *Exzentrizität*  $e$ , wenn es einen Punkt  $B \in \mathbb{R}^2$  und eine Gerade  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  gibt, so dass  $B \notin \ell$  und

$$C = \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, B) = e \cdot d(p, \ell) \}.$$

Der Punkt  $B$  ist dann ein *Brennpunkt*<sup>3</sup> der Konik und die Gerade  $\ell$  eine *Leitlinie*.

Eine *Parabel* ist eine Konik der Exzentrizität 1, eine *Ellipse* eine Konik, für die  $0 < e < 1$  gilt, und eine *Hyperbel* eine Konik mit  $e > 1$ .

*I.2.2 Bemerkung.* Gemäß dieser Definition ist der Kreis keine Konik. Er lässt sich als Grenzfall von Ellipsen verstehen, indem man  $e$  gegen Null gehen lässt. Die Leitlinie  $\ell$  wandert bei diesem Prozess ins „Unendliche“. Diese Überlegung wird in I.2.9 Bemerkungen, iii), präzisiert.

*I.2.3 Aufgabe.* Es seien  $A \subset \mathbb{R}^2$  eine Teilmenge und  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  eine Gerade. Die Gerade  $\gamma$  heißt *Symmetriearchse* von  $A$ , wenn  $\sigma(A) = A$  für die Spiegelung  $\sigma$  an der Geraden  $\gamma$  gilt.

Es sei  $C \subset \mathbb{R}^2$  eine Konik mit Brennpunkt  $B$  und Leitlinie  $\ell$ . Zeigen Sie, dass das Lot  $\pi$  von  $B$  auf  $\ell$  eine Symmetriearchse von  $C$  ist.

In den nächsten Abschnitten werden wir Gleichungen für Koniken in „Standardform“ herleiten und im Falle der Ellipsen und Hyperbeln weitere Charakterisierungen geben.

### I.2.1 Parabeln

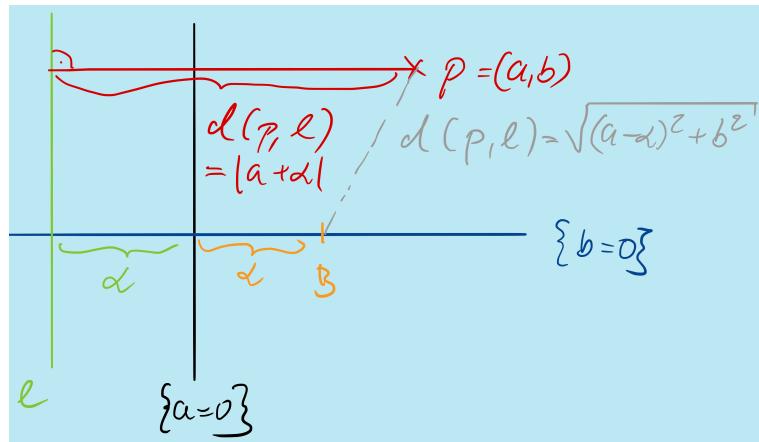
Eine Parabel befindet sich in *Standardform*, wenn ein Brennpunkt  $B \in \mathbb{R}^2$  und eine Leitlinie  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  so gewählt werden können, dass

<sup>3</sup>Wir werden in Abschnitt I.4 sehen, dass diese Begriffsbildung auf konkreten Anwendungen beruht (z.B. I.4.4, Bemerkungen, i)).

- ★  $B$  auf der positiven  $x$ -Achse liegt, d.h. eine reelle Zahl  $\alpha > 0$  existiert, so dass  $B = (\alpha, 0)$ ,
- ★ die Leitlinie parallel zur  $y$ -Achse verläuft, d.h., es eine reelle Zahl  $\lambda$  gibt, so dass  $\ell = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = \lambda\}$ ,
- ★  $(0, 0) \in C$ .

**I.2.4 Bemerkungen.** i) Es gilt  $d((0, 0), (\alpha, 0)) = \alpha$  und  $d((0, 0), \ell) = |\lambda|$ . Wegen  $(0, 0) \in C$  gilt somit nach Definition  $\lambda = \alpha$  oder  $\lambda = -\alpha$ . Der Wert  $\lambda = \alpha$  kommt nich in Frage, da dann  $d(B, B) = d(B, \ell) = 0$  folgte und  $B \in \ell$  gelten würde. Das ist aber nach I.2.1 Definition verboten. Somit haben wir  $\lambda = -\alpha$ .

ii) Um eine beliebige Parabel in Standardform zu bringen, können wir die in der Einleitung beschriebenen Kongruenz-Abbildungen der euklidischen Geometrie verwenden. Dazu seien  $C$  eine beliebige Konik,  $B$  ein Brennpunkt und  $\ell$  eine Leitlinie für  $C$ . Durch eine Drehung können wir erreichen, dass die Leitlinie  $\ell$  parallel zur  $x$ -Achse verläuft. Falls der Brennpunkt links von der Leitlinie liegt, führen wir eine Spiegelung an der  $y$ -Achse durch. Schließlich können wir den Brennpunkt  $B$  auf die  $x$ -Achse verschieben, und zwar so, dass er auf dem Punkt  $(\alpha, 0)$  mit  $\alpha = (1/2) \cdot d(B, \ell)$  zu liegen kommt.



**I.2.5 Satz.** Es seien  $C$  eine Parabel in Standardform und  $\alpha := (1/2) \cdot d(B, \ell)$  wie in der obigen Definition. Dann gilt

$$C = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2 = 4 \cdot \alpha \cdot a\}.$$

*Beweis.* Nach Definition liegt ein Punkt  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  genau dann auf  $C$ , wenn die Gleichung

$$(a + \alpha)^2 = d(p, \ell)^2 = d(p, B)^2 = (a - \alpha^2) + b^2$$

erfüllt ist. Diese Gleichung ist äquivalent zu der Gleichung

$$b^2 = 4 \cdot \alpha \cdot a.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

I.2.6 *Bemerkung.* Man kann in der Definition die Rollen der  $y$ -Achse und der  $x$ -Achse vertauschen. In diesem Fall erhielte man

$$C = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = \frac{1}{4 \cdot \alpha} \cdot a^2 \right\}.$$

Dies ist der Graph der Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \frac{1}{4 \cdot \alpha} \cdot a^2 \end{aligned}$$

und somit aus der Analysis I bekannt ([37], 3.1.3 Beispiel, iii). Die obigen Konventionen wurden so gewählt, dass sie zu den üblichen Konventionen für Ellipsen und Hyperbeln passen.

Es sei  $C$  eine Standardparabel wie in I.2.5 Satz. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow C \\ \lambda &\longmapsto (\alpha \cdot \lambda^2, 2 \cdot \alpha \cdot \lambda) \end{aligned}$$

eine bijektive Abbildung mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto \frac{b}{2 \cdot \alpha}. \end{aligned}$$

Wir nennen  $\varphi$  eine *Parametrisierung* von  $C$ .

I.2.7 *Aufgabe.* Es sei  $C \subset \mathbb{R}^2$  eine Parabel in Standardform. Welche Symmetrieeachsen (vgl. I.2.3 Aufgabe) besitzt  $C$ ? Schließen Sie aus Ihren Resultaten, dass der Brennpunkt und die Leitlinie einer Parabel eindeutig bestimmt sind.

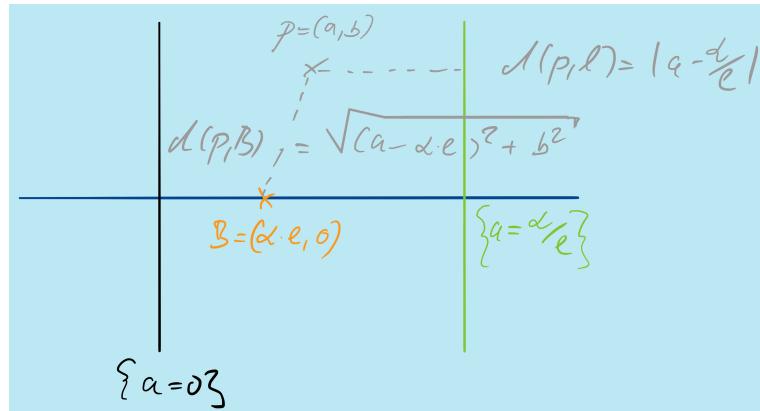
## I.2.2 Ellipsen

Eine Ellipse  $C \subset \mathbb{R}^2$  der Exzentrizität  $e \in (0, 1)$  befindet sich in *Standardform*, wenn der Brennpunkt  $B \in \mathbb{R}^2$  und die Leitlinie  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  so gewählt werden können, dass für die Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $d(B, \ell) = \alpha \cdot ((1/e) - e)$

★  $B = (\alpha \cdot e, 0)$ ,

★  $\ell = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = \frac{\alpha}{e} \right\}$

gilt.



**I.2.8 Satz.** Es seien  $C \subset \mathbb{R}^2$  eine Ellipse,  $B \in \mathbb{R}^2$  ein Brennpunkt,  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  eine Leitlinie,  $e \in (0, 1)$  die Exzentrizität, und  $\alpha := d(B, \ell)/((1/e) - e)$ , so dass die Bedingungen der obigen Definition für die Standardform erfüllt sind. Ferner sei

$$\beta := \alpha \cdot \sqrt{1 - e^2}.$$

Dann gilt

$$C = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2 = 1 \right\}.$$

*Beweis.* Nach Definition gehört ein Punkt  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  genau dann der Ellipse  $C$  an, wenn die Gleichung

$$(a - \alpha \cdot e)^2 + b^2 = d(p, B)^2 = e^2 \cdot d(p, \ell)^2 = e^2 \cdot \left(a - \frac{\alpha}{e}\right)^2$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist äquivalent zu der Gleichung

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot \alpha \cdot e + \alpha^2 \cdot e^2 + b^2 = e^2 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot \alpha \cdot e + \alpha^2.$$

Dies entspricht der Gleichung

$$a^2 \cdot (1 - e^2) + b^2 = \alpha^2 \cdot (1 - e^2) = \beta^2.$$

Nach Division durch  $a^2 \cdot (1 - e^2) = \beta^2$  erhalten wir die behauptete Gleichung für  $C$ .  $\square$

**I.2.9 Bemerkungen.** i) Die Ellipse  $C$  schneidet die positive  $x$ -Achse im Punkt  $(\alpha, 0)$ . (In der Tat gilt für  $a > 0$  und  $p = (a, 0)$ , dass  $d(p, B) = |a - \alpha \cdot e|$  und  $d(p, \ell) = |a - \alpha/e|$ , und die Bedingung, auf  $C$  zu liegen, wird zu  $a \cdot (1 - e) = \pm \alpha \cdot (1 - e)$ .<sup>4</sup>)

ii) Man kann auch  $B' := (-\alpha \cdot e, 0)$  und

$$\ell' := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = -\frac{\alpha}{e} \right\}$$

als Brennpunkt und Leitlinie verwenden.

iii) In der Beschreibung der Ellipse in I.2.8 Satz macht es Sinn,  $e = 0$  zu setzen. Dann wird  $B$  zu  $(0, 0)$ , und es gilt  $\alpha = \beta$ . Man erhält somit den Kreis mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius  $\alpha$ . Die Leitlinie wird  $\{a = \infty\}$ , verschwindet also im Unendlichen.

<sup>4</sup>Das positive Vorzeichen tritt auf, wenn  $p$  zwischen  $B$  und  $\ell$  liegt, das negative in den anderen Fällen. Die Gleichung hat offenbar nur für das positive Vorzeichen eine positive Lösung  $a$ .

**I.2.10 Aufgabe.** Es sei  $C$  eine Ellipse wie in I.2.8 Satz. Beweisen Sie, dass

$$\text{diam}(C) := \sup\{ d(p, q) \mid p, q \in C \} = 2 \cdot \alpha.$$

Dabei hat man  $d(p, q) = 2 \cdot \alpha$  für  $p = (-\alpha, 0) \in C$  und  $q = (\alpha, 0) \in C$ . Zeigen Sie, dass für  $p, q \in C$  mit  $\{p, q\} \neq \{(-\alpha, 0), (\alpha, 0)\}$  stets

$$d(p, q) < 2 \cdot \alpha$$

gilt. Folgern Sie, dass die Paare  $(B_+, \ell_+)$  und  $(B_-, \ell_-)$  mit

$$B_{\pm} = (\pm \alpha \cdot e, 0) \quad \text{und} \quad \ell_{\pm} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = \pm \frac{\alpha}{e} \right\}$$

die einzigen Möglichkeiten für Brennpunkt und Leitlinie von  $C$  sind.

**I.2.11 Bemerkung** (Parametrisierung von Ellipsen). Es seien  $\alpha > \beta > 0$  und

$$\begin{aligned} K &:= \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1 \}, \\ C &:= \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Dann sind

$$\begin{array}{ccc} \varphi: K & \longrightarrow & C \\ (a, b) & \longmapsto & (\alpha \cdot a, \beta \cdot b) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \psi: C & \longrightarrow & K \\ (a, b) & \longmapsto & \left( \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta} \right) \end{array}$$

zueinander inverse Bijektionen. Bekanntermaßen (vgl. [37], 4.8.10 Folgerung, [38], 3.2.4 Beispiel, iv) ist

$$\begin{aligned} \eta: [0, 2 \cdot \pi) &\longrightarrow K \\ \vartheta &\longmapsto (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) \end{aligned}$$

eine Bijektion. Somit ist auch

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}: [0, 2 \cdot \pi) &\longrightarrow C \\ \vartheta &\longmapsto (\alpha \cdot \cos(\vartheta), \beta \cdot \sin(\vartheta)) \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Der nächste Satz liefert eine weitere bekannte Beschreibung von Ellipsen, die oft auch als Definition benutzt wird.

**I.2.12 Satz.** *In der Situation von I.2.8 Satz und I.2.9 Bemerkung, ii), gilt*

$$C = \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, B) + d(p, B') = 2 \cdot \alpha \}.$$

*Beweis.* Wir beginnen mit der Inklusion „ $\subseteq$ “. Nach Definition hat man

$$\begin{aligned} d(p, B) &= e \cdot d(p, \ell), \\ d(p, B') &= e \cdot d(p, \ell'). \end{aligned}$$

Die Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$d(p, B) + d(p, B') = e \cdot (d(p, \ell) + d(p, \ell')).$$

Für einen Punkt  $p = (a, b) \in C$  gilt

$$-\frac{\alpha}{e} < -\alpha \leq a \leq \alpha < \frac{\alpha}{e},$$

so dass

$$d(p, \ell) = \frac{\alpha}{e} - a, \quad d(p, \ell') = a + \frac{\alpha}{e}$$

und

$$e \cdot (d(p, \ell) + d(p, \ell')) = 2 \cdot \alpha.$$

Nun widmen wir uns der Inklusion „ $\supseteq$ “. Es sei  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  mit  $d(p, B) + d(p, B') = 2 \cdot \alpha$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} d_1 &:= d(p, B) = \sqrt{(a - \alpha \cdot e)^2 + b^2}, \\ d_2 &:= d(p, B') = \sqrt{(a + \alpha \cdot e)^2 + b^2}. \end{aligned} \tag{I.3}$$

Daraus folgern wir

$$4 \cdot a \cdot \alpha \cdot e = d_2^2 - d_1^2 = (d_2 - d_1) \cdot (d_2 + d_1) = 2 \cdot \alpha \cdot (d_2 - d_1).$$

Es folgt  $d_2 - d_1 = 2 \cdot a \cdot e$ . Zusammen mit  $d_2 + d_1 = 2 \cdot \alpha$  erhalten wir  $d_2 = a \cdot e + \alpha$ . Aus der resultierenden Gleichung

$$(a \cdot e + \alpha)^2 = d_2^2 \stackrel{(I.3)}{=} (a + \alpha \cdot e)^2 + b^2$$

leiten wir

$$b^2 + a^2 \cdot (1 - e^2) = \alpha^2 \cdot (1 - e^2)$$

ab. Wir teilen durch  $\alpha^2 \cdot (1 - e^2) = \beta^2$  und erkennen mit I.2.8 Satz, dass  $p \in C$ .  $\square$

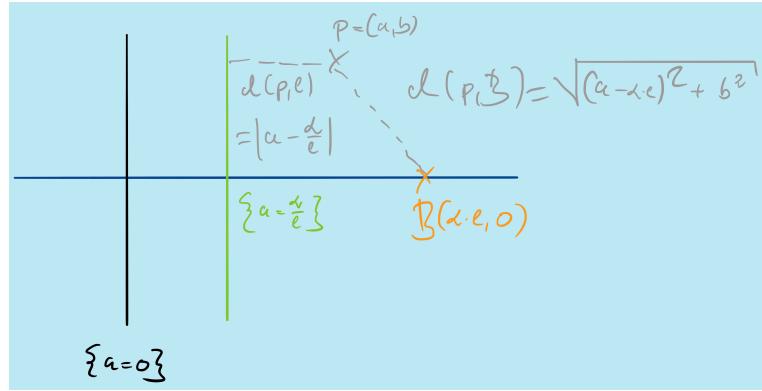
### I.2.3 Hyperbeln

Wir sagen, dass sich eine Hyperbel  $C \subset \mathbb{R}^2$  der Exzentrizität  $e > 1$  in *Standardform* befindet, wenn es einen Brennpunkt  $B \in \mathbb{R}^2$  und eine Leitlinie  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  gibt, so dass für die Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $d(B, \ell) = \alpha \cdot (e - (1/e))$

★  $B = (\alpha \cdot e, 0)$ ,

★  $\ell = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = \frac{\alpha}{e} \right\}$

gilt.



**I.2.13 Satz.** Es seien  $C \subset \mathbb{R}^2$  eine Hyperbel,  $B \in \mathbb{R}^2$  ein Brennpunkt,  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  eine Leitlinie,  $e > 1$  die Exzentrizität, und  $\alpha := d(B, \ell)/(e - (1/e))$ , so dass die Bedingungen der obigen Definition für die Standardform erfüllt sind. Ferner sei

$$\beta := \alpha \cdot \sqrt{e^2 - 1}.$$

Dann gilt

$$C = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{b}{\beta}\right)^2 = 1 \right\}.$$

*Beweis.* Gemäß I.2.1 Definition liegt ein Punkt  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  genau dann auf der Hyperbel  $C$ , wenn

$$(a - \alpha \cdot e)^2 + b^2 = d(p, B)^2 = e^2 \cdot d(p, \ell)^2 = e^2 \cdot \left(a - \frac{\alpha}{e}\right)^2.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu der Gleichung

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot \alpha \cdot e + \alpha^2 \cdot e^2 + b^2 = e^2 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot \alpha \cdot e + \alpha^2$$

und entspricht daher der Gleichung

$$a^2 \cdot (1 - e^2) + b^2 = \alpha^2 \cdot (1 - e^2) = -\beta^2.$$

Nach Division durch  $\alpha^2 \cdot (1 - e^2) = -\beta^2$  ergibt sich die behauptete Gleichung für  $C$ .  $\square$

**I.2.14 Bemerkungen.** i) Die Hyperbel  $C$  schneidet die positive  $x$ -Achse im Punkt  $(\alpha, 0)$ . (Für  $a > 0$  und  $p = (a, 0)$  gilt  $d(p, B) = |a - \alpha \cdot e|$  und  $d(p, \ell) = |a - \alpha/e|$ . Man erhält als Bedingung, auf  $C$  zu liegen, eine Gleichung der Form  $a \cdot (e - 1) = \pm \alpha \cdot (e - 1)$ ).<sup>5</sup>)

ii) Es seien  $B' := (-\alpha \cdot e, 0)$  und

$$\ell' := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = -\frac{\alpha}{e} \right\}.$$

Dann sind  $B'$  und  $\ell'$  ebenfalls Brennpunkt und Leitlinie für  $C$ .

iii) Es gilt genau dann  $\alpha = \beta$ , wenn  $e = \sqrt{2}$ . In diesem Fall nimmt die Gleichung für  $C$  die Gestalt

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2 = \alpha^2$$

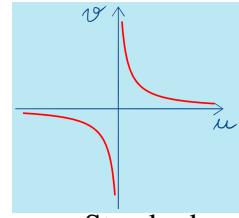
<sup>5</sup>Für das Vorzeichen gelten Bemerkungen wie bei der Ellipse.

an. Mit  $u := a - b$  und  $v := a + b$  hat sie die Form

$$u \cdot v = \alpha^2.$$

Dies ist der Graph der Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{\alpha^2}{u}. \end{aligned}$$



Insbesondere für  $\alpha = 1$  ([37], 3.2.4 Beispiel, viii) gehört diese Funktion zum Standardrepertoire reeller Funktionen.

**I.2.15 Aufgabe.** Es seien  $C$  eine Hyperbel wie in I.2.13 Satz und  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  eine Gerade. Man nennt  $\gamma$  eine *Asymptote* von  $C$ , wenn

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup \{ d(p, C) \mid p \in \gamma \wedge d(p, 0) > \lambda \} = 0.$$

(Der Abstand  $d(p, C)$  wurde in Gleichung (I.1) definiert.) Bestimmen Sie die Asymptoten von  $C$ . Benutzen Sie die Asymptoten von  $C$ , um die Symmetrieachsen (cf. I.2.3 Aufgabe) von  $C$  zu ermitteln. Schließen Sie auch, dass die Paare  $(B_+, \ell_+)$  und  $(B_-, \ell_-)$  mit

$$B_\pm := (\pm \alpha \cdot e, 0) \quad \text{und} \quad \ell_\pm := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = \pm \frac{\alpha}{e} \right\}$$

die einzigen Paare sind, die aus einem Brennpunkt und einer zugehörigen Leitlinie für  $C$  bestehen.

**I.2.16 Bemerkung.** Wir erinnern zunächst an zwei Funktionen einer Veränderlichen ([37], 6.12.2 Aufgabe). Der *Hyperbelsinus* ist

$$\begin{aligned} \sinh: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \frac{\exp(a) - \exp(-a)}{2} \end{aligned}$$

und der *Hyperbelkosinus*

$$\begin{aligned} \cosh: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \frac{\exp(a) + \exp(-a)}{2}. \end{aligned}$$

Man überprüft sofort die Identität

$$\forall a \in \mathbb{R}: \quad \cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1. \quad (\text{I.4})$$

Der Hyperbelsinus ist umkehrbar, und die Umkehrfunktion ist der *Areahyperbelsinus*

$$\begin{aligned} \text{Arsinh: } \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \log(a + \sqrt{a^2 + 1}). \end{aligned}$$

Nun seien  $\alpha, \beta > 0$ ,  $C$  die durch die Gleichung in I.2.13 Satz gegebene Hyperbel und

$$\begin{aligned} C_+ &:= C \cap \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0 \}, \\ C_- &:= C \cap \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq 0 \}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi_+ : \mathbb{R} &\longrightarrow C_+ \\ a &\longmapsto (\alpha \cdot \cosh(a), \beta \cdot \sinh(a))\end{aligned}$$

eine bijektive Abbildung mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned}C_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto \text{Arsinh}\left(\frac{b}{\beta}\right).\end{aligned}$$

Eine analoge Parametrisierung  $\varphi_-$  lässt sich für  $C_-$  aufstellen. Dies sei dem Leser bzw. der Leserin als Übungsaufgabe überlassen. Die obigen Parametrisierungen erklären die Namen Hyperbelsinus und -kosinus.

Wie für Ellipsen (I.2.12 Satz) gibt es auch für Hyperbeln eine Charakterisierung, die nur die Abstände zu den Brennpunkten  $B$  und  $B'$  aus I.2.14 Bemerkungen, ii), verwendet.

**I.2.17 Satz.** *In der Situation von I.2.13 Satz, I.2.14 Bemerkungen, ii), und I.2.16 Bemerkung gilt:*

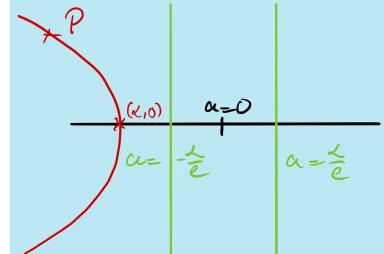
$$\begin{aligned}C_+ &= \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, B') - d(p, B) = 2 \cdot \alpha \}, \\ C_- &= \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, B') - d(p, B) = -2 \cdot \alpha \}.\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir behandeln den Ast  $C_-$  und beginnen mit der Inklusion „ $\subseteq$ “. Sei also  $p = (a, b) \in C_-$ . Aus der Gleichung der Hyperbel folgt  $|a| \geq \alpha$ , so dass hier  $a \leq -\alpha$  gelten muss. Damit sehen wir ein, dass

$$d(p, \ell) = \frac{\alpha}{e} - a \quad \text{und} \quad d(p, \ell') = -\frac{\alpha}{e} - a,$$

so dass

$$d(p, B') - d(p, B) = e \cdot (d(p, \ell') - d(p, \ell)) = -2 \cdot \alpha$$



wie behauptet.

Für die Inklusion „ $\subseteq$ “ sei  $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt mit  $d(p, B') - d(p, B) = -2 \cdot \alpha$ . Wir setzen wieder  $d_1 := d(p, B)$  und  $d_2 := d(p, B')$ . Wie im Beweis von I.2.13 Satz schließen wir

$$4 \cdot a \cdot \alpha \cdot e = d_2^2 - d_1^2 = (d_2 - d_1) \cdot (d_2 + d_1).$$

Da  $d_2 - d_1 = -2 \cdot \alpha$ , folgt  $d_2 + d_1 = -2 \cdot a \cdot e$  und  $d_2 = -(\alpha + a \cdot e)$ . Damit finden wir

$$(\alpha + a \cdot e)^2 = d_2^2 = d(p, B')^2 = (a + \alpha \cdot e)^2 + b^2.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$a^2 \cdot (1 - e^2) + b^2 = \alpha^2 \cdot (1 - e^2) = -\beta^2.$$

Nach Division durch  $\alpha^2 \cdot (1 - e^2) = -\beta^2$  erkennen wir, dass  $p \in C$  gilt. Da ein Punkt  $p \in C_+$  der Bedingung  $d_2 - d_1 = 2 \cdot \alpha$  genügt, muss genauer  $p \in C_-$  gelten.  $\square$

**I.2.18 Aufgabe.** Kann eine Parabel gleichzeitig eine Ellipse oder eine Hyperbel sein? Kann eine Ellipse auch eine Hyperbel sein?

**I.2.19 Aufgabe.** Welche Objekte kommen hinzu, wenn man in I.2.1 Definition den Fall  $B \in \ell$  erlaubt?

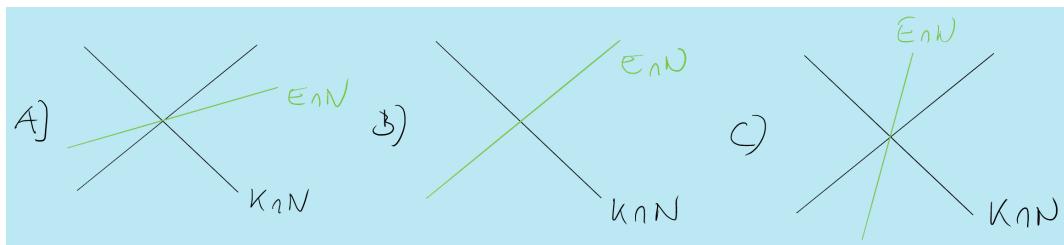
## I.3 Die dandelinschen Sphären

Wenn wir den Kegel  $K$  aus Abschnitt I.1.2 mit einer Ebene  $E$  schneiden, die nicht durch die Spitze  $(0, 0, 0)$  des Kegels geht, so erwarten wir auf Grund der vorangehenden Betrachtungen, dass der Durchschnitt  $E \cap K$  ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel ist. Gemäß I.2.1 Definition müssen wir einen Brennpunkt und eine Leitlinie finden. Dies geschieht mit einer sehr schönen geometrischen Konstruktion.

### I.3.1 Querschnitte

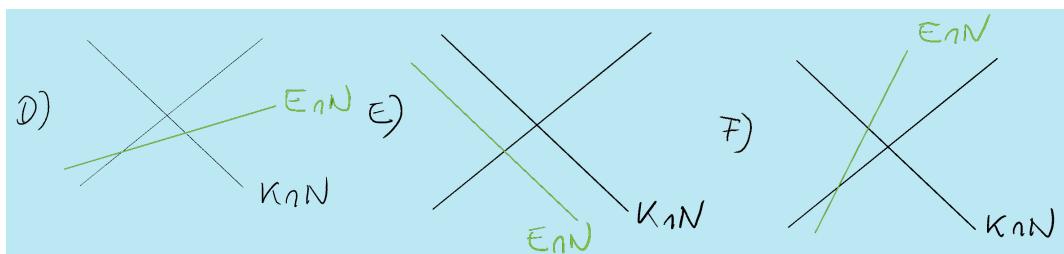
Es seien  $K \subset \mathbb{R}^3$  der Kegel, der in Abschnitt I.1.2 definiert wurde, und  $E \subset \mathbb{R}^3$  eine Ebene. Dann gibt es genau eine Gerade  $\nu \subset \mathbb{R}^3$ , die senkrecht auf  $E$  steht und den Ursprung  $(0, 0, 0)$  enthält. Nach einer geeigneten Drehung um die  $t$ -Achse können wir annehmen, dass  $\nu \subset N$ . Dabei sei  $N$  die  $(x, t)$ -Ebene, d.h.  $N = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 0\}$ . Die Geometrie des Durchschnitts ist dann durch den „Querschnitt“ bestimmt, d.h. durch das Geradenpaar  $K \cap N$  und die Lage der Geraden  $E \cap N$  zu ihm.

Zunächst betrachten wir die Situation, dass  $E \cap N$  durch den Ursprung  $(0, 0, 0) \in N$  geht. Dies ist der Punkt, in dem sich die beiden Geraden in  $K \cap N$  treffen. Es gibt nun drei Fälle, die sich folgendermaßen skizzieren lassen.



In Fall A) gilt für die Steigung  $\delta$  der Geraden  $-1 < \delta < 1$ , und  $E \cap K = \{(0, 0, 0)\}$ . In Fall B) gilt  $\delta = -1$  oder  $\delta = 1$ , d.h.  $E \cap N$  ist eine der beiden Geraden von  $K \cap N$ . In diesem Fall besteht  $E \cap K$  nur aus dieser Geraden. Fall C) entspricht den Steigungen  $\delta < -1$  und  $\delta > 1$ .<sup>6</sup> Dies ist die Situation, in der  $E \cap K$  aus zwei sich schneidenden Geraden besteht.

Jetzt widmen wir uns der Situation, in der  $E \cap N$  den Ursprung  $(0, 0, 0) \in N$  nicht enthält. Es ergeben sich die nachfolgend skizzierten Möglichkeiten.



Wie zuvor bezeichne  $\delta$  die Steigung der Geraden  $E \cap N$ . Fall D) entspricht wieder den Ungleichungen  $-1 < \delta < 1$ , Fall E) der Beziehung  $\delta \in \{\pm 1\}$  und Fall F) der Bedingung  $\delta < -1$  oder  $\delta > 1$ .<sup>7</sup>

<sup>6</sup>Die schließt auch den Fall  $\delta = \infty$  ein, also dass  $E \cap N$  die  $y$ -Achse ist.

<sup>7</sup>Hier bedeutet  $\delta = \infty$ , dass  $E \cap N$  parallel zur  $y$ -Achse ist. (Dieser Fall trat z.B. bei der Ebene  $E^4$  in Abschnitt I.1.3 auf.)

**I.3.1 Bemerkung.** Wenn die Steigung der Geraden  $E \cap N$  negativ ist, dann können wir noch eine Drehung um den Winkel  $\pi$  um die  $t$ -Achse ausführen und befinden uns dann in der Situation, dass die Steigung positiv ist. Ebenso kann man nach einer etwaigen Drehung um den Winkel  $\pi$  annehmen, dass die Steigung der Geraden  $E \cap N$  negativ ist

### I.3.2 Fall D)

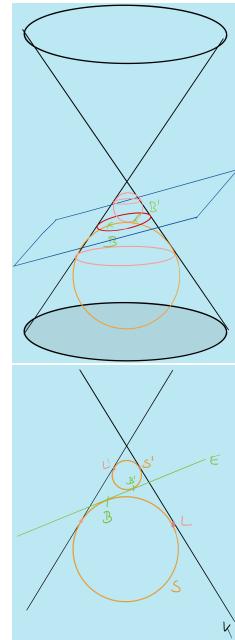
Wir nehmen an, dass  $E \cap N$  die Geraden von  $K \cap N$  unterhalb des Ursprungs  $(0, 0, 0)$  von  $N$  schneidet. Es gibt nun genau eine Sphäre  $S \subset \mathbb{R}^3$ , deren Mittelpunkt auf der  $t$ -Achse liegt und die

- ★ unterhalb der Ebene  $E$  liegt und die Ebene  $E$  in einem Punkt  $B$  berührt und
- ★ im Kegel  $K$  liegt und den Kegel  $K$  entlang eines Kreises  $k$  berührt.

**I.3.2 Bemerkungen.** i) Zu  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei  $E_\lambda$  die in (I.2) definierte Ebene. Es gibt dann eine reelle Zahl  $\varkappa < 0$ , so dass  $k = E_\varkappa \cap K$ .

ii) Es gibt weiter eine Sphäre  $S'$ , deren Mittelpunkt auf der  $t$ -Achse liegt, die oberhalb der Ebene  $E$  liegt und  $E$  in einem Punkt  $B'$  berührt und die im Kegel  $K$  liegt und ihn entlang eines Kreises  $k'$  berührt.

Die Sphären  $S$  und  $S'$  sind die *dandelinischen Sphären*<sup>8</sup>.



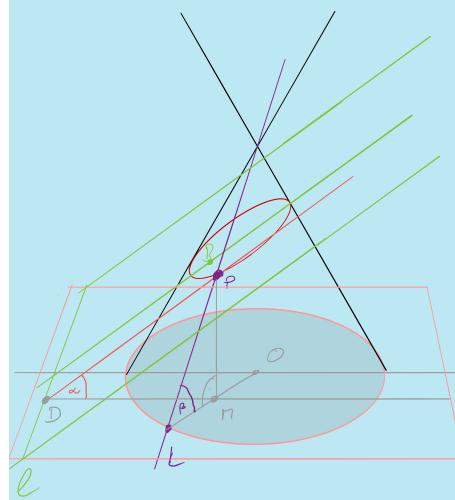
**I.3.3 Aufgabe.** Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der dandelinischen Sphären. Dazu kann das Querschnittsbild verwendet werden.

**I.3.4 Satz.** Wenn die Ebene  $E$  parallel zur  $(x, y)$ -Ebene ist, dann ist der Durchschnitt  $E \cap K$  ein Kreis. Ansonsten schneidet  $E$  die Ebene  $E_\varkappa$ , die durch den Kreis  $k$  definiert ist (s. I.3.2 Bemerkungen, i), entlang einer Geraden  $\ell$ , und  $E \cap K$  ist eine Ellipse mit Brennpunkt  $B$  und Leitline  $\ell$ .

**Beweis.** Wenn die Ebene  $E$  parallel zu  $E_\varkappa$  ist, dann existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $E = E_\lambda$  wie in (I.2) definiert. Gemäß unserer Voraussetzungen ist  $\lambda < 0$ . Wie wir uns bereits in Abschnitt I.1.2 überlegt haben, ist  $E \cap K$  ein Kreis vom Radius  $|\lambda|$ .

Wir können also voraussetzen, dass  $E$  und  $E_\varkappa$  nicht parallel sind. Dann sind  $B$  und  $\ell$  definiert. Wir nehmen auch, wie in I.3.1 Bemerkung erläutert, an, dass die Steigung der Geraden  $E \cap N$  positiv ist. Die folgende Skizze verdeutlicht die Definitionen, die wir benutzen werden.

<sup>8</sup>Benannt nach dem französischen Mathematiker und Ingenieur Germinal Pierre Dandelin (★12. April 1794, †15. Februar 1847).



Es sei  $P \in E \cap K$ . Der Gerade durch  $(0, 0, 0)$  und  $P$  trifft die Ebene  $E_\zeta$  in einem Punkt, den wir  $L$  nennen.<sup>9</sup> In der Ebene  $E$  fällen wir das Lot<sup>10</sup> von  $P$  auf  $\ell$ . Der Fußpunkt dieses Lots sei  $D$ . Von  $P$  aus können wir in Analogie zu I.1.1 das Lot auf die Ebene  $E_\zeta$  fällen. Es sei  $M$  der Fußpunkt dieses Lots. Weiter erklären wir  $O$  zu dem Punkt, in dem die  $t$ -Achse die Ebene  $E_\zeta$  schneidet, d.h.,  $O = (0, 0, \zeta)$ . Der Punkt  $M$  liegt auf der Verbindungsgerade durch  $O$  und  $L$ .<sup>11</sup>

Die Ebene, die  $P$ ,  $M$  und  $D$  enthält, ist parallel zur  $(x, t)$ -Ebene. Der Winkel  $\alpha$  an  $D$  in dem von  $P$ ,  $M$  und  $D$  gebildeten rechtwinkligen Dreieck ist nach Definition der Schnittwinkel zwischen  $E$  und  $E_\zeta$ . Offenbar gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{d(P, M)}{d(P, D)}. \quad (\text{I.5})$$

Entsprechend können wir das rechtwinklige Dreieck mit den Ecken  $P$ ,  $M$  und  $L$  betrachten. Es sei  $\beta$  der Winkel in diesem Dreieck an der Ecke  $L$ . (Aufgrund unserer Definition gilt  $\beta = \pi/4$ , aber wir werden den Winkel weiter mit  $\beta$  bezeichnen, um deutlich zu machen, dass der Beweis für beliebige Kegel funktioniert.) Wir finden

$$\sin(\beta) = \frac{d(P, M)}{d(P, L)}. \quad (\text{I.6})$$

Mit Gleichung (I.5) und (I.6) erhalten wird

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{d(P, L)}{d(P, D)}. \quad (\text{I.7})$$

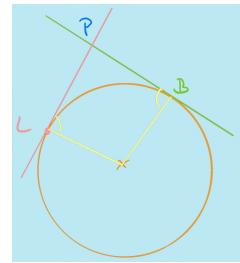
<sup>9</sup>Es gilt  $L \in k$ .

<sup>10</sup>Die Ebene  $E$  ist zwar kein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^2$ , dennoch sind Richtungsvektoren von Geraden in  $E$  als Vektoren in  $\mathbb{R}^3$  definiert, so dass es sinnvoll ist, von orthogonalen Geraden in  $E$  zu reden.

<sup>11</sup>Die Punkte  $(0, 0, 0)$ ,  $P$ ,  $L$  und  $O$  liegen allesamt in einer Ebene, die senkrecht auf  $E_\zeta$  steht. Daher ist das Lot von  $P$  auf  $E_\zeta$  in dieser Ebene enthalten und stimmt mit dem Lot von  $P$  auf die Gerade von  $O$  und  $L$  in dieser Ebene überein.

Die Ebene, die durch  $B$ ,  $P$  und  $L$  bestimmt ist, schneidet die (untere) dandelinische Sphäre in einem Kreis, und sowohl die Gerade durch  $P$  und  $B$  als auch die Gerade durch  $P$  und  $L$  ist nach Konstruktion eine Tangente an diesen Kreis. Aus elementarer Geometrie in der Ebene folgt

$$d(P, L) = d(P, B). \quad (\text{I.8})$$



Nun gilt weiter, dass

$$d(P, D) = d(P, \ell), \quad (\text{I.9})$$

und der Winkel  $\alpha$  hängt nicht von  $P$  ab.<sup>12</sup> Zusammen genommen haben wir bewiesen, dass

$$\forall P \in K \cap E : \frac{d(P, B)}{d(P, \ell)} \stackrel{\text{(I.8) \& (I.9)}}{=} \frac{d(P, L)}{d(P, D)} \stackrel{\text{(I.7)}}{=} \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} =: e.$$

An dieser Stelle ist bereits klar, dass  $E \cap K$  in einer Konik in der Ebene  $E$  enthalten ist.

Der Winkel  $\alpha$  gibt die Steigung der Geraden  $E \cap N$  an. Wir hatten uns mit Hilfe von I.3.1 in die Lage versetzt, dass  $0 < \alpha$ . Fall D) ist dann durch Bedingung  $0 < \alpha < \beta$  charakterisiert, so dass

$$0 < \sin(\alpha) < \sin(\beta) < 1,$$

d.h.  $e < 1$ . Bei der besagten Konik handelt es sich um eine Ellipse.

Bisher haben wir nachgewiesen, dass  $E \cap K$  in der Ellipse  $C$  der Exzentrizität  $e$ , die durch  $B$  und  $\ell$  gegeben ist, enthalten ist. Für die Umkehrung sei  $Q \in C$ . Weiter sei  $O'$  der Schnittpunkt der  $t$ -Achse mit der Ebene  $E$ . Die Halbgerade  $h$ , die in  $O'$  startet und durch  $Q$  läuft, schneidet  $E \cap K$  in einem Punkt  $P$ . (Warum?) Wie wir gesehen haben, gilt  $P \in C$ . Da  $h$  die Ellipse  $C$  nur in einem Punkt schneidet (warum?), folgt  $Q = P$  und folglich  $Q \in E \cap K$ .  $\square$

*I.3.5 Bemerkungen.* i) Der Beweis macht deutlich, wie die Geometrie durch die Steigung der Geraden  $E \cap N$  (in den Skizzen in Abschnitt I.3.1 grün markiert) bestimmt ist.

ii) Die zweite dandelinische Sphäre  $S'$  definiert den zweiten möglichen Brennpunkt der Ellipse (vgl. I.2.10 Aufgabe). Der Kreis  $k'$ , entlang dessen die Sphäre  $S'$  den Kegel  $K$  berührt, bestimmt eine Ebene  $E_{\lambda'}$ . Die zweite Leitlinie ist nun  $\ell' := E \cap E_{\lambda'}$ .

iii) Mit der hier entwickelten Anschauung kann man den Kreis als Grenzfall der Ellipsen geometrisch verstehen. Es sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass die Ebene  $E$  die  $t$ -Achse im Punkt  $(0, 0, \lambda)$  trifft. Nun drehe man die Ebene  $E$  um die Achse  $E \cap E_{\lambda}$  in Richtung der waagerechten Position. Dann wandert die Leitlinie in Richtung der Unendlichkeit, und die Brennpunkte  $B$  und  $B'$  nähern sich an.

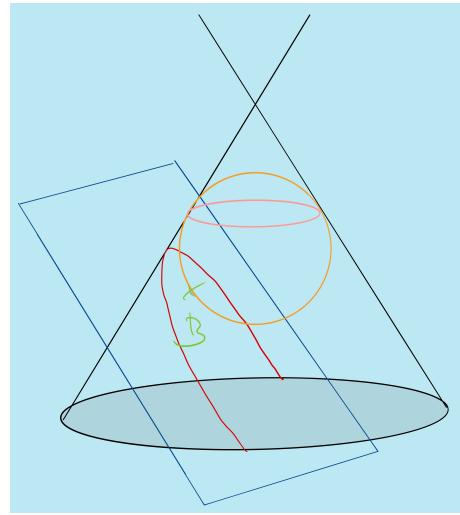
<sup>12</sup>Er ist ja der Schnittwinkel der Ebenen  $E$  und  $E_{\lambda}$ .

### I.3.3 Fall E)

Auch dieser Fall wird wieder mit einer geeigneten dandelinschen Sphäre gelöst. Die folgende Skizze illustriert die Konstruktion.

**I.3.6 Aufgabe.** Formulieren Sie die Eigenschaften, die die dandelinsche Sphäre  $S$  in der nebenstehenden Abbildung charakterisieren. Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit dieser Sphäre.

Wie in Abschnitt I.3.2 berührt die dandelinsche Sphäre  $S$  den Kegel entlang eines Kreises  $k$ . Dieser Kreis bestimmt eine reelle Zahl  $\varkappa$ , so dass  $E_\varkappa \cap K = k$ . Wir nehmen wieder  $\varkappa < 0$  an. In der vorliegenden Situation können die Ebenen  $E_\varkappa$  und  $E$  nicht parallel sein. Es sei  $\ell := E \cap E_\varkappa$ . Weiter sei  $B$  derjenige Punkt, an dem  $S$  die Ebene  $E$  berührt.



**I.3.7 Satz.** Der Durchschnitt  $E \cap K$  ist eine Parabel in der Ebene  $E$ , der Punkt  $B$  ist ihr Brennpunkt und die Gerade  $\ell$  ihre Leitlinie.

**I.3.8 Bemerkung.** Gemäß I.2.7 Aufgabe sind Brennpunkt und Leitlinie einer Parabel eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Da wir im Beweis von I.3.4 Satz die relevanten Konstruktionen ausführlich dargestellt haben, können wir uns nun ein bisschen kürzer fassen. Das folgende Bild führt die Bezeichnungen ein. Man beachte, dass sich die dandelinsche Sphäre diesmal oberhalb der Ebene  $E$  befindet. Diesmal benutzen wir I.3.1 Bemerkung, um voraussetzen zu können, dass die Steigung von  $E \cap N$  negativ ist. In der vorliegenden Situation bedeutet dies  $\delta = -1$ .

Mit dem rechtwinkligen Dreieck mit den Ecken  $D, M$  und  $P$  finden wir

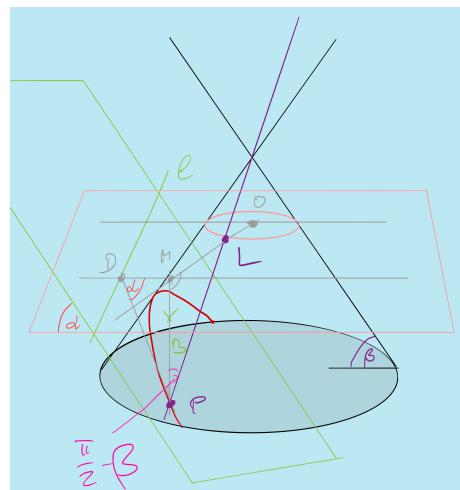
$$\sin(\alpha) = \frac{d(P, M)}{d(P, D)}.$$

Der Winkel am Punkt  $P$  in dem rechtwinkligen Dreieck mit den Ecken  $L, M$  und  $P$  ist  $\pi/2 - \beta$ ,  $\beta$  der Winkel, den die Gerade  $\gamma$  (s. Abschnitt I.1.2) mit der  $x$ -Achse einschließt. (Aus der Definition von  $\gamma$  folgt, dass  $\beta = \pi/4$ . Der Beweis funktioniert wieder in der allgemeinen Situation.) Es gilt

$$\sin(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{d(P, M)}{d(P, L)}.$$

Wie im Beweis von I.3.4 Satz gelten die Identitäten

$$d(P, D) = d(P, \ell) \quad \text{und} \quad d(P, L) = d(P, B).$$



Es folgt

$$\forall P \in E \cap K : \frac{d(P, \ell)}{d(P, B)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} =: e. \quad (\text{I.10})$$

Es sei  $F := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 0\}$  die  $(x, t)$ -Ebene. Man erinnere sich daran, dass gemäß der Festlegung von Fall E) die Gerade  $E \cap F$  parallel zur Geraden  $\gamma$  ist. Das bedeutet, dass der Schnittwinkel der Ebenen  $E$  und  $E_\alpha$  mit dem Winkel  $\beta$  übereinstimmt. Nach dem Satz über Wechselwinkel ist der genannte Winkel  $\alpha$ . Somit folgt  $e = 1$ . Wir haben nun überprüft, dass der Kegelschnitt  $E \cap K$  in der Parabel  $C$ , die durch den Brennpunkt  $B$  und die Leitlinie  $\ell$  definiert, enthalten ist.

Dass auch die umgekehrte Inklusion besteht, weist man wie im Beweis von I.3.4 Satz nach.  $\square$

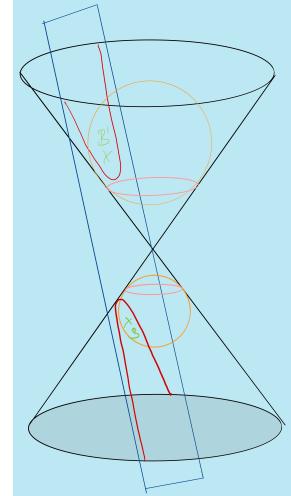
### I.3.4 Fall F)

Auch in diesem Fall gibt es wieder geeignete dandelinische Sphären. Sie sind in der nächsten Abbildung dargestellt.

*I.3.9 Aufgabe.* Formulieren Sie die Eigenschaften, die die dandelinischen Sphären in der nebenstehenden Abbildung charakterisieren. Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit dieser Sphären.

Wir arbeiten mit der unteren Sphäre, nennen wir sie  $S$ . Sie berührt den Kegel entlang eines Kreises  $k$ . Dadurch ist die reelle Zahl  $\alpha$  mit  $E_\alpha \cap K = k$  definiert. Wir setzen  $\alpha < 0$  voraus. Die Ebenen  $E_\alpha$  und  $E$  schneiden sich in einer Geraden  $\ell$ . Es sei  $B$  derjenige Punkt, an dem  $S$  die Ebene  $E$  berührt.

**I.3.10 Satz.** *Der Durchschnitt  $E \cap K$  ist eine Hyperbel in der Ebene  $E$  mit Brennpunkt  $B$  und Leitlinie  $\ell$ .*



*Zum Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall des unteren Asts. Hier ist zu bemerken, dass der Beweis von I.3.7 Satz bis einschließlich (I.10) übernommen werden kann. Im letzten Schritt gilt dann  $\pi/2 > \alpha > \beta$ , so dass  $e > 1$ .

Wir überlassen es der Leserin bzw. dem Leser zu überprüfen, dass  $B$  und  $\ell$  auch ein Brennpunkt und eine Leitlinie für den oberen Ast sind.  $\square$

### I.3.5 Familien von Kegelschnitten

Man kann die Ebene variieren und dabei beobachten, wie sich der Kegelschnitt verändert, „deformiert“ wird. Man kann z.B. die Familie von Ebenen

$$E(\eta) := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = a + \eta\}, \quad \eta \in \mathbb{R},$$

betrachten. Dies ist eine Familie von parallelen Ebenen, so dass die Durchschnitte  $E(\eta) \cap K$  den ganzen Kegel ausfüllen, wenn  $\eta$  die reellen Zahlen durchläuft. Für  $\eta = 0$  ist  $E(\eta) \cap K$  eine Gerade (vgl.  $E^3 \cap K$  in Abschnitt I.1.3). Für alle anderen Werte von  $\eta$  ist  $E(\eta) \cap K$

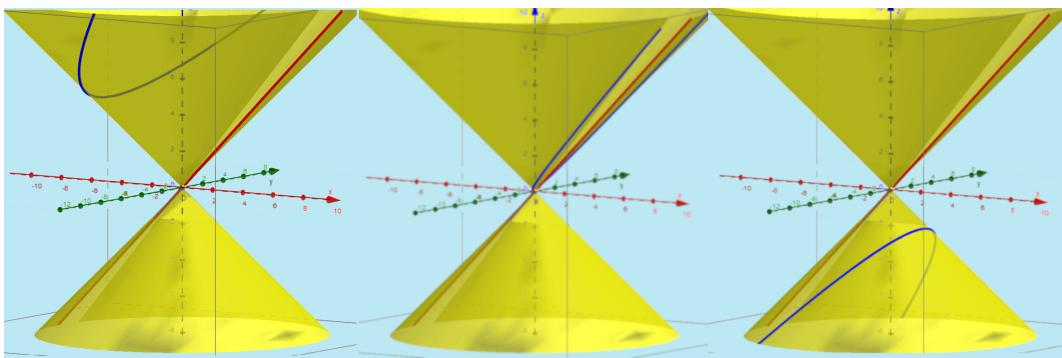
eine Parabel. Man überprüft, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\lambda, \eta) &\longmapsto \left( \frac{1}{2} \cdot (\lambda^2 \cdot \eta - \eta), \lambda \cdot \eta, \frac{1}{2} \cdot (\lambda^2 \cdot \eta + \eta) \right)\end{aligned}$$

die Menge  $K \setminus \gamma$  parametrisiert, so dass

$$\forall \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \varphi(\mathbb{R} \times \{\eta\}) = E(\eta) \cap K.$$

Man kann solche parametrisierten Flächen z.B. von GeoGebra<sup>13</sup> darstellen lassen und dabei in Echtzeit den Parameter  $\eta$  variieren und somit verfolgen, wie die Parabel  $E(\eta) \cap K$  mit  $\eta$  variiert. Die Abbildung zeigt die Parabel für drei verschiedene Werte von  $\eta$  sowie die Gerade  $\gamma$ , die dem Parameter  $\eta = 0$  entspricht.



Man kann sich auch die Familie

$$F(\eta) := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = \eta \cdot c - 1\}, \quad \eta \in \mathbb{R},$$

anschauen. Diese Familie besteht aus allen Drehungen der Ebene  $F(0)$  um die Achse  $\pi := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -1 \wedge c = 0\}$ . Die Ebene  $F(0)$  ist parallel zur  $(y, t)$ -Ebene. In diesem Fall ist der Durchschnitt  $F(0) \cap K$  eine Hyperbel (vgl.  $E^4 \cap K$  in Abschnitt I.1.3). In der Tat erhält man für alle  $\eta \in (-1, 1)$  eine Hyperbel als Durchschnitt  $F(\eta) \cap K$ . Für  $\eta = \pm 1$  ist der Durchschnitt eine Parabel. Für alle anderen Werte ergibt sich eine Ellipse. Im Grenzfall „ $\eta = \infty$ “ ergibt sich die  $(x, y)$ -Ebene, und der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Kegel besteht nur aus dem Ursprung. Man beachte, dass für  $\eta \in \mathbb{R}$  die Punkte  $(a, b, c) \in F(\eta) \cap K$  die Gleichung

$$(\eta \cdot c - 1)^2 + b^2 = c^2$$

erfüllen. Wir definieren daher die Fläche

$$\Phi := \{(\vartheta, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (\vartheta \cdot c - 1)^2 + b^2 - c^2 = 0\}.$$

Für die Abbildung

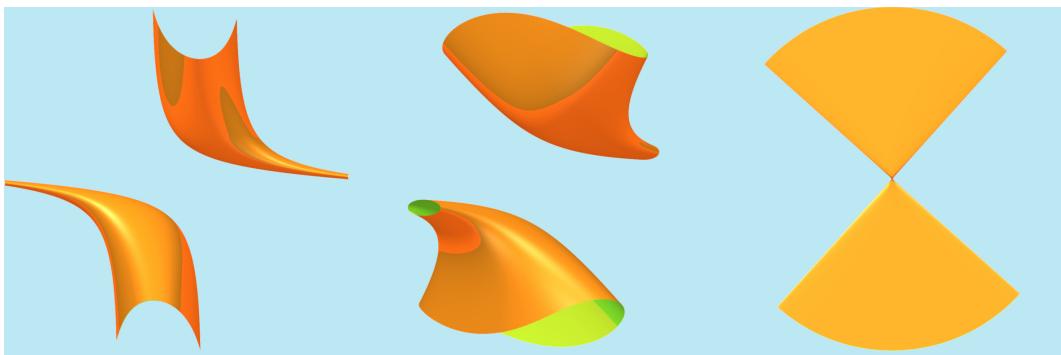
$$\begin{aligned}\Pi: \Phi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vartheta, b, c) &\longmapsto \vartheta\end{aligned}$$

<sup>13</sup><https://www.geogebra.org/m/BjV7cNwb>

und  $\eta \in \mathbb{R}$  gilt, dass  $\Pi^{-1}(\eta)$  - als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  vermöge  $(\vartheta, b, c) \mapsto (b, c)$  interpretiert - mit dem Bild von  $F(\eta) \cap K$  unter der Abbildung

$$\begin{aligned}\Xi_\eta: F(\eta) &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) &\mapsto (b, c)\end{aligned}$$

übereinstimmt. Die Abbildung  $\Xi_\eta$  ist bijektiv, weil  $F(\eta)$  nicht parallel zur  $(x, y)$ -Ebene ist,  $\eta \in \mathbb{R}$ . Die Abbildung  $\Xi_\eta$  ist keine Isometrie (s. Definition ??), sondern eine affine Abbildung (s. Seite II.2). In Abschnitt II.2.3 (s. insbesondere II.2.34 Bemerkung) werden wir beweisen, dass eine bijektive affine Abbildung Parabeln auf Parabeln, Ellipsen auf Ellipsen und Hyperbeln auf Hyperbeln abbildet. Die folgenden Bilder wurden mit Surfer<sup>14</sup> erstellt.



Die erste Abbildung zeigt die Fläche aus der  $y$ -Richtung. Man erkennt den Übergang von Hyperbeln zu Ellipsen und kann die beiden „kritischen“ Werte  $\eta = \pm 1$  erahnen, an denen die Fasern von  $\Pi$  Parabeln sind. Die zweite Abbildung zeigt die Fläche aus einem anderen Blickwinkel, so dass die Ellipsen sichtbar sind. Die dritte Abbildung zeigt die Fläche aus der  $x$ -Richtung. Sie bestätigt, dass das Bild von  $\Phi$  mit dem Bild von  $K$  unter der Projektion  $(a, b, c) \mapsto (b, c)$  übereinstimmt.

## I.4 Reflexionen an Koniken

Aus technischen Anwendungen wie der Parabolantenne, dem Parabolscheinwerfer oder dem Sonnenofen sind die Reflexionseigenschaften eines parabolisch geformten Spiegels bekannt.<sup>15</sup> Diese Eigenschaften kann man mit Hilfe der infinitesimalen Geometrie einer Parabel, d.h. mit Hilfe ihrer Tangenten, beweisen. Auch Ellipsen und Hyperbeln haben interessante Reflexionseigenschaften, die in wichtigen technischen Anwendungen ausgenutzt werden.

<sup>14</sup><https://imaginary.org/program/surfer>. Es wird der Durchschnitt der Fläche mit einem Ball von frei wählbarem Radius um den Ursprung gezeigt.

<sup>15</sup>Genauer gesagt handelt es sich um Teile eines Rotationsparaboloids, das entsteht, wenn man etwa eine Standardparabel um die  $x$ -Achse rotieren lässt.

### I.4.1 Tangenten

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und

$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \lambda &\longmapsto (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda))\end{aligned}$$

eine differenzierbare Abbildung. Das bedeutet, dass

$$\gamma_i: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

für  $i = 1, 2$  eine differenzierbare Funktion ist. Die *Ableitung* von  $\gamma$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\gamma': I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \lambda &\longmapsto (\gamma'_1(\lambda), \gamma'_2(\lambda)).\end{aligned}$$

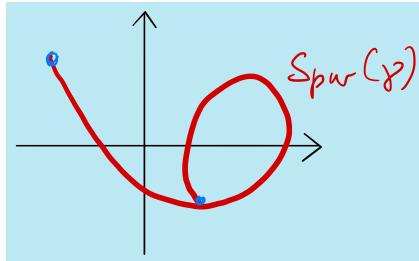
Weiter nennt man die Menge

$$C := \text{Spur}(\gamma) := \{\gamma(\lambda) \mid \lambda \in I\}$$

die *Spur* von  $\gamma$ .

Wir nehmen an, dass  $\gamma$  injektiv ist und dass  $\lambda_0 \in I$  ein Wert mit  $\gamma'(\lambda_0) \neq (0, 0)$  ist. Dann ist die *Tangente* an  $C$  im Punkt  $c_0 := \gamma(\lambda_0)$  die Gerade mit Richtungsvektor  $\gamma'(\lambda_0)$ , die durch  $c_0$  geht. Sie wird mit  $T_{c_0} C$  bezeichnet.

*I.4.1 Bemerkung.* Selbst wenn  $\gamma$  injektiv ist und  $\gamma'(\lambda) \neq (0, 0)$  für alle  $\lambda \in I$  gilt, dann braucht  $C$  keine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$  (im Sinne von [38], 11.3.3 Definition) zu sein.



Es kann ein Phänomen wie im gezeigten Bild auftreten. Allerdings ist für  $t_1, t_2 \in I$  mit  $t_1 < t_2$  die Kurve  $\tilde{C} := \{\gamma(\lambda) \mid \lambda \in (t_1, t_2)\}$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ . Die oben definierte Tangente stimmt dann mit dem in [38], 11.4.1 Definition, definierten Tangentialraum überein.

### I.4.2 Parabeln

Es seien  $\alpha > 0$  und

$$C := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2 = 4 \cdot \alpha \cdot a\}$$

die zugehörige Parabel in Standardform (I.2.5 Satz). Wie in I.2.6 Bemerkung erläutert ist  $C$  die Spur der injektiven Abbildung

$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \lambda &\longmapsto (\alpha \cdot \lambda^2, 2 \cdot \alpha \cdot \lambda).\end{aligned}$$

Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\gamma'(\lambda) = (2 \cdot \alpha \cdot \lambda, 2 \cdot \alpha) \neq (0, 0).$$

Für  $\lambda_0 \neq 0$  und  $(a_0, b_0) := c_0 := \gamma(\lambda_0)$  lautet die Gleichung der Tangenten

$$b = \frac{1}{\lambda_0} \cdot (a - a_0) + b_0.$$

Da  $b_0 \neq 0$  ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} b_0 \cdot b &= \frac{b_0}{\lambda_0} \cdot (a - a_0) + b_0^2 \\ &= 2 \cdot \alpha \cdot (a - a_0) + b_0^2 \\ &= 2 \cdot \alpha \cdot (a - \alpha \cdot \lambda_0^2) + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_0^2 \\ &= 2 \cdot \alpha \cdot (a + \alpha \cdot \lambda_0^2) \\ &= 2 \cdot \alpha \cdot (a + a_0). \end{aligned}$$

Für  $\lambda_0 = 0$  gilt  $c_0 = (0, 0)$ , und  $T_{c_0}C$  ist die  $y$ -Achse. Die obige Gleichung wird zu  $0 = 2 \cdot \alpha \cdot a$  und definiert wegen  $\alpha \neq 0$  ebenfalls die  $y$ -Achse. Insgesamt haben wir die folgende Aussage bewiesen.

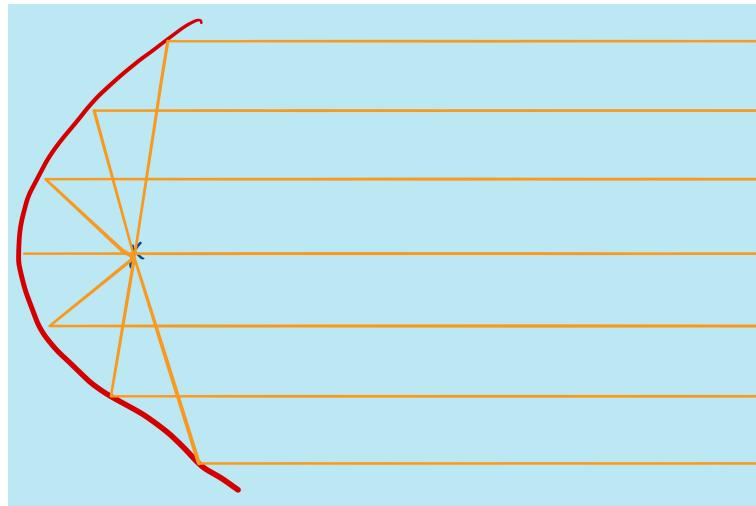
**I.4.2 Satz.** Es sei  $C$  die oben beschriebene Parabel und  $c_0 \in C$ . Dann ist die Tangente an  $C$  in  $c_0$  durch

$$T_{c_0}C = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b_0 \cdot b = 2 \cdot \alpha \cdot (a + a_0)\}$$

gegeben.

Mit dieser Formel lässt sich das Reflexionsverhalten von Parabolspiegeln und -antennen erklären.

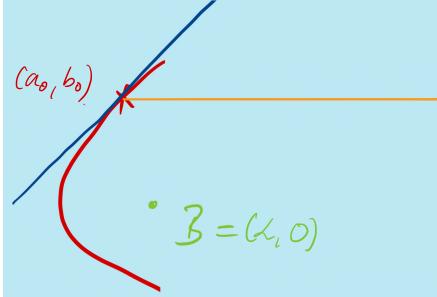
**I.4.3 Satz.** Wir stellen uns die obige Standardparabel als Parabolspiegel vor. Dann werden parallel zur  $x$ -Achse von rechts einfallende Lichtstrahlen so reflektiert, dass sie durch den Brennpunkt laufen.



**I.4.4 Bemerkungen.** i) Dieses Phänomen erklärt, wieso bei der Definition von Koniken (I.2.1 Definition) von einem Brennpunkt gesprochen wird.

ii) Da optische Wege umkehrbar sind, erhält man eine entsprechende Aussage für eine Lichtquelle, die im Brennpunkt platziert wird. Dieser Satz wird etwa bei der Herstellung von Scheinwerfern verwendet.

*Beweis von I.4.3 Satz.* Das Reflexionsverhalten wird durch das bekannte Gesetz „Ausfallwinkel gleich Einfallwinkel“ bestimmt. Dazu wird die Parabel in einem Punkt  $c_0$  durch ihre Tangente ersetzt und das genannte optische Gesetz an der Tangente angewendet.



Seien also  $c_0 = (a_0, b_0) \in C$  und  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  die reelle Zahl mit  $\gamma(\lambda_0) = c_0$ , d.h.  $(a_0, b_0) = (\alpha \cdot \lambda_0^2, 2 \cdot \alpha \cdot \lambda_0)$ . Die Gleichung für die Tangente  $T_{c_0}C$  ist

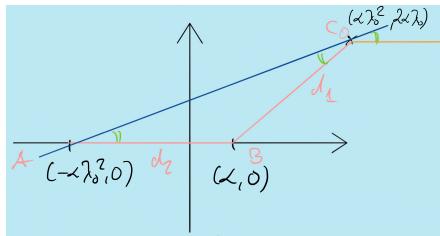
$$2 \cdot \alpha \cdot \lambda_0 \cdot b = 2 \cdot \alpha \cdot (a + \alpha \cdot \lambda_0^2),$$

also

$$\lambda_0 \cdot b = a + \alpha \cdot \lambda_0^2.$$

Die Tangente  $T_{c_0}C$  schneidet die  $x$ -Achse im Punkt  $A := (-\alpha \cdot \lambda_0^2, 0)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d_2 &:= d(B, A) = \alpha + \alpha \cdot \lambda_0^2, \\ d_1 &:= d(B, c_0) = \sqrt{(\alpha - \alpha \cdot \lambda_0^2)^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda_0^4} \\ &= \sqrt{(\alpha + \alpha \cdot \lambda_0^2)^2} \\ &= \alpha + \alpha \cdot \lambda_0^2 = d_2. \end{aligned}$$



Das Dreieck mit den Eckpunkten  $A$ ,  $B$  und  $c_0$  ist also ein gleichschenkliges, so dass die Winkel an den Ecken  $A$  und  $c_0$  gleich groß sind. Nach dem Satz über Stufenwinkel ist der Winkel an der Ecke  $A$  genauso groß wie der Einfallswinkel des Strahls, der parallel zur  $x$ -Achse verläuft und im Punkt  $c_0$  auf den Parabolspiegel trifft. Der reflektierte Strahl folgt damit der Geraden durch  $c_0$  und  $B$ .  $\square$

### I.4.3 Hyperbeln

Es seien  $e > 1$ ,  $\alpha > 0$  reelle Zahlen und  $\beta := \alpha \cdot \sqrt{e^2 - 1}$ . Die entsprechende Hyperbel in Standardform (I.2.13 Satz) ist

$$C := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{a}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{b}{\beta} \right)^2 = 1 \right\}.$$

Für die Konstruktion von hyperbolischen Spiegeln benötigen wir nur einen Ast. Wir verwenden die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi_+ &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \lambda &\longmapsto (\alpha \cdot \cosh(\lambda), \beta \cdot \sinh(\lambda)) \end{aligned}$$

aus I.2.16 Bemerkung. Die Ableitung an der Stelle  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  ist durch die Formel

$$\varphi'_+(\lambda_0) = (\alpha \cdot \sinh(\lambda_0), \beta \cdot \cosh(\lambda_0))$$

gegeben. Es sei  $c_0 := (a_0, b_0) := (\alpha \cdot \cosh(\lambda_0), \beta \cdot \sinh(\lambda_0)) \in C_+$ . Für  $\lambda_0 \neq 0$  ist Gleichung für die Tangente an  $C_+$  in  $c_0$

$$b = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\cosh(\lambda_0)}{\sinh(\lambda_0)} \cdot (a - a_0) + b_0.$$

Diese Gleichung schreiben wir um zu der Gleichung

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \sinh(\lambda_0) \cdot b &= \beta \cdot \cosh(\lambda_0) \cdot a - \alpha \cdot \beta \cdot \cosh^2(\lambda_0) + \alpha \cdot \beta \cdot \sinh^2(\lambda_0) \\ &\stackrel{(I.4)}{=} \beta \cdot \cosh(\lambda_0) \cdot a - \alpha \cdot \beta.\end{aligned}$$

Schließlich finden wir

$$\frac{a_0 \cdot a}{a^2} - \frac{b_0 \cdot b}{\beta^2} = \frac{a}{\alpha} \cdot \cosh(\lambda_0) - \frac{b}{\beta} \cdot \sinh(\lambda_0) = 1.$$

Diese Gleichung stimmt auch für  $\lambda_0 = 0$ . (Warum?) Somit haben wir das Folgende gezeigt.

**I.4.5 Satz.** Es sei  $C$  die oben beschriebene Hyperbel und  $c_0 = (a_0, c_0) \in C_+$ . Dann ist die Tangente an  $C$  in  $c_0$  durch

$$T_{c_0}C = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{a_0 \cdot a}{a^2} - \frac{b_0 \cdot b}{\beta^2} = 1 \right\}$$

gegeben.

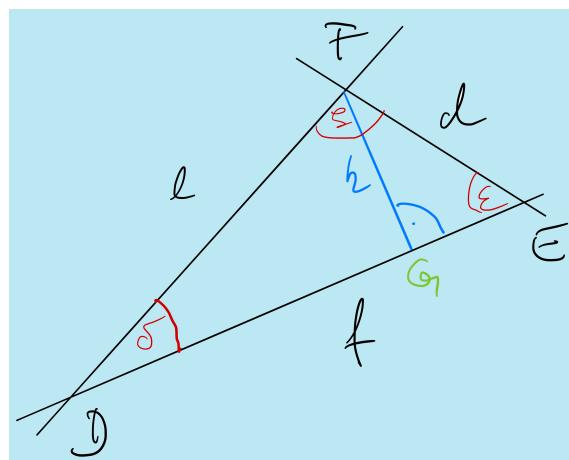
Der nächste Satz beschreibt das Reflexionsverhalten an einem hyperbolisch geformten Spiegel. Es bezeichnen  $B$  und  $B'$  die Brennpunkte der Hyperbel (s. I.2.14 Bemerkungen, ii), und I.2.15 Aufgabe).

**I.4.6 Satz.** Ein Lichtstrahl, dessen (gedachte) Verlängerung den Brennpunkt  $B$  passiert, wird an einem hyperbolischen Spiegel so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch den Brennpunkt  $B'$  läuft.

Der Beweis benutzt den folgenden Satz aus der Geometrie der Dreiecke.

**I.4.7 Satz.** Es seien  $D, E$  und  $F$  drei Punkte der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen. Es seien  $d := d(E, F)$ ,  $e = d(D, F)$  und  $f := d(D, E)$  die Längen der Seiten des Dreiecks mit den Ecken  $D, E$  und  $F$ ,  $\delta$  der Winkel an der Ecke  $D$ ,  $\varepsilon$  der Winkel an der Ecke  $E$  und  $\zeta$  der Winkel an der Ecke  $F$ . Dann gilt

$$\frac{d}{\sin(\delta)} = \frac{e}{\sin(\varepsilon)} = \frac{f}{\sin(\zeta)}.$$



*Beweis.* Man falle das Lot von  $F$  auf die Gerade durch  $D$  und  $E$ . Es sei  $G$  der Fußpunkt des Lots. Dann ist  $h := d(F, G)$  die Höhe des Dreiecks. Bekanntlich gilt für die Fläche des Dreiecks die Formel

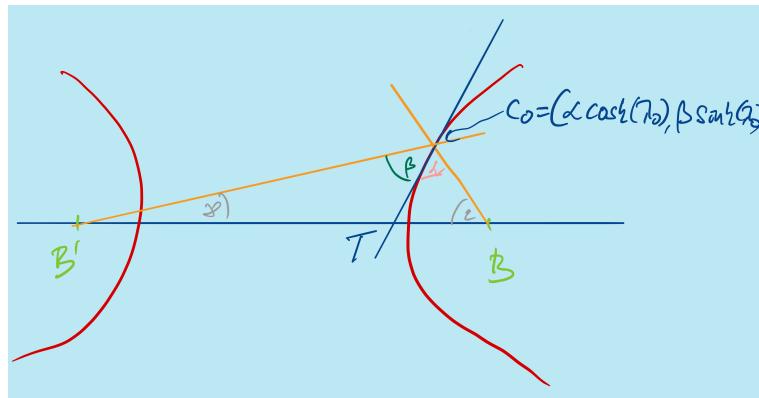
$$A = \frac{1}{2} \cdot f \cdot h = \frac{1}{2} \cdot f \cdot d \cdot \sin(\varepsilon).$$

Somit finden wird

$$\frac{\sin(\varepsilon)}{e} = \frac{2 \cdot A}{d \cdot e \cdot f}.$$

Analog kann man für die anderen Ecken argumentieren und erhält so das gewünschte Ergebnis.  $\square$

*Beweis von I.4.6 Satz.* In dem folgenden Bild bezeichne  $T$  den Schnittpunkt der Tangenten an  $C$  im Punkt  $c_0$  mit der  $x$ -Achse.



Wir müssen  $\alpha = \beta$  beweisen, denn dann folgt nach dem Gesetz „Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel“, dass der Strahl durch  $c_0$  und  $B'$  die Reflexion des Strahls, der auf der Gerade durch  $c_0$  und  $B$  einfällt, ist. Da  $0 < \alpha, \beta \leq \pi/2$  genügt es,  $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$  zu überprüfen. Es sei

$$\ell = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = \frac{\alpha}{e} \right\}$$

die zu  $B$  gehörige Leitlinie. Offenbar gilt  $d(c_0, \ell) = \alpha \cdot \cosh(\lambda_0) - (\alpha/e)$ , so dass

$$\begin{aligned} d(c_0, B) &= \alpha \cdot e \cdot \cosh(\lambda_0) - \alpha, \\ d(c_0, B') &= \alpha \cdot e \cdot \cosh(\lambda_0) + \alpha \end{aligned}$$

und

$$\frac{d(c_0, B)}{d(c_0, B')} = \frac{\alpha \cdot e \cdot \cosh(\lambda_0) - \alpha}{\alpha \cdot e \cdot \cosh(\lambda_0) + \alpha}. \quad (\text{I.11})$$

Es sei  $T = (\eta, 0)$ . Aus der Beschreibung der Tangente in I.4.5 Satz folgt

$$\eta = \frac{\alpha}{\cosh(\lambda_0)}.$$

Wir berechnen damit

$$\begin{aligned} d(T, B) &= \alpha \cdot e - \frac{\alpha}{\cosh(\lambda_0)} \quad \text{und} \\ d(T, B') &= \alpha \cdot e + \frac{\alpha}{\cosh(\lambda_0)}. \end{aligned}$$

Wir erkennen

$$\frac{d(T, B)}{d(T, B')} = \frac{\alpha \cdot e \cdot \cosh(\lambda_0) - \alpha}{\alpha \cdot e \cdot \cosh(\lambda_0) + \alpha} \stackrel{(I.11)}{=} \frac{d(c_0, B)}{d(c_0, B')}. \quad (I.12)$$

Aus I.4.7 Satz für das Dreieck mit den Ecken  $c_0, B'$  und  $T$  folgt

$$\frac{\sin(\beta)}{d(B', T)} = \frac{\sin(\gamma)}{d(c_0, T)},$$

d.h.

$$\sin(\beta) \cdot d(c_0, T) = \sin(\gamma) \cdot d(T, B'). \quad (I.13)$$

Derselbe Satz liefert für das Dreieck mit den Ecken  $c_0, T$  und  $B$  die Beziehung

$$\frac{\sin(\alpha)}{d(T, B)} = \frac{\sin(\varepsilon)}{d(c_0, T)},$$

d.h.

$$\sin(\alpha) \cdot d(c_0, T) = \sin(\varepsilon) \cdot d(T, B). \quad (I.14)$$

Wir müssen also noch beweisen, dass

$$\sin(\varepsilon) \cdot d(T, B) = \sin(\gamma) \cdot d(T, B').$$

Dies bedeutet

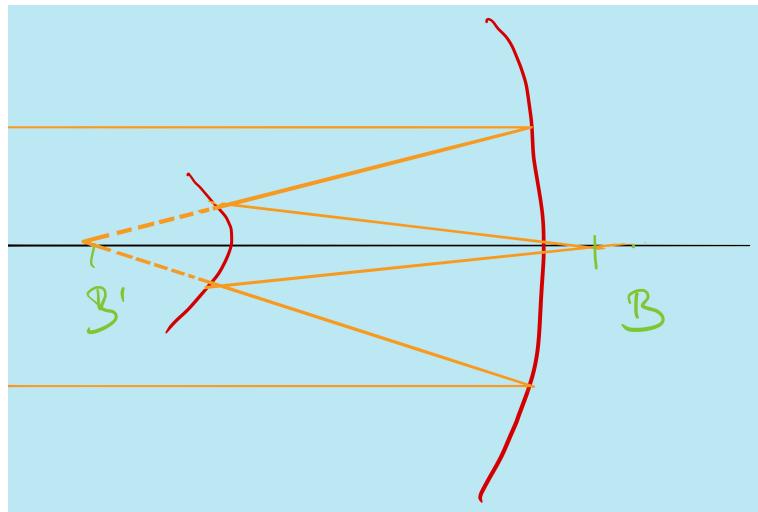
$$\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\varepsilon)} = \frac{d(T, B)}{d(T, B')} \stackrel{(I.12)}{=} \frac{d(c_0, B)}{d(c_0, B')},$$

also

$$\frac{d(c_0, B)}{\sin(\gamma)} = \frac{d(c_0, B')}{\sin(\varepsilon)}.$$

Die Gleichung folgt aus I.4.7 Satz für das Dreieck mit den Ecken  $c_0, B$  und  $B'$ .  $\square$

Eine Anwendung ist der Cassegrain<sup>16</sup>-Fokus, der bei Spiegel- und Radioteleskopen eingesetzt wird.




---

<sup>16</sup>Laurent Cassegrain (ca. 1629 - 1693), katholischer Priester.

Die einfallenden Strahlen werden mit einem Parabolspiegel reflektiert und treffen nach der Reflexion an diesem Spiegel auf einen hyperbolischen Spiegel. Dabei habe die entsprechende Hyperbel denselben Brennpunkt wie die Parabel. Der Strahl wird dann auf den zweiten Brennpunkt der Hyperbel, der sich hinter dem Spiegel befindet, geworfen. Besonders bei optischen Teleskopen ist klar, dass sich der Brennpunkt der Parabel nicht als Beobachtungspunkt eignet.

#### I.4.4 Ellipsen

Gegeben seien reelle Zahlen  $\alpha > 0$ ,  $0 < e < 1$  und  $\beta := \alpha \cdot \sqrt{1 - e^2}$ . Die zugehörige Ellipse in Standardform (I.2.8 Satz) ist

$$C := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Nach I.2.11 Bemerkung ist

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 2 \cdot \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \lambda &\longmapsto (\alpha \cdot \cos(\lambda), \beta \cdot \sin(\lambda)) \end{aligned}$$

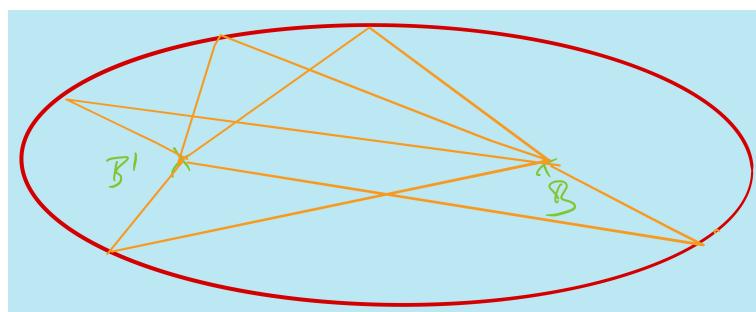
eine Parametrisierung dieser Ellipse.<sup>17</sup> Die Berechnungen aus Abschnitt I.4.3 lassen sich ohne große Mühe auf die Ellipse übertragen und führen zu folgendem Ergebnis.

**I.4.8 Satz.** Für die oben beschriebene Ellipse und einen Punkt  $c_0 = (a_0, b_0) \in C$  ist die Tangente an  $C$  in  $c_0$  die Gerade

$$T_{c_0}C = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{a_0 \cdot a}{\alpha^2} + \frac{b_0 \cdot b}{\beta^2} = 1 \right\}.$$

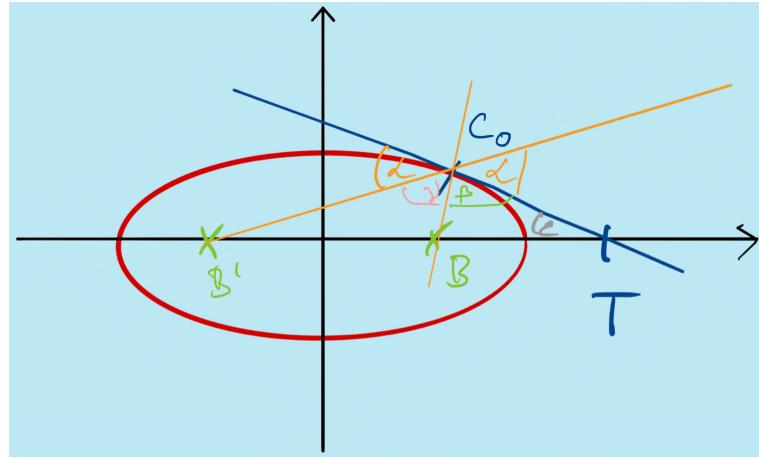
Auch Ellipsen haben eine interessante Reflexionseigenschaft. Hier stellt man sich vor, dass die Ellipse von innen verspiegelt ist.

**I.4.9 Satz.** In einer Ellipse wird ein Lichtstrahl, der vom Brennpunkt  $B$  ausgeht, so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch den Brennpunkt  $B'$  läuft.



*Beweis.* Der Lichtstrahl treffe vom Punkt  $B$  aus im Punkt  $c_0 = (a_0, b_0)$  auf die Ellipse. In der folgenden Skizze stehe  $T$  wieder für den Punkt, an dem die Tangente  $T_{c_0}C$  an  $C$  in  $c_0$  die  $x$ -Achse schneidet.

<sup>17</sup> Das Intervall ist nicht abgeschlossen. Um den Punkt  $(\alpha, 0)$  herum kann man allerdings die Parametrisierung über dem Intervall  $(-\pi, \pi)$  benutzen, so dass sich kein Problem ergibt.



Es ist wieder zu zeigen, dass  $\alpha = \beta$ . Wie im Beweis von I.4.6 Satz vergewissert man sich zunächst, dass

$$\frac{d(c_0, B)}{d(c_0, B')} = \frac{d(T, B)}{d(T, B')}. \quad (\text{I.15})$$

Für das Dreieck mit den Ecken  $c_0, B$  und  $T$  liefert I.4.7 Satz die Identität

$$\frac{\sin(\beta)}{d(T, B)} = \frac{\sin(\varepsilon)}{d(c_0, B)}.$$

Wir schreiben sie um zu

$$\sin(\beta) = \sin(\varepsilon) \cdot \frac{d(T, B)}{d(c_0, B)} \stackrel{(\text{I.15})}{=} \sin(\varepsilon) \cdot \frac{d(T, B')}{d(c_0, B')}. \quad (\text{I.16})$$

Nun beachte man, dass  $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$ , so dass

$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - (\beta + \gamma)) = -\sin(-(\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma).$$

Wir wenden I.4.7 Satz auf das Dreieck mit den Ecken  $c_0, B'$  und  $T$  an und finden

$$\frac{\sin(\varepsilon)}{d(c_0, B')} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{d(T, B')} = \frac{\sin(\alpha)}{d(T, B')}.$$

Es gilt also

$$\sin(\alpha) = \sin(\varepsilon) \cdot \frac{d(T, B')}{d(c_0, B')}.$$

Ein Vergleich mit (I.16) zeigt  $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ . Da  $0 < \alpha, \beta \leq \pi/2$ , impliziert dies  $\alpha = \beta$  wie behauptet.  $\square$

Die obige Reflexionseigenschaft von Ellipsen macht man sich z.B. bei medizinischen Geräten zum Zertrümmern von Nierensteinen zu Nutze (s. z.B. [29], insbesondere Abbildung 10.2).

# II

## Transformationen in der euklidischen und affinen Geometrie

In diesem Kapitel stellen wir die Symmetriegruppen der euklidischen und der affinen Ebene vor. In beiden Fällen ist die zugrundeliegende Menge  $\mathbb{R}^2$ . Die Symmetriegruppe legt den Kongruenzbegriff in der jeweiligen Geometrie fest. Die Kongruenz von Dreiecken in der euklidischen Geometrie wird durch die bekannten Kongruenzsätze beschrieben. Der Hauptsatz der affinen Geometrie besagt, dass zwei beliebige Dreiecke in der affinen Ebene kongruent sind. Die unterschiedlichen Kongruenzbegriffe untersuchen wir auch für Koniken. Als Ausblick oder fortgeschrittenes Thema behandeln wir die Klassifikation von Quadriken im  $n$ -dimensionalen affinen Raum und machen ein paar Bemerkungen zur Geometrie der Quadriken in  $\mathbb{R}^3$ .

### II.1 Isometrien

Wir benutzen die Strukturen aus Abschnitt I.1.1 im Fall  $n = 2$ . Insbesondere sei  $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  der euklidische Abstand.

**II.1.1 Definition.** Eine Abbildung  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine *Isometrie*, wenn für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$

$$d(\psi(v), \psi(w)) = d(v, w)$$

gilt.

Isometrien sind also diejenigen Selbstabbildungen der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die den euklidischen Abstand erhalten.

*II.1.2 Bemerkungen.* i) Es sei  $u_0 \in \mathbb{R}^2$ . Die *Translation* um  $u_0$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau_{u_0}: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longmapsto u + u_0.\end{aligned}$$

Die Abbildung  $\tau_{u_0}$  ist eine Isometrie. Dazu benutzen wir die Definition des euklidischen Abstands über die euklidische Norm:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 : d(v, w) = \|v - w\|.$$

Somit erkennen wir

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 : d(\tau_{u_0}(v), \tau_{u_0}(w)) = \|(v + u_0) - (w + u_0)\| = \|v - w\| = d(v, w).$$

ii) Es sei  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ein nicht-trivialer Vektor. Dann gibt es zu jedem Vektor  $w = (c, d)$  mit  $\langle v, w \rangle = 0$  eine reelle Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass

$$w = \lambda \cdot (-b, a).$$

Jeder Vektor dieser Form steht senkrecht auf  $v$ . Um die Behauptung einzusehen, betrachten wir den Fall  $a \neq 0$ . Aus

$$0 = \langle v, w \rangle = a \cdot c + b \cdot d$$

folgern wir

$$(c, d) = \frac{d}{a} \cdot (-b, a).$$

Es gilt

$$\|\lambda \cdot (-b, a)\| = |\lambda| \cdot \|(a, b)\|.$$

Damit sind  $\pm(-b, a)$  die einzigen Vektoren, die senkrecht auf  $v$  stehen und dieselbe Norm wie  $v$  haben.

iii) Wir können Teil ii) verwenden, um Translationen zu veranschaulichen. Die Translation um  $(0, 0)$  ist die Identität. Nun seien  $u_0 \neq 0$  und  $v_0$  der Vektor, der senkrecht auf  $u_0$  steht und  $\|v_0\| = \|u_0\|$  erfüllt. Wir betrachten die Gerade

$$\gamma_0 := \{\lambda \cdot v_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sie passiert den Ursprung. Zu jeder zu  $\gamma_0$  parallelen Gerade  $\gamma'$  gibt es eine eindeutig bestimmte reelle Zahl  $\eta$ , so dass

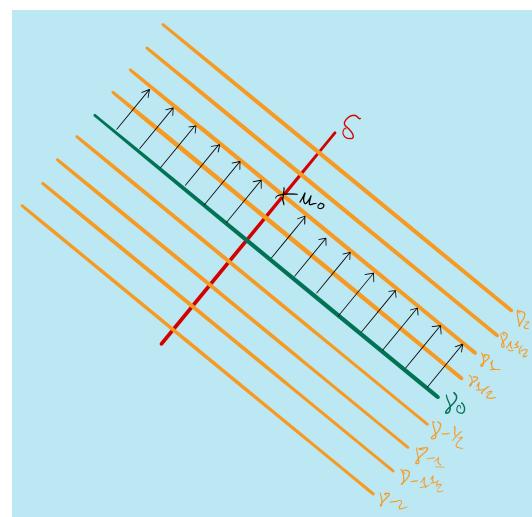
$$\gamma' = \gamma_\eta := \eta \cdot u_0 + \gamma_0 = \{\eta \cdot u_0 + \lambda \cdot v_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Damit stellen wir  $\mathbb{R}^2$  als Parallelenschar

$$\mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{\eta \in \mathbb{R}} \gamma_\eta$$

dar. Weiter sei

$$\delta := \{\lambda \cdot u_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$



Die Translation  $\tau_{u_0}$  ist nun dadurch charakterisiert, dass sie die Gerade  $\gamma_\eta$  entlang  $\delta$  parallel auf  $\gamma_{\eta+1}$  verschiebt,  $\eta \in \mathbb{R}$ .

## II.1.1 Die Isometriegruppe

Es sei

$$S(\mathbb{R}^2) := \left( \{ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \varphi \text{ ist bijektiv} \}, \circ \right)$$

die Gruppe der bijektiven Selbstabbildungen der Ebene.

**II.1.3 Satz.** i) *Die Identität ist eine Isometrie.*

ii) *Es sei  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie. Dann ist  $\psi$  bijektiv, i.e.,  $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$ . Die inverse Abbildung  $\psi^{-1}$  ist auch eine Isometrie.*

iii) *Es seien  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\chi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  Isometrien. Dann ist auch die Verknüpfung  $\chi \circ \psi$  eine Isometrie.*

*Insbesondere ist*

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^2, d) := \left( \{ \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \psi \text{ ist eine Isometrie} \}, \circ \right)$$

eine Untergruppe von  $S(\mathbb{R}^2)$ .

*Beweis.* Behauptung i) ist offensichtlich. Wir zeigen nun Teil iii). Es seien also  $v, w \in \mathbb{R}^2$ . Dann haben wir

$$d((\chi \circ \psi)(v), (\chi \circ \psi)(w)) = d(\chi(\psi(v)), \chi(\psi(w))) = d(\psi(v), \psi(w)) = d(v, w).$$

Für die Injektivität in Teil ii) beachte man, dass Elemente  $v, w \in \mathbb{R}^2$  genau dann gleich sind, wenn  $d(v, w) = 0$  gilt. Es seien also  $v, w \in \mathbb{R}^2$  zwei verschiedene Punkte. Dann gilt

$$d(\psi(v), \psi(w)) = d(v, w) > 0,$$

so dass  $\psi(v)$  und  $\psi(w)$  ebenfalls voneinander verschieden sind. Für die Surjektivität geben wir einen analytischen Beweis. Für  $\varrho \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $u \in \mathbb{R}^2$  sei

$$S_\varrho(u) := \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid d(u, v) = \varrho \}$$

der Kreis mit Mittelpunkt  $u$  vom Radius  $\varrho$ . Offenbar gilt

$$\psi(S_\varrho(u)) \subset S_\varrho(\psi(u)). \quad (\text{II.1})$$

Es sei  $u_0 := \psi((0, 0))$ . Da Translationen Isometrien sind, ist  $\psi' := \tau_{-u_0} \circ \psi$  nach Teil iii) ebenfalls eine Isometrie. Wenn nun  $\psi'$  surjektiv ist, dann ist auch  $\psi = \tau_{u_0} \circ \psi'$  surjektiv, denn  $\tau_{u_0}$  ist offenkundig surjektiv. Wir können deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass  $\psi((0, 0)) = (0, 0)$  gilt. Es seien  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  und  $\varrho := \|v\| = d(v, (0, 0))$ , d.h.,  $v \in S_\varrho((0, 0))$ . Jetzt verwenden wir, dass eine Isometrie stetig ist (s. [38], 3.1.1 Definition). Kreise sind kompakt ([38], 2.2.12 Satz). Aus [38], 3.4.1 Satz, folgt, dass  $Z_\varrho := \psi(S_\varrho((0, 0)))$  kompakt ist. Falls  $v \notin Z_\varrho$ , dann gilt  $\delta := d(v, Z_\varrho) > 0$  ([38], 3.4.4 Lemma). Wir setzen

$$w_0 := v, \quad w_n := \psi^n(w_0), \quad \psi^n := \underbrace{\psi \circ \cdots \circ \psi}_{n \text{ Faktoren}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man beachte, dass

$$\forall k \geq 1 : \quad d(w_0, w_k) \geq \delta, \quad (\text{II.2})$$

denn  $w_k = \psi^k(w_0) \in Z_\varrho$ . Es folgt, dass für alle  $k \geq 1$  und  $n \in \mathbb{N}$

$$d(w_n, w_{n+k}) = d(\psi^n(w_0), \psi^{n+k}(w_0)) = d(w_0, w_k) \stackrel{(II.2)}{\geq} \delta.$$

Das widerspricht allerdings der Tatsache, dass die Folge  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als Folge in der kompakten Menge  $S_\varrho((0, 0))$  eine konvergente Teilfolge besitzen müsste ([38], 2.2.14 Satz).

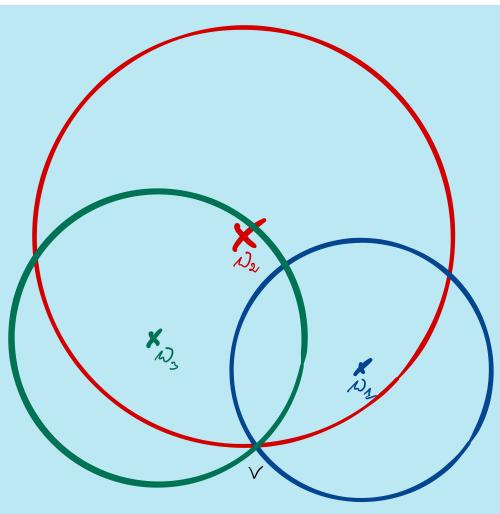
Für die Umkehrabbildung  $\psi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $v, w \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$d(\psi^{-1}(v), \psi^{-1}(w)) = d(\psi(\psi^{-1}(v)), \psi(\psi^{-1}(w))) = d(v, w),$$

denn  $\psi$  ist nach Voraussetzung eine Isometrie. □

*II.1.4 Bemerkungen.* i) Der obige Beweis funktioniert ebenso in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , und kann für kompakte metrische Räume angepasst werden.

ii) In der Ebene lässt sich die Surjektivität auch mit einem etwas einfacheren Argument beweisen. Dazu seien  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie und  $v \in \mathbb{R}^2$ . Wir wählen drei Punkte  $u_1, u_2$  und  $u_3$  in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann liegen auch die Bildpunkte  $w_1 := \psi(u_1)$ ,  $w_2 := \psi(u_2)$  und  $w_3 := \psi(u_3)$  nicht auf einer Geraden.<sup>1</sup> Es seien  $\varrho_i := d(v, w_i)$  und  $T_i := S_{\varrho_i}(w_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Dann gilt  $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \{v\}$ .<sup>2</sup>



Wir definieren weiter  $S_i := S_{\varrho_i}(u_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Da  $\psi$  eine Isometrie ist, gilt  $\psi(S_i) \subset T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Nehmen wir zunächst an, dass sich zwei der Kreise  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  nur in  $v$  schneiden, etwa  $T_1 \cap T_2 = \{v\}$ . Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:

- ★ Der Punkt  $v$  liegt zwischen  $w_1$  und  $w_2$ , d.h.,  $d(w_1, v) + d(v, w_2) = d(w_1, w_2)$ .
- ★ Der Punkt  $w_2$  liegt zwischen  $w_1$  und  $v$ , d.h.,  $d(w_1, w_2) + d(w_2, v) = d(w_1, v)$ .
- ★ Der Punkt  $w_1$  liegt zwischen  $v$  und  $w_2$ , d.h.,  $d(v, w_1) + d(w_1, w_2) = d(v, w_2)$ .

Unter diesen Bedingungen schneiden sich auch  $S_1$  und  $S_2$  in genau einem Punkt  $u$ . Wir betrachten z.B. die erste Situation. Es gibt dann auf der Geraden durch  $u_1$  und  $u_2$  einen Punkt  $u$ , der zwischen  $u_1$  und  $u_2$  liegt und  $d(u_1, u) = d(w_1, v)$  erfüllt. Dann gilt  $d(u, u_2) = d(u_1, u_2) - d(u_1, u) = d(w_1, w_2) - d(w_1, v) = d(v, w_2)$ . Damit ist  $u$  der Schnittpunkt von  $S_1$  und  $S_2$ . Offenbar muss  $\psi(u) = v$  gelten. Wir setzen jetzt voraus, dass sich  $T_i$  und  $T_j$  für  $1 \leq i < j \leq 3$  in zwei Punkten schneiden. Es seien  $1 \leq i < j \leq 3$ . Dann gilt

- ★  $\varrho_k < d(w_i, w_j)$ ,  $k = i, j$ , und  $\varrho_i + \varrho_j > d(w_i, w_j)$  oder
- ★  $\varrho_i > d(w_i, w_j) > \varrho_j > \varrho_i - d(w_i, w_j)$  oder

<sup>1</sup>Lägen  $w_1, w_2$  und  $w_3$  auf einer Geraden, etwa  $w_3$  zwischen  $w_1$  und  $w_2$ , so folgte  $d(w_1, w_3) + d(w_3, w_2) = d(w_1, w_2)$ . Da  $\psi$  eine Isometrie ist, gälte auch  $d(u_1, u_3) + d(u_3, u_2) = d(u_1, u_2)$ . Das kann aber nicht passieren, wenn  $u_1, u_2$  und  $u_3$  nicht auf einer Geraden liegen.

<sup>2</sup>Es kann höchstens zwei Schnittpunkte geben. Gäbe es zwei Schnittpunkte, so müssten  $w_1, w_2$  und  $w_3$  auf einer Geraden liegen. (Warum?)

- ★  $\varrho_j > d(w_i, w_j) > \varrho_i > \varrho_j - d(w_i, w_j)$  oder
- ★  $\varrho_k > d(w_i, w_j)$ ,  $k = i, j$ , und  $d(w_i, w_j) > |\varrho_i - \varrho_j|$ .

Der Durchschnitt  $S_i \cap S_j$  besteht dann auch aus zwei verschiedenen Punkten,  $1 \leq i < j \leq 3$ . Die Injektivität von  $\psi$  impliziert nun, dass  $S_3$  einen der beiden Schnittpunkte von  $S_1$  und  $S_2$  enthalten muss. Es gibt also einen Punkt  $u \in \mathbb{R}^2$  mit  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{u\}$ . Wir schließen  $\psi(u) = v$ .

Im obigen Beweis ist die Surjektivität die einzige Aussage, die nicht elementar zu beweisen ist. Wir werden jetzt die Elemente aus  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, d)$  genau beschreiben, ohne den obigen Satz zu verwenden. Die obigen Eigenschaften ergeben sich auch aus dieser Beschreibung. Wir fahren mit einer Beobachtung fort, die wir bereits im Beweis von Satz II.1.3 gemacht haben.

**II.1.5 Lemma.** *Es sei  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor  $u_0 \in \mathbb{R}^2$  und eine eindeutig bestimmte Isometrie  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\varphi((0, 0)) = (0, 0)$ , so dass*

$$\psi = \tau_{u_0} \circ \varphi.$$

*Beweis.* Wir überprüfen zunächst die Eindeutigkeit. Aus  $\psi = \tau_{u_0} \circ \varphi$  folgt  $u_0 = \tau_{u_0}((0, 0)) = \tau_{u_0}(\varphi((0, 0))) = \psi((0, 0))$ . Weiter ergibt sich für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$ , dass  $\psi(v) = \varphi(v) + u_0$ , so dass

$$\varphi(v) = \psi(v) - u_0 = \psi(v) - \psi((0, 0)).$$

Gemäß der obigen Betrachtungen setzen wir  $u_0 := \psi((0, 0))$  und  $\varphi := \tau_{-u_0} \circ \psi$ ,  $v \mapsto \psi(v) - u_0$ . Nach II.1.3 Satz, iii), ist  $\varphi$  eine Isometrie, so dass

- ★  $\varphi((0, 0)) = \psi((0, 0)) - u_0 = u_0 - u_0 = (0, 0)$ ,
- ★  $\tau_{u_0} \circ \varphi = \tau_{u_0} \circ (\tau_{-u_0} \circ \psi) = (\tau_{u_0} \circ \tau_{-u_0}) \circ \psi = \psi$ .

Die Isometrie  $\varphi$  und der Vektor  $u_0$  leisten also das Verlangte. □

Um alle Isometrien zu verstehen, genügt es nun diejenigen zu verstehen, die den Ursprung festhalten. Solche Isometrien sind automatisch linear. Bevor wir dies beweisen, machen wir ein paar grundsätzliche Beobachtungen.

## II.1.2 Die orthogonale Gruppe

Laut Definition erhält eine Isometrie den euklidischen Abstand. Wie in Abschnitt I.1.1 formuliert, wird die euklidische Geometrie durch das Skalarprodukt bestimmt. Das folgende Resultat besagt, dass die gesamte euklidische Geometrie von Isometrien, die den Ursprung fixieren, erhalten wird.

**II.1.6 Satz.** *Es sei  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie mit  $\varphi((0, 0)) = (0, 0)$ . Dann gilt für je zwei Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^2$ , dass*

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

*Beweis.* Wir erinnern zunächst, dass zwischen dem euklidischen Abstand und dem Standardskalarprodukt die Beziehungen

- ★  $\|v\| = d(v, (0, 0))$ ,
- ★  $\langle v, v \rangle = \|v\|^2, v \in V$ ,

bestehen. Für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  gilt nun  $\|\varphi(v)\| = d(\varphi(v), (0, 0)) = d(\varphi(v), \varphi((0, 0))) = d(v, (0, 0)) = \|v\|$ , d.h., die Isometrie  $\varphi$  erhält auch die euklidische Norm.<sup>3</sup>

Für  $v, w \in \mathbb{R}^2$  berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle - 2 \cdot \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle + \langle \varphi(w), \varphi(w) \rangle &= \langle \varphi(v) - \varphi(w), \varphi(v) - \varphi(w) \rangle \\ &= d(\varphi(v), \varphi(w))^2 \\ &= d(v, w)^2 \\ &= \langle v - w, v - w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - 2 \cdot \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle. \end{aligned}$$

Wie wir weiter oben bemerkt haben, gilt auf Grund der Voraussetzung  $\varphi((0, 0)) = (0, 0)$ , dass  $\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \langle v, v \rangle$  und  $\langle \varphi(w), \varphi(w) \rangle = \langle w, w \rangle$ . Damit ergibt sich die behauptete Gleichung.  $\square$

*II.1.7 Bemerkung.* Man beachte, dass der Beweis für jeden euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  Gültigkeit behält.

Eine *Orthonormalbasis* von  $\mathbb{R}^2$  ist eine Basis  $(v_1, v_2)$  von  $\mathbb{R}^2$ , so dass

- ★  $\|v_i\| = 1, i = 1, 2$ ,
- ★  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ .

Das Standardbeispiel ist  $(e_1, e_2)$  mit  $e_1 := (1, 0)$  und  $e_2 := (0, 1)$ .

**II.1.8 Lemma.** i) Es sei  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie, die den Ursprung fixiert. Dann ist  $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$ .

ii) Es sei  $(v_1, v_2)$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$ . Dann ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot v_1 + b \cdot v_2 \end{aligned}$$

eine Isometrie.

*Beweis.* Zu i). Aus II.1.6 Satz folgt  $\|\varphi(e_i)\| = \|e_i\| = 1, i = 1, 2$ , und  $\langle \varphi(e_1), \varphi(e_2) \rangle = 0$ . Da  $\varphi(e_i) \neq (0, 0), i = 1, 2$ , zeigt die zweite Bedingung, dass  $\varphi(e_1)$  und  $\varphi(e_2)$  linear unabhängig sind.

Zu ii). Es seien  $v = (a, b)$  und  $w = (c, d)$  Vektoren in der Ebene. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle &= \langle a \cdot v_1 + b \cdot v_2, c \cdot v_1 + d \cdot v_2 \rangle \\ &= a \cdot c \cdot \langle v_1, v_1 \rangle + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \langle v_1, v_2 \rangle + b \cdot d \cdot \langle v_2, v_2 \rangle \\ &= a \cdot c + b \cdot d \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass  $\varphi$  eine Isometrie ist.  $\square$

<sup>3</sup>Das gilt nicht für eine nicht-triviale Translation. Die Voraussetzung  $\varphi((0, 0)) = (0, 0)$  ist also wesentlich.

**II.1.9 Satz.** Es sei  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Isometrie, so dass  $\varphi((0, 0)) = (0, 0)$ , dann ist  $\varphi$  eine lineare Abbildung.

*Beweis.* Es sei  $(v_1, v_2)$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ . Wenn für zwei Vektoren  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$  gilt, dass  $\langle u_1, v_i \rangle = \langle u_2, v_i \rangle$ ,  $i = 1, 2$ , dann folgt  $u_1 = u_2$ .<sup>4</sup>

Gemäß II.1.8 Lemma, i), ist  $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$  eine Orthonormalbasis für  $\mathbb{R}^2$ . Es seien  $v, w \in \mathbb{R}^2$ . Wir vergleichen die Skalarprodukte von  $\varphi(v + w)$  und  $\varphi(v) + \varphi(w)$  mit  $\varphi(e_1)$  und  $\varphi(e_2)$ . Für  $i = 1, 2$  erhalten wir unter Beachtung von II.1.6 Satz

$$\langle \varphi(v + w), \varphi(e_i) \rangle = \langle v + w, e_i \rangle$$

sowie

$$\begin{aligned} \langle \varphi(v) + \varphi(w), \varphi(e_i) \rangle &= \langle \varphi(v), \varphi(e_i) \rangle + \langle \varphi(w), \varphi(e_i) \rangle \\ &= \langle v, e_i \rangle + \langle w, e_i \rangle \\ &= \langle v + w, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Übereinstimmungen muss nach den Vorüberlegungen  $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$  gelten.

Für  $v \in \mathbb{R}^2$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gehen wir analog vor. Hier gilt für  $i = 1, 2$ , dass

$$\langle \varphi(\lambda \cdot v), \varphi(e_i) \rangle = \langle \lambda \cdot v, e_i \rangle$$

und

$$\langle \lambda \cdot \varphi(v), \varphi(e_i) \rangle = \lambda \cdot \langle \varphi(v), \varphi(e_i) \rangle = \lambda \cdot \langle v, e_i \rangle = \langle \lambda \cdot v, e_i \rangle.$$

Es folgt  $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v)$ . Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $\varphi$  linear ist.  $\square$

Es sei  $GL(\mathbb{R}^2) := \{\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \varphi \text{ ist bijektiv und linear}\}$ . Dies ist ebenfalls eine Untergruppe von  $S(M)$ . Der Durchschnitt

$$O(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) := GL(\mathbb{R}^2) \cap Isom(\mathbb{R}^2, d)$$

wird die *orthogonale Gruppe* des euklidischen Vektorraums  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  genannt.

**II.1.10 Bemerkung.** Für diese Bemerkung möchten wir die Beschreibung von linearen Abbildungen mit Matrizen verwenden. In diesem Zusammenhang ist es günstiger, mit Spaltenvektoren zu arbeiten. Eine  $(2 \times 2)$ -Matrix  $A$  definiert die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_A: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\longmapsto A \cdot v. \end{aligned}$$

Es sei  $GL_2(\mathbb{R})$  die Gruppe der invertierbaren  $(2 \times 2)$ -Matrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Dann ist

$$\begin{aligned} h: GL_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL(\mathbb{R}^2) \\ A &\longmapsto \varphi_A \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Man schreibe  $u_1 - u_2 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$ . Wegen der Bilinearität des Standardskalarprodukts folgt aus der angegebenen Bedingung, dass  $\|u_1 - u_2\| = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = \lambda_1 \cdot \langle u_1 - u_2, v_1 \rangle + \lambda_2 \cdot \langle u_1 - u_2, v_2 \rangle = \lambda_1 \cdot (\langle u_1, v_1 \rangle - \langle u_2, v_1 \rangle) + \lambda_2 \cdot (\langle u_1, v_2 \rangle - \langle u_2, v_2 \rangle) = 0$ , so dass  $u_1 - u_2 = 0$ .

ein Gruppenisomorphismus.

Mit der Operation  $\cdot^t$  der Transposition gilt

$$\langle v, w \rangle = v^t \cdot w, \quad v, w \in \mathbb{R}^2.$$

Sei weiter  $A$  eine  $(2 \times 2)$ -Matrix. Dann gilt

$$\langle \varphi_A(v), \varphi_A(w) \rangle = (A \cdot v)^t \cdot (A \cdot w) = v^t \cdot (A^t \cdot A) \cdot w.$$

Die Matrix  $B := A^t \cdot A$  ist symmetrisch. Wir schreiben

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$e_i \cdot B \cdot e_j = b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq j \leq 2.$$

Wir folgern daraus.

*Für eine  $(2 \times 2)$ -Matrix  $A$  ist die lineare Abbildung  $\varphi_A$  genau dann eine Isometrie, wenn*

$$A^t \cdot A = B = \mathbb{E}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Die Untergruppe

$$O_2(\mathbb{R}) := \{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = \mathbb{E}_2 \}$$

von  $GL_2(\mathbb{R})$  heißt *orthogonale Gruppe*. Vermöge  $h$  können wir sie mit der Gruppe  $O(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  der Isometrien, die den Ursprung festhalten, identifizieren.

Um eine lineare Abbildung in  $O(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  zu spezifizieren, müssen wir eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  angeben. Wir können mit einem beliebigen Vektor  $v_1 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  mit  $a^2 + b^2 = \|v_1\|^2 = 1$  beginnen. Es gibt dann einen eindeutig bestimmten Winkel  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  mit

$$(a, b) = (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)).$$

Nach II.1.2 Bemerkungen, ii), sind die beiden einzigen Möglichkeiten,  $v_1$  zu einer Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  zu ergänzen, die Vektoren

$$v_2^+ := (-\sin(\vartheta), \cos(\vartheta)) \quad \text{und} \quad v_2^- := (\sin(\vartheta), -\cos(\vartheta)).$$

*II.1.11 Bemerkungen.* i) Um die Abbildungsmatrizen zu bilden, wechseln wir wieder zur Spaltennotation. Es seien  $\vartheta \in [0, 2\pi)$ ,

$$v_1 := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad v_2^+ := \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2^- := \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \\ -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix, die die lineare Abbildung  $e_1 \mapsto v_1$  und  $e_2 \mapsto v_2^+$  definiert, ist somit

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix},$$

Diese Matrix beschreibt die Drehung um den Winkel  $\vartheta$ .

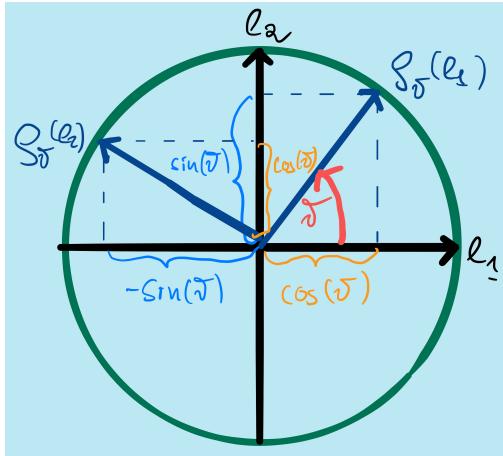


Abbildung II.1: Eine Drehung

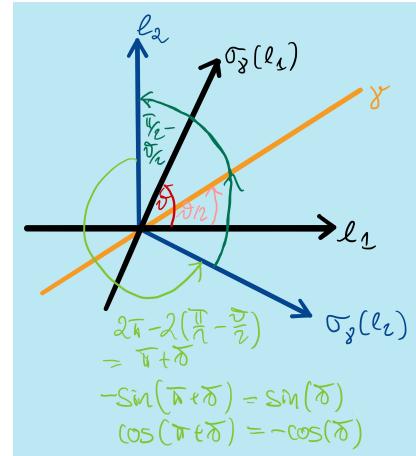


Abbildung II.2: Eine Spiegelung

Die Matrix, die die lineare Abbildung  $e_1 \mapsto v_1$  und  $e_2 \mapsto v_2^-$  definiert, ist

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Ein Blick auf die obige Skizze (s. auch [36], S. 30) zeigt, dass dies die Spiegelung<sup>5</sup> an der Achse durch den Ursprung, die mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\vartheta/2$  einschließt, ist. Für  $\vartheta = 0$  ist dies also die Spiegelung an der  $x$ -Achse. Die zugehörige Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ii) Zu  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  seien  $\varrho_\vartheta$  die Drehung um den Winkel  $\vartheta$  und  $\sigma_{\vartheta/2}$  die Spiegelung an der Achse durch den Ursprung, die mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\vartheta/2$  einschließt. Man kann  $\sigma_{\vartheta/2}$  dadurch erhalten, dass man um den Winkel  $-\vartheta/2$  bzw.  $2\pi - \vartheta/2$  dreht, an der  $x$ -Achse spiegelt und dann wieder um den Winkel  $\vartheta/2$  dreht, i.e.,

$$\sigma_{\vartheta/2} = \varrho_{\vartheta/2} \circ \sigma_0 \circ \varrho_{2\pi - \vartheta/2}. \quad (\text{II.3})$$

**II.1.12 Aufgabe.** Beweisen Sie Formel (II.3). Sie können dazu Matrizen verwenden.

Wir fassen die Überlegungen aus diesem Abschnitt im folgenden Satz zusammen.

**II.1.13 Satz.** i) *Die Zuordnung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times O(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) &\longrightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^2, d) \\ (u, \varphi) &\longmapsto \tau_u \circ \varphi \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

- ii) Die Gruppe  $O(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  wird von den Drehungen um den Ursprung und der Spiegelung  $\sigma_0$  an der  $x$ -Achse erzeugt.
- iii) Die Gruppe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2, d)$  wird von den Drehungen um den Ursprung, der Spiegelung  $\sigma_0$  an der  $x$ -Achse und den Translationen erzeugt.

<sup>5</sup>Die Spiegelung  $\sigma_\gamma$  ist durch folgende Eigenschaften definiert:

- ★  $\sigma_\gamma(v) = v$ , falls  $v \in \gamma$ ,
- ★  $\sigma_\gamma(v) \neq v$ , die Gerade durch  $v$  und  $\sigma_\gamma(v)$  steht senkrecht auf  $\gamma$  und  $d(v, \gamma) = d(\sigma_\gamma(v), \gamma)$ , falls  $v \notin \gamma$ .

**II.1.14 Aufgaben.** Wählen Sie  $\delta \in (0, \infty)$  und eine Gerade  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  der Steigung  $\delta$ , die nicht durch den Ursprung geht. Es sei  $\sigma_\gamma$  die Spiegelung an der Geraden  $\gamma$ .

a) Verwenden Sie das Verfahren aus dem Beweis von II.1.5 Lemma, um einen Vektor  $u_0 \in \mathbb{R}^2$  und eine Isometrie  $\varphi \in O(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , die den Ursprung fixiert, zu bestimmen, so dass

$$\sigma_\gamma = \tau_{u_0} \circ \varphi.$$

b) Es seien  $\gamma_0$  die Gerade durch den Ursprung, die parallel zu  $\gamma$  ist, und  $v_0 \in \gamma$ . Überprüfen Sie die Identität

$$\sigma_\gamma = \tau_{v_0} \circ \sigma_{\gamma_0} \circ \tau_{-v_0}.$$

**II.1.15 Aufgaben.** a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b + 3 \\ \frac{1}{2} \cdot a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist eine Isometrie. Stellen Sie  $\psi$  als Verknüpfung von Spiegelungen dar. Bei den Spiegelungen sind die Spiegelachsen entweder durch eine Gleichung, als Verbindungsgerade von zwei Punkten oder durch einen Schnittpunkt und einen Schnittwinkel mit einer bekannten Geraden anzugeben. (**Hinweis.** Für  $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$  gilt  $\sin(\alpha) = 1/2$  und  $\cos(\alpha) = \sqrt{3}/2$ .)

b) Zeigen Sie, dass sich jede Isometrie  $\psi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  als eine Verknüpfung von Spiegelungen darstellen lässt. Wenn Sie geschickt vorgehen, erkennen Sie, dass man mit höchstens drei Spiegelungen auskommt.

**II.1.16 Aufgabe.** Zeigen Sie, dass  $\{\tau_u \mid u \in \mathbb{R}^2\}$  eine normale Untergruppe ([36], II.9.3 Definition) von  $Isom(\mathbb{R}^2, d)$  ist. Benutzen Sie diese Tatsache, um  $Isom(\mathbb{R}^2, d)$  als semidirektes Produkt ([36], II.12.10 Definition)

$$Isom(\mathbb{R}^2, d) \cong \mathbb{R}^2 \rtimes O(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

zu beschreiben.

### II.1.3 Kongruenz in der euklidischen Geometrie

Zwei Teilmengen  $X, Y \subset \mathbb{R}^2$  der (euklidischen) Ebene sind *kongruent*, wenn es eine Isometrie  $\psi \in Isom(\mathbb{R}^2, d)$  gibt, so dass

$$Y = \psi(X).$$

Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ .

Wir untersuchen nun Koniken bis auf Kongruenz. Wir erinnern dazu an die Ergebnisse aus den Aufgaben.

- ★ Eine Parabel hat eine eindeutig bestimmte Symmetriechse (I.2.7 Aufgabe). Nach einer Drehung kann man erreichen, dass diese Symmetriechse parallel zur  $x$ -Achse ist. Nach Anwendung einer Translation können wir annehmen, dass die  $x$ -Achse die Symmetriechse ist. Es gibt dann eine eindeutig bestimmte Gerade, die senkrecht

auf der Symmetriearchse steht, also in der gegebenen Situation parallel zur  $y$ -Achse ist, und die Parabel in genau einem Punkt schneidet. Nach einer Translation können wir voraussetzen, dass diese Gerade die  $y$ -Achse ist. Nach einer Spiegelung können wir annehmen, dass die Parabel nach rechts geöffnet ist. Jetzt befindet sich die Parabel in Standardform. Zwei verschiedene Parabeln in Standardform können nicht kongruent sein. Eine Isometrie müsste die nicht-negative  $x$ -Achse und die  $y$ -Achse auf sich selbst abbilden. Als einzige Möglichkeit bleiben die Identität und die Spiegelung an der  $x$ -Achse. Diese bilden jede Parabel in Standardform auf sich selbst ab. Zusammenfassend ergibt sich, dass jede Parabel zu genau einer Parabel in Standardform kongruent ist.

- ★ Für eine Ellipse  $C$  gibt es nach I.2.10 Aufgabe zwei eindeutig bestimmte Punkte  $p_-$  und  $p_+$ , so dass

$$d(p_-, p_+) = \max\{d(q, r) \mid q, r \in C\}.$$

Nach Anwendung einer geeigneten Isometrie kann man erreichen, dass diese beiden Punkte auf der  $x$ -Achse und symmetrisch zur  $y$ -Achse liegen. Dann befindet sich die Ellipse bereits in Standardform. Man beachte, dass eine Isometrie, die die Ellipse  $C$  auf sich abbildet, entweder die beiden Punkte  $p_-$  und  $p_+$  festhält oder sie vertauscht. Im ersten Fall ist die Isometrie die Identität oder die Spiegelung an der  $x$ -Achse, im zweiten Fall die Spiegelung an der  $y$ -Achse oder die Drehung um den Winkel  $\pi$  um den Ursprung. Zwei verschiedene Ellipsen in Standardform sind nicht kongruent. Eine Isometrie zwischen solchen Ellipsen müsste die  $x$ -Achse und die  $y$ -Achse auf sich selbst abbilden. Es verbleiben die Identität, die Spiegelung an der  $x$ -Achse, die Spiegelung an der  $y$ -Achse und die Drehung um den Winkel  $\pi$  um den Ursprung. Diese bilden, wie gesehen, jede Ellipse in Standardform auf sich ab. Jede Ellipse ist also kongruent zu genau einer Ellipse in Standardform.

- ★ Gemäß I.2.15 Aufgabe hat eine Hyperbel genau zwei Asymptoten. Mit Hilfe der Asymptoten erkennt man, dass eine Hyperbel genau zwei Symmetriearchsen hat. Sie stehen senkrecht aufeinander. Eine der beiden Symmetriearchsen schneidet die Hyperbel in zwei Punkten, die andere schneidet die Hyperbel nicht. Man kann nach Anwendung einer Isometrie voraussetzen, dass die Symmetriearchse, die die Hyperbel schneidet, die  $x$ -Achse ist, und die andere Symmetriearchse die  $y$ -Achse. Dann hat man eine Hyperbel in Standardform. Wie im Fall der Ellipsen überlegt man sich, dass die Identität, die Spiegelung an der  $x$ -Achse, die Spiegelung an der  $y$ -Achse und die Drehung um  $\pi$  am Ursprung die einzigen Isometrien sind, die eine Hyperbel in Standardform auf sich abbilden, und dass zwei verschiedene Hyperbeln in Standardform nicht kongruent sind.

Da eine Parabel nur eine Symmetriearchse besitzt und Ellipsen und Hyperbeln jeweils zwei, kann eine Parabel nicht kongruent zu einer Ellipse oder zu einer Hyperbel sein. Die beiden Symmetriearchsen einer Ellipse schneiden diese. Im Fall der Hyperbel schneidet nur eine der beiden Symmetriearchsen die Hyperbel. Somit ist eine Ellipse auch nicht kongruent zu einer Hyperbel. Damit ist die in Abschnitt I.2 erarbeitete Liste der Koniken in Standardform die Liste der Kongruenzklassen von Koniken.

## II.2 Affine Räume

Ein affiner Raum ist, grob gesagt, ein Vektorraum, in dem kein Ursprung ausgezeichnet ist. Die Struktur eines affinen Raums ist durch einen Vektorraum von Translationen bestimmt. Eine allgemeine Referenz für affine Geometrie ist das Buch [10]. Affine Unterräume des  $k^n$ ,  $k$  ein Körper,  $n \geq 1$ , treten in der linearen Algebra als Lösungsmengen inhomogener linearer Gleichungssysteme auf ([41], ).

**II.2.1 Definition.** Es sei  $k$  ein Körper. Ein *affiner Raum* über  $k$  ist ein Tripel  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$ , das aus einer Menge  $X$ , einem  $k$ -Vektorraum  $V$  und einer Abbildung  $\tau: V \times X \rightarrow X$  besteht, so dass gilt

- ★  $\forall x \in X: \tau(0, x) = x$ ,<sup>6</sup>
- ★  $\forall x \in X, \forall v, w \in V: \tau(v + w, x) = \tau(v, \tau(w, x))$ ,
- ★  $\forall p, q \in X, \exists! v \in V: \tau(v, p) = q$ .

Der Vektor  $v \in V$  mit  $\tau(v, p) = q$  wird mit  $\vec{pq}$  bezeichnet.

Die *Dimension* von  $\mathbb{A}$  ist die Dimension des  $k$ -Vektorraums  $V$ :

$$\dim_k(\mathbb{A}) := \dim_k(V).$$

Es seien  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  ein affiner Raum und  $v_0 \in V$ . Dann nennen wir die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau_{v_0}: X &\longrightarrow X \\ p &\longmapsto \tau(v_0, p)\end{aligned}$$

die *Translation* um  $v_0$ .

**II.2.2 Bemerkungen.** i) Die ersten beiden Axiome drücken aus, dass  $\tau$  eine Linkswirkung der additiven Gruppe des Vektorraums  $V$  auf die Menge  $X$  ist (s. [36], II.6.1 Definitionen).  
ii) Man fixiere einen Punkt  $p_0 \in X$ . Nach dem dritten Axiom ist

$$\begin{aligned}\tau^{p_0}: V &\longrightarrow X \\ v &\longmapsto \tau(v, p_0)\end{aligned}$$

eine Bijektion. Diese können wir benutzen, um die Vektorraumstruktur von  $V$  auf  $X$  (mit  $p_0$  als Ursprung) zu übertragen. Dies erklärt, wieso wir einen affinen Raum als Vektorraum ohne Ursprung ansehen können. Wir können einen beliebigen Punkt als Ursprung auswählen und erhalten dann eine Vektorraumstruktur auf  $X$  mit dem gewählten Punkt als Ursprung.

**II.2.3 Beispiel.** Es sei  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. Dann ist der *affine Raum von  $V$*  das Tripel  $\mathbb{A}(V) := (V, V, +)$ . Dabei ist

$$+: V \times V \longrightarrow V$$

die Addition von Vektoren in  $V$ . Wir setzen  $\mathbb{A}_k^n := \mathbb{A}(k^n)$ . Für  $v, w \in V$  gilt

$$\vec{vw} = w - v. \tag{II.4}$$

<sup>6</sup>Mit  $0 \in V$  bezeichnen wir den Ursprung, i.e., das neutrale Element der additiven Gruppe von  $V$ .

**II.2.4 Definition.** Es sei  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  ein affiner Raum. Eine Teilmenge  $Z \subset X$  ist ein *affiner Unterraum*, wenn es einen Punkt  $r_0 \in Z$  und einen linearen Teilraum  $U \subset V$  gibt, so dass

$$Z = \{ s \in X \mid \overrightarrow{r_0s} \in U \}.$$

Natürlich erwarten wir, dass ein affiner Unterraum die Struktur eines affinen Raums von  $\mathbb{A}$  erbt.

**II.2.5 Lemma.** *Es seien  $u \in U$  und  $s \in Z$ . Dann gilt*

$$\tau(u, s) \in Z.$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt  $\overrightarrow{r_0s} \in U$  und  $v := \overrightarrow{r_0s} + u \in U$ . Weiter gilt  $\overrightarrow{sr_0} = -\overrightarrow{r_0s} = u - v \in U$ .<sup>7</sup> Wir berechnen

$$\tau(u, s) = \tau(v, \tau(u - v, s)) = \tau(v, r_0) \in Z.$$

Die erste Gleichung ist eine Anwendung des zweiten Axioms für eine Gruppenwirkung, und die Elementbeziehung gilt nach Voraussetzung.  $\square$

Damit ist die Linkswirkung

$$\begin{aligned} \tau_Z: U \times Z &\longrightarrow Z \\ (u, s) &\longmapsto \tau(u, s) \end{aligned}$$

definiert.

**II.2.6 Lemma.** *In der obigen Situation ist  $\mathbb{A}(Z) := (Z, U, \tau_Z)$  ein affiner Raum.*

*Beweis.* Die ersten beiden Axiome gelten, weil sie für  $\tau$  erfüllt sind. Wenn  $s, t \in Z$  gegeben ist, dann gilt für den Vektor  $v := \overrightarrow{r_0t} - \overrightarrow{r_0s} \in U$ , dass  $\tau_Z(v, s) = \tau(v, s) = t$ . Da  $v$  nach dem dritten Axiom für  $\mathbb{A}$  der einzige Vektor in  $V$  ist, dessen Anwendung auf  $s$  den Punkt  $t$  ergibt, ist das auch für  $v$  als Element von  $U$  richtig.  $\square$

Damit ist die Dimension eines affinen Unterräume definiert. Eindimensionale affine Unterräume heißen *Geraden*, zweidimensionale *Ebenen*.

Es seien  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  und  $\mathbb{B} = (Y, W, \vartheta)$  zwei affine Räume. Eine Abbildung  $f: X \longrightarrow Y$  heißt *affin*, wenn es eine lineare Abbildung  $L: V \longrightarrow W$  gibt, so dass

$$\forall p \in X, \forall v \in V: f(\tau(v, p)) = \vartheta(L(v), f(p)). \quad (\text{II.5})$$

*II.2.7 Bemerkungen.* i) Die Bedingung in (II.5) besagt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ \tau^p \downarrow & & \downarrow \vartheta^{f(p)} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (\text{II.6})$$

<sup>7</sup>Es gilt

$$\tau(\overrightarrow{sr_0} + \overrightarrow{r_0s}, r_0) = \tau(\overrightarrow{sr_0}, \tau(\overrightarrow{r_0s}, r_0)) = \tau(\overrightarrow{sr_0}, s) = r_0 = \tau(0, r_0).$$

Auf Grund der Eindeutigkeit im dritten Axiom muss  $\overrightarrow{sr_0} + \overrightarrow{r_0s} = 0$  gelten.

für jeden Punkt  $p \in X$  kommutativ ist. Die Abbildungen  $\tau^p$  und  $\vartheta^{f(p)}$  wurden in II.2.2 Bemerkungen, ii), eingeführt. Da sie bijektiv sind, ist  $L$  durch  $f$  bestimmt.

ii) Diagramm (II.6) ist äquivalent zu dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ (\tau^p)^{-1} \uparrow & & \uparrow (\vartheta^{f(p)})^{-1} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Man beachte, dass  $(\tau^p)^{-1}: X \rightarrow V, q \mapsto \overrightarrow{pq}$ , und  $(\vartheta^{f(p)})^{-1}: Y \rightarrow W, r \mapsto \overrightarrow{f(p)r}$ , für  $p \in X$  gilt. Deshalb ist  $f: X \rightarrow Y$  genau dann affin, wenn

$$\forall p, q \in X : \quad \overrightarrow{f(p)f(q)} = L(\overrightarrow{pq}). \quad (\text{II.7})$$

**II.2.8 Beispiele.** i) Für jeden affinen Raum  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  ist  $\text{id}_X$  eine affine Abbildung.

ii) Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine affine Abbildung mit zugehöriger linearer Abbildung  $L: V \rightarrow W$  und  $w_0 := f(0)$ . Nach Definition gilt

$$\forall v \in V : \quad L(\overrightarrow{0v}) = \overrightarrow{f(0)f(v)} = \overrightarrow{w_0f(v)},$$

so dass mit (II.4)

$$\forall v \in V : \quad L(v) = f(v) - w_0$$

folgt. Umgekehrt seien  $w_0 \in W$  und eine lineare Abbildung  $L$  gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto L(v) + w_0 \end{aligned}$$

eine affine Abbildung.

**II.2.9 Aufgabe.** Zeigen Sie, dass die in II.2.1 Definition eingeführten Translationen affine Abbildungen sind.

Es seien  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  und  $\mathbb{B} = (Y, W, \vartheta)$  affine Räume. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist ein *Isomorphismus* zwischen den affinen Räumen  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ , wenn  $f$  affin ist und es eine affine Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$ .

**II.2.10 Aufgabe.** Es sei  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  ein affiner Raum. Beweisen Sie, dass  $\mathbb{A}$  zu dem affinen Raum  $\mathbb{A}(V)$  von  $V$  aus II.2.3 Beispiel isomorph ist.

**II.2.11 Satz.** i) Es seien  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$ ,  $\mathbb{B} = (Y, W, \vartheta)$  und  $\mathbb{D} = (Z, U, \omega)$  affine Räume. Wenn  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  affine Abbildungen sind, dann ist auch die Verknüpfung  $g \circ f: X \rightarrow Z$  eine affine Abbildung.

ii) Es seien  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  und  $\mathbb{B} = (Y, W, \vartheta)$  affine Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine bijektive affine Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  affin.

iii) Es seien  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  und  $\mathbb{B} = (Y, W, \vartheta)$  endlichdimensionale affine Räume und  $f: X \rightarrow Y$  eine affine Abbildung. Wenn  $f$  injektiv ist und  $\dim_k(\mathbb{A}) = \dim_k(\mathbb{B})$  gilt, dann ist  $f$  bijektiv.<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Nach Teil ii) ist  $f$  dann ein Isomorphismus zwischen den affinen Räumen  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ .

*Beweis.* Wir verwenden die Charakterisierung affiner Abbildungen durch Bedingung (II.7).

Zu i). Es seien  $L: V \rightarrow W$  und  $M: W \rightarrow U$  die zu  $f$  und  $g$  gehörigen linearen Abbildungen. Für  $p, q \in X$  gilt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{(g \circ f)(p)(g \circ h)(q)} &= \overrightarrow{g(f(p))g(f(q))} \\ &= M(\overrightarrow{f(p)f(q)}) \\ &= M(L(\overrightarrow{pq})) \\ &= (M \circ L)(\overrightarrow{pq}).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass  $g \circ f$  eine affine Abbildung mit zugehöriger linearer Abbildung  $M \circ L$  ist.

Zu ii). Diagramm (II.6) zeigt, dass  $f$  genau dann bijektiv ist, wenn  $L$  bijektiv ist. Die Umkehrabbildung  $L^{-1}: W \rightarrow V$  ist ebenfalls linear (s. [41], Satz III.5.8). Für  $r, s \in W$  berechnen wir

$$L(\overrightarrow{f^{-1}(r)f^{-1}(s)}) = \overrightarrow{rs}.$$

Nach Anwendung der linearen Abbildung  $L^{-1}$  wird daraus

$$\overrightarrow{f^{-1}(r)f^{-1}(s)} = L^{-1}(\overrightarrow{rs}).$$

Daran erkennen wir, dass  $f^{-1}$  eine affine Abbildung mit zugehöriger linearer Abbildung  $L^{-1}$  ist.

Zu iii). Es seien  $f: X \rightarrow Y$  eine affine Abbildung und  $L: V \rightarrow W$  die zugehörige lineare Abbildung. Wenn  $f$  injektiv ist, dann ist  $L$  nach Diagramm (II.6) auch injektiv. Eine injektive lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen  $k$ -Vektorräumen derselben Dimension ist bijektiv ([41], Folgerung III.5.41, iii). Diagramm (II.6) zeigt wieder, dass  $f$  bijektiv ist.  $\square$

*II.2.12 Beispiele.* i) Es seien  $V, W$  und  $U$   $k$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  und  $g: W \rightarrow U$  affine Abbildungen. Dann existieren lineare Abbildungen  $L: V \rightarrow W$  und  $M: W \rightarrow U$  sowie Vektoren  $w_0 \in W$  und  $u_0 \in U$ , so dass

$$\begin{aligned}\forall v \in V: \quad f(v) &= L(v) + w_0, \\ \forall w \in W: \quad g(w) &= M(w) + u_0\end{aligned}$$

und folglich

$$\forall v \in V: \quad (g \circ f)(v) = (M \circ L)(v) + M(w_0) + u_0.$$

ii) Es seien  $V$  und  $W$   $k$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine affine Abbildung. Es seien  $w_0 \in W$  und  $L: V \rightarrow W$  die lineare Abbildung, so dass

$$\forall v \in V: \quad f(v) = L(v) + w_0.$$

Die Berechnung aus Teil i) zeigt, dass

$$\begin{aligned}f^{-1}: W &\longrightarrow V \\ w &\longmapsto L^{-1}(w) - L^{-1}(w_0).\end{aligned}$$

Es sei  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  ein affiner Raum. Wir setzen

$$\text{Aff}(\mathbb{A}) := \{ f: X \longrightarrow Y \mid f \text{ ist (affiner) Isomorphismus} \}.$$

Aus II.2.8 Beispiel und II.2.11 Satz leiten wir das Folgende ab.

**II.2.13 Lemma.** *Für einen affinen Raum  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  ist  $\text{Aff}(\mathbb{A})$  eine Untergruppe der Gruppe  $S(X)$  der bijektiven Selbstabbildungen von  $X$ .*

Wir nennen  $\text{Aff}(\mathbb{A})$  die *affine Gruppe* von  $\mathbb{A}$ .

**II.2.14 Aufgaben.** Es seien  $V$  ein  $k$ -Vektorraum und  $\mathbb{A}(V)$  der zugehörige affine Raum.

a) Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} h: (V, +) &\longrightarrow \text{Aff}(\mathbb{A}(V)) \\ v &\longmapsto \tau_v \end{aligned}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Hierbei ist  $(V, +)$  die additive Gruppe des Vektorraums  $V$ .

b) Es sei

$$\text{GL}(V) := \{ L: V \longrightarrow V \mid L \text{ ist linearer Isomorphismus} \}$$

die *allgemeine lineare Gruppe* von  $V$ . Benutzen Sie Teil i), um  $\text{Aff}(\mathbb{A}(V))$  als semidirektes Produkt ([36], II.12.10 Definition)

$$\text{Aff}(\mathbb{A}(V)) \cong (V, +) \rtimes \text{GL}(V)$$

zu beschreiben.

## II.2.1 Beschreibung affiner Abbildungen mit Matrizen

Es sei  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl. Wir schreiben Elemente in  $k^n$  und  $k^{n+1}$  als Spaltenvektoren. Der Index für die erste Koordinate in  $k^{n+1}$  sei die Null. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \iota: k^n &\longrightarrow k^{n+1} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \pi: k^{n+1} &\longrightarrow k^n \\ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sind affine Abbildungen, so dass

$$\pi \circ \iota = \text{id}_{k^n}.$$

*II.2.15 Bemerkung.* Die Abbildung  $\iota$  stellt die Verbindung zwischen affiner und projektiver Geometrie her. Wir werden dies für Dimension zwei in Abschnitt III.3.1 explizit machen.

Es sei nun  $f: k^n \rightarrow k^n$  eine affine Abbildung. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor  $w_0 \in k^n$  und eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $L: k^n \rightarrow k^n$ , so dass

$$\forall v \in k^n : f(v) = L(v) + w_0.$$

Weiter existiert eine eindeutig bestimmte  $(n \times n)$ -Matrix  $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , so dass

$$\forall v \in k^n : L(v) = A \cdot v.$$

Wir schreiben weiter

$$w_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

und setzen

$$B_f := \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline w_0 & & A \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_n & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array} \right).$$

Damit gilt

$$\forall v \in k^n : f(v) = \pi(B_f \cdot \iota(v)).$$

*II.2.16 Aufgabe.* Es seien  $f: k^n \rightarrow k^n$  und  $g: k^n \rightarrow k^n$  zwei affine Abbildungen. Beweisen Sie, dass

$$B_{g \circ f} = B_g \cdot B_f.$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \text{Aff}(\mathbb{A}_k^n) &\longrightarrow \text{GL}_{n+1}(k) \\ f &\longmapsto B_f \end{aligned}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Damit werden die Formeln aus II.2.12 Beispiele transparent. Das ist bereits eine Manifestation der projektiven Geometrie (s. Kapitel III, insbesondere Abschnitt III.3.1).

## II.2.2 Kongruenz in der affinen Geometrie

Es sei  $\mathbb{A} = (X, V, \tau)$  ein affiner Raum. Zwei Teilmengen  $A, B \subset X$  sind *kongruent* oder *affin äquivalent*, wenn es eine Abbildung  $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$  mit

$$f(A) = B$$

gibt. Affine Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Teilmengen von  $X$ .

**II.2.17 Aufgabe.** Es seien  $k$  ein Körper und  $\mathbb{A}_k^2$  der affine Raum zum Vektorraum  $k^2$ , den wir im Folgenden auch die *affine Ebene* über  $k$  nennen. Beweisen Sie die folgende Aussage.

**Hauptsatz der affinen Geometrie.** *Es seien  $p_1, p_2, p_3$  und  $q_1, q_2, q_3$  Punkte in der affinen Ebene  $\mathbb{A}_k^2$ , so dass weder  $p_1, p_2$  und  $p_3$  noch  $q_1, q_2$  und  $q_3$  auf einer Geraden liegen. Dann existiert genau eine bijektive affine Abbildung  $f: k^2 \rightarrow k^2$ , so dass*

$$f(p_i) = q_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

In der affinen Ebene sind also zwei beliebige Dreiecke affin äquivalent.

### II.2.3 Quadriken

Ab jetzt arbeiten wir über dem Grundkörper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen. Es sei  $n \geq 1$ . Ein *Polynom vom Grad zwei* in den Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  ist ein Ausdruck der Form

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n e_k \cdot x_k + f.$$

Dabei seien die Koeffizienten  $d_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ ,  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , und  $f$  reelle Zahlen und es gebe Indizes  $1 \leq i_0 \leq j_0 \leq n$  mit  $d_{i_0 j_0} \neq 0$ . (Man vergleiche [38], 3.2.4 Beispiele, und [35], Seite 5ff). Wir sagen, dass  $q$  *homogen vom Grad zwei* ist, wenn  $e_1 = \dots = e_n = f = 0$  gilt. Entsprechend ist ein *lineares Polynom* ein Ausdruck der Form

$$l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n e_k \cdot x_k + f.$$

Ein lineares Polynom ist *homogen*, wenn  $f = 0$  erfüllt ist.

**II.2.18 Definition.** Eine Teilmenge  $Q \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Quadrik*, wenn es ein Polynom  $q(x_1, \dots, x_n)$  vom Grad zwei gibt, so dass<sup>9</sup>

$$Q = V(q) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^2 \mid q(a_1, \dots, a_n) = 0\}.$$

**II.2.19 Bemerkung und Beispiel.** Wenn  $q$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei ist, dann ist  $V(q)$  ein Kegel mit Spitze 0, d.h.,  $0 \in V(q)$  und für jeden Punkt  $v \in V(q)$  ist auch die Gerade durch  $v$  und 0, also die Menge  $\{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ , in  $V(q)$  enthalten. Wir hatten bereits mit dem Kegel

$$K := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 - c^2 = 0\}$$

gearbeitet. Er gehört zu dem homogenen Polynom

$$x^2 + y^2 - t^2.$$

---

<sup>9</sup>Im abstrakten Formalismus von Polynomen in der Algebra wird Einsetzen von Punkten in [35], Seite 8, beschrieben.

### Eindeutigkeit der Gleichungen für Quadriken

Es seien  $q$  ein Polynom vom Grad zwei und  $v = (a_1, \dots, a_n) \in V(q)$  ein Punkt auf der zugehörigen Quadrik. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes homogenes Polynom  $k_v$  vom Grad zwei und ein eindeutig bestimmtes homogenes lineares Polynom  $l_v$ , so dass

$$q(x_1, \dots, x_n) = k_v(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) + l_v(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n).$$

*II.2.20 Bemerkung.* Diese Darstellung ist gewissermaßen die Taylorformel.<sup>10,11</sup> Dementsprechend gilt wie in [38], 7.2.6 Folgerung, dass

$$l_v(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \cdot x_i. \quad (\text{II.8})$$

Weiter ist die *Hessematrix*<sup>12</sup> von  $q$  an der Stelle  $v$  die Matrix  $H_q(v) = (h_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  mit

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \dots, a_n).$$

Man hat dann

$$k_v(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \cdot (x_1, \dots, x_n) \cdot H_q(v) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (\text{II.9})$$

*II.2.21 Aufgabe.* Es seien  $q(x_1, \dots, x_n)$  ein quadratisches Polynom und  $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt mit  $q(a_1, \dots, a_n) = 0$ . Beweisen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes homogenes Polynom  $k_v$  vom Grad 2 und ein eindeutig bestimmtes homogenes lineares Polynom  $l_v$  gibt, so dass

$$q(x_1, \dots, x_n) = k_v(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) + l_v(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n).$$

Zeigen Sie mit rein algebraischen Argumenten, dass  $l_v$  durch Formel (II.9) gegeben ist und  $k_v$  durch Formel (II.9).

**Bemerkung.** Die partiellen Ableitungen sind formal definiert, basierend auf der Formel  $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ ,  $k \geq 1$ .

Wir sagen, dass  $V(q)$  in  $v$  *glatt* ist, wenn  $l_v \neq 0$ . Andernfalls ist  $a$  ein *singulärer* Punkt von  $V(q)$ .

*II.2.22 Bemerkungen.* i) Wenn  $v \in V(q)$  ein singulärer Punkt ist, dann ist  $V(q)$  ein Kegel mit Spitze  $v$ , d.h., für jeden Punkt  $w \in V(q)$  ist auch die Gerade durch  $w$  und  $v$  in  $V(q)$  enthalten.

ii) Wenn  $V(q)$  ein Kegel ist und  $q$  kein lineares Polynom ist, d.h., es Indizes  $1 \leq i_0 \leq j_0 \leq n$  mit  $d_{i_0, j_0} \neq 0$  gibt, dann ist  $V(q)$  in jeder Spitze des Kegels singulär.

iii) Es seien  $1 \leq k \leq n$  und  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , positive reelle Zahlen. Dann ist

$$V(\lambda_1 \cdot x_1^2 + \dots + \lambda_k \cdot x_k^2) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 = \dots = a_k = 0\}$$

<sup>10</sup>Brook Taylor (1685 - 1731), britischer Mathematiker.

<sup>11</sup>Hier benötigen wir aber keine Analysis, sondern nur elementare Algebra.

<sup>12</sup>Ludwig Otto Hesse (1811 - 1874), deutscher Mathematiker.

ein linearer Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ . Dies ist ein Kegel, für den jeder Punkt des Kegels eine Spitze ist. Gemäß unserer Definition ist jeder Punkt dieses Kegels ein singulärer Punkt. Die anschauliche Begründung ist, dass jeder Punkt auf Grund der Gleichung die Vielfachheit zwei hat. Dagegen ist etwa die Ebene  $V(x_1)$  in jedem Punkt glatt.

iv) Wenn  $V(q)$  im Punkt  $v$  glatt ist, dann ist  $\{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \mid l_v(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) = 0\}$  der Tangentialraum an  $V(q)$  in  $v$ , und es gibt laut der ersten Gleichung in II.2.20 Bemerkung einen Index  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  mit

$$\frac{\partial q}{\partial x_{i_0}}(v) \neq 0.$$

Nach Satz [38], 11.3.4 Satz, ist  $V(q)$  in einer Umgebung von  $v$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ .

Wir möchten Quadriken bis auf affine Äquivalenz klassifizieren, indem wir die Gleichungen mit Techniken der linearen Algebra manipulieren. Dazu müssen wir verstehen, wann zwei verschiedene Polynome vom Grad zwei dieselbe Quadrik definieren. Wenn  $q$  ein Polynom vom Grad zwei ist und  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  eine reelle Zahl, dann gilt offenbar

$$V(q) = V(\lambda \cdot q). \quad (\text{II.10})$$

In II.2.22 Bemerkungen, iii), haben wir gesehen, dass derselbe lineare Teilraum durch viele verschiedene Gleichungen definiert werden kann. Ferner definiert

$$\lambda_1 \cdot x_1^2 + \dots + \lambda_k \cdot x_k^2 + 1$$

für  $0 \leq k \leq n$  und  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{>0}$  die leere Menge. Wir wollen nun beweisen, dass in den meisten Fällen die in (II.10) wiedergegebene Mehrdeutigkeit die einzige ist. Wir folgen dem Buch [34], Chapter III, §A.

**II.2.23 Satz.** *Es seien  $q_1$  und  $q_2$  zwei Polynome vom Grad zwei, so dass*

- ★  $V(q_1) = V(q_2)$  und
- ★ es einen glatten Punkt  $v \in V(q_1)$  gibt.

Dann existiert eine reelle Zahl  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $q_2 = \lambda \cdot q_1$ .

Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir das folgende Werkzeug.

**II.2.24 Hilfssatz.** *Es sei  $q(x_1, \dots, x_n)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei.*

- i) Wenn  $q(a_1, \dots, a_n) = 0$  für alle  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  gilt, dann folgt  $q = 0$ .
- ii) Wenn  $q(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$  für alle  $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  gilt, dann ist  $q$  ebenfalls das Nullpolynom.
- iii) Wenn  $q(0, a_2, \dots, a_n) = 0$  für alle  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  mit  $a_2 \neq 0$  gilt, dann existieren eine reelle Zahl  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und ein lineares Polynom  $l(x_2, \dots, x_n)$ , so dass  $q(x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot x_1^2 + x_1 \cdot l(x_2, \dots, x_n)$ .

*Beweis.* Zu i). Wir beweisen die Aussage durch Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  ist die Behauptung offensichtlich. Für  $n \geq 2$  existieren eine reelle Zahl  $\lambda$ , ein lineares Polynom  $l(x_2, \dots, x_n)$  und ein homogenes Polynom  $q'(x_2, \dots, x_n)$ , so dass

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot x_1^2 + x_1 \cdot l(x_2, \dots, x_n) + q'(x_2, \dots, x_n). \quad (\text{II.11})$$

Falls es einen Vektor  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  gäbe, so dass  $l(a_2, \dots, a_n) \neq 0$  oder  $q'(a_2, \dots, a_n) \neq 0$ , so gälte  $\lambda \neq 0$  oder  $l(a_2, \dots, a_n) \neq 0$ , und

$$q(x_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda \cdot x_1^2 + x_1 \cdot l(a_2, \dots, a_n) + q'(a_2, \dots, a_n)$$

wäre ein nicht triviales lineares oder quadratisches Polynom in einer Veränderlichen. Solch ein Polynom nimmt immer Werte ungleich Null an, im Widerspruch zur Voraussetzung. Mit der Induktionsvoraussetzung schließen wir  $l = 0$  und  $q' = 0$ . Offenbar muss dann auch  $\lambda = 0$  gelten.

Zu ii). Indem wir die Voraussetzung auf den Vektor  $(1, 0, \dots, 0)$  anwenden, erkennen wir, dass in (II.11)  $\lambda = 0$  gelten muss. Wenn es einen Vektor  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^2$  mit  $l(a_2, \dots, a_n) \neq 0$  oder  $q'(a_2, \dots, a_n) \neq 0$  gäbe, so gälte

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad q(1, t \cdot a_2, \dots, t \cdot a_n) = t \cdot l(a_2, \dots, a_n) + t^2 \cdot q'(a_2, \dots, a_n) = 0.$$

Das ist unmöglich und damit ein Widerspruch.

Zu iii). Wir benutzen die Teile i) und ii). In Zerlegung (II.11) gilt angesichts der Voraussetzung  $q'(a_2, \dots, a_n) = 0$  für alle  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  mit  $a_2 \neq 0$  und deswegen  $q' = 0$ .  $\square$

*Beweis von II.2.23 Satz.* Wir nehmen an, dass  $v = (0, \dots, 0)$  gilt. Man kann das Argument leicht auf andere Werte von  $v$  anpassen oder die Regel (II.13) zur Transformation der Gleichung unter einer Translation anwenden. Falls  $Q$  die Vereinigung zweier verschiedener Ebenen ist, dann folgt die Aussage aus II.2.24 Hilfssatz, iii). In der Tat können wir in geeigneten Koordinaten annehmen, dass die Ebenen  $V(x_1)$  und  $V(x_2)$  sind. Aus  $V(x_1) \subset V(q_1)$  folgt dann, dass  $x_1$  das Polynom  $q_1$  teilt. Ebenso teilt  $x_2$  das Polynom  $q_1$ , so dass  $q_1$  ein Vielfaches von  $x_1 \cdot x_2$  ist. Dasselbe gilt für  $q_2$ . Diesen Fall können wir im Folgenden ausschließen.

Es sei  $q_i(x_1, \dots, x_n) = k_0^i(x_1, \dots, x_n) + l_0^i(x_1, \dots, x_n)$  mit  $k_0^i$  homogen vom Grad zwei und  $l_0^i$  homogen und linear,  $i = 1, 2$ . Unsere erste Behauptung ist, dass sich  $l_0^1$  und  $l_0^2$  nur um einen skalaren Faktor unterscheiden. Es seien  $w = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\kappa_w^i := k_0^i(b_1, \dots, b_n)$  und  $\mu_w^i := l_0^i(b_1, \dots, b_n)$ ,  $i = 1, 2$ . Wir betrachten die beiden quadratischen Polynome

$$\begin{aligned} p_w^1(t) &:= q_1(t \cdot b_1, \dots, t \cdot b_n) = t^2 \cdot \kappa_w^1 + t \cdot \mu_w^1, \\ p_w^2(t) &:= q_2(t \cdot b_1, \dots, t \cdot b_n) = t^2 \cdot \kappa_w^2 + t \cdot \mu_w^2. \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieser Polynome entsprechen den Punkten, an denen die Gerade  $\{\ell \cdot w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  die Quadrik  $Q$  schneidet. Sie müssen also übereinstimmen.

Wir zeigen zunächst, dass  $l_0^2 \neq 0$  gilt. Andernfalls wäre  $p_w^2$  für alle  $w \in \mathbb{R}^3$  entweder trivial oder hätte nur  $t = 0$  als Nullstelle. Insbesondere müsste  $\kappa_w^1 = 0$  für alle  $w \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mu_w^1 \neq 0$  gelten. Dies besagt  $V(l_0^1) \subset V(k_0^1)$ . Nach Teil iii) von II.2.24 Hilfssatz müsste  $l_0^1$  das Polynom  $q_1$  teilen,<sup>13</sup> und  $V(q_1)$  wäre die Vereinigung zweier Ebenen. Diesen Fall haben wir bereits behandelt.

Jetzt nehmen wir an, dass es keine Konstante  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt, so dass  $l_0^2 = c \cdot l_0^1$ . Wenn dann  $\mu_w^1 = 0$  und  $\mu_w^2 \neq 0$ , dann muss  $\kappa_w^2 = 0$  gelten. Anders gesagt,  $(V(l_0^1) \setminus V(l_0^2)) \subset V(k_0^2)$ .

<sup>13</sup>Hierzu beachte man, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $l_0^1 = x_1$  voraussetzen kann. Die formale Begründung liefern die Formeln für die Transformationen von Gleichungen, die wir gleich besprechen werden.

Nach Teil iii) von II.2.24 Hilfssatz teilt  $l_0^1$  das quadratische Polynom  $k_0^2$ . Wir finden also ein homogenes lineares Polynom  $\ell_2$ , so dass  $k_0^2 = l_0^1 \cdot \ell_2$ . Aus Symmetriegründen existiert auch ein homogenes lineares Polynom  $\ell_1$  mit  $k_0^1 = l_0^2 \cdot \ell_1$ . Der besseren Übersicht halber wählen wir Koordinaten so, dass  $l_0^1 = x_1$  und  $l_0^2 = x_2$ . Der Durchschnitt von  $V(x_1)$  mit  $V(q_2)$  ist  $V(x_1) \cap V(x_2)$ . Dasselbe muss für den Durchschnitt von  $V(x_1)$  und  $V(q_1)$  gelten. Es folgt, dass  $\ell_1 = \alpha_{1,1} \cdot x_1 + \alpha_{2,1} \cdot x_2$ . Dabei gilt  $\alpha_{2,1} \neq 0$ , weil  $Q$  nicht Vereinigung zweier Ebenen ist. Ebenso folgt  $\ell_2 = \alpha_{1,2} \cdot x_1 + \alpha_{2,2} \cdot x_2$  mit  $\alpha_{1,2} \neq 0$ . Wir fassen die beiden Polynome als Polynome in  $x_1$  auf:

$$\begin{aligned} q_1 &= (1 + \alpha_{1,1} \cdot x_2) \cdot x_1 + \alpha_{2,1} \cdot x_2^2, \\ q_2 &= \alpha_{1,2} \cdot x_1^2 + (\alpha_{2,2} \cdot x_2) \cdot x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Das Polynom  $q_1$  ist dann linear in  $x_1$  oder konstant. Wenn man eine Zahl  $a_2 \in \mathbb{R}$  mit  $1 + \alpha_{1,1} \cdot a_2 \neq 0$  einsetzt, hat die Gleichung  $q_1(x_1, a_2) = 0$  genau eine Lösung. Die Diskriminante des Polynoms  $q_2(x_1, a_2)$  ist

$$(\alpha_{2,2} \cdot x_2)^2 - 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot x_2.$$

Wenn  $\alpha_{2,2} \cdot \alpha_{1,2} < 0$ , dann hat die Gleichung  $q_2(x_1, a_2) = 0$  zwei verschiedene Lösungen. Das widerspricht der Annahme  $V(q_1) = V(q_2)$ . Daher muss eine Konstante  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $l_0^2 = c \cdot l_0^1$  existieren.

Es sei  $w \in \mathbb{R}^n$  mit  $\mu_w^1 \neq 0$ . Dann gilt auch  $\mu_w^2 \neq 0$ . Wenn  $\varkappa_w^1 = 0$  gilt, dann muss auch  $\varkappa_w^2 = 0$  gelten, und wir haben  $p_w^2(t) = c \cdot p_w^1(t)$ . In den verbleibenden Fällen haben die Polynome  $p_w^1(t)$  und  $p_w^2(t)$  zwei verschiedene Nullstellen  $0$  und  $\vartheta_w$ . Es gibt dann Konstanten  $c_w^i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so dass  $p_w^i(t) = c_w^i \cdot t \cdot (t - \vartheta_w)$ ,  $i = 1, 2$ , und wir erkennen, dass  $c_w^2/c_w^1 = c$ . Damit haben wir nachgewiesen, dass  $k_0^2(b_1, \dots, b_n) - c \cdot k_0^1(b_1, \dots, b_n) = 0$  für alle  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  mit  $l_0^1(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ . Da  $k_0^2 - c \cdot k_0^1$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei ist, folgt aus Teil ii) von II.2.24 Hilfssatz, dass  $k_0^2 - c \cdot k_0^1 = 0$  und daher auch  $q_2 - c \cdot q_1 = 0$  wie verlangt.  $\square$

**II.2.25 Aufgabe.** Für  $n, d \geq 1$  sei

$$K_{n,d} := \{\underline{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^{n \times n} \mid k_1 + \dots + k_n \leq d\}.$$

Ein *Polynom* vom *Grad*  $d$  ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{\underline{k}=(k_1, \dots, k_n) \in K_{n,d}} c_{\underline{k}} \cdot x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$$

mit Koeffizienten  $c_{\underline{k}} \in \mathbb{R}$ ,  $\underline{k} \in K_{n,d}$ , so dass ein Index  $\underline{k}_0 = (k_1^0, \dots, k_n^0) \in K_{n,d}$  mit  $k_1 + \dots + k_n = d$  und  $c_{\underline{k}_0} \neq 0$  existiert. Für festes  $n \geq 1$  wird die Menge der Polynome zusammen mit den Konstanten aus  $\mathbb{R}$  mit  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  bezeichnet. Für Polynome  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  sei

$$V(f_1, \dots, f_s) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, i = 1, \dots, s\}.$$

Beweisen Sie, dass es ein Polynom  $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  gibt, so dass

$$V(f_1, \dots, f_s) = V(g).$$

**Bemerkung.** Eine Teilmenge  $Z \subset \mathbb{R}^n$  ist eine *algebraische Menge*, wenn es Polynome  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  mit  $Z = V(f_1, \dots, f_s)$  gibt.

### Normalformen für Gleichungen von Quadriken

Es sei

$$q = q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n e_k \cdot x_k + f$$

ein Polynom vom Grad zwei. Wir definieren die symmetrische Matrix

$$B_q = (\beta_{ij})_{i,j=0,\dots,n} \quad (\text{II.12})$$

über

$$\begin{aligned} \beta_{00} &:= f, \\ \beta_{ii} &:= d_{ii}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \beta_{i0} := \beta_{0i} &:= \frac{1}{2} \cdot e_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \beta_{ji} := \beta_{ij} &:= \frac{1}{2} \cdot d_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Damit berechnet man das Folgende.

**II.2.26 Lemma.** Für einen (Spalten-)Vektor  $v = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$v \in V(q) \iff \iota(v)^t \cdot B_q \cdot \iota(v) = 0.$$

Mit diesem Lemma können wir das Bild einer Quadrik unter einer affinen Transformation berechnen. Seien also  $q$  ein Polynom vom Grad zwei,  $Q := V(q)$  und  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine bijektive affine Abbildung. Es gilt

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : v \in f(Q) \iff f^{-1}(v) \in Q.$$

Nach II.2.16 Aufgabe gilt

$$B_{f^{-1}} = B_f^{-1}.$$

Wir definieren  $f \star q$  als das Polynom vom Grad zwei, für das

$$B_{f \star q} = (B_f^{-1})^t \cdot B_q \cdot B_f^{-1} \quad (\text{II.13})$$

gilt. Es folgt

$$f(Q) = V(f \star q). \quad (\text{II.14})$$

Bevor wir fortfahren, benötigen wir ein Ergebnis der linearen Algebra. Dazu definieren wir wieder die *orthogonale Gruppe*

$$O_n(\mathbb{R}) := \{ A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = E_n \}$$

sowie die *spezielle orthogonale Gruppe*

$$SO_n(\mathbb{R}) := \{ A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}.$$

**II.2.27 Spektralsatz.** Es sei  $A$  eine symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix. Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen  $s, t \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_{s+t} \in \mathbb{R}$  und eine Matrix  $S \in SO_n(\mathbb{R})$ , so dass

- ★  $s + t \leq n$ ,
- ★  $S^t \cdot A \cdot S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{s+t}, 0, \dots, 0)$ ,<sup>14</sup>
- ★  $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_s$  und  $\lambda_{s+t} < \dots < \lambda_{s+1} < 0$ .

*Zum Beweis.* Die Zahl  $s+t$  ist offenbar der Rang von  $A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  sind die positiven Eigenwerte von  $A$  und  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+t}$  die negativen. Damit sind diese Daten eindeutig bestimmt.

In [12], Abschnitt 5.3.7, Korollar 1, wird gezeigt, dass es eine Matrix  $T \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  gibt, so dass  $T^t \cdot A \cdot T$  eine Diagonalmatrix ist. Da Permutationsmatrizen orthogonale Matrizen sind,<sup>15</sup> können wir  $S' \in \text{O}_n(\mathbb{R})$  finden, so dass die Matrix  $S'^t \cdot A \cdot S'$  die angegebene Gestalt hat. Schließlich ist

$$S := S' \cdot \text{diag}(\det(S'), 1, \dots, 1)$$

eine Matrix aus der speziellen orthogonalen Gruppe, die dasselbe leistet.  $\square$

In Gleichung (II.13) kann jede Matrix der Form

$$T = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline w & & S \end{array} \right)$$

mit  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  und  $w \in \mathbb{R}^n$  als Matrix  $B_f^{-1}$  realisiert werden. Weiter setzen wir  $b := (\beta_1, \dots, \beta_n)^t \in \mathbb{R}^n$ ,  $A := (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  und schreiben

$$B_q = \left( \begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right). \quad (\text{II.15})$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} T^t \cdot B_q \cdot T &= T^t \cdot \left( \begin{array}{c|c} c + b^t \cdot w & b^t \cdot S \\ \hline b + A \cdot w & A \cdot S \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} c + 2 \cdot b^t \cdot w + w^t \cdot A \cdot w & b^t \cdot S + w^t \cdot A \cdot S \\ \hline S^t \cdot b + S^t \cdot A \cdot w & S^t \cdot A \cdot S \end{array} \right). \quad (\text{II.16}) \end{aligned}$$

In Analogie zu den Ergebnissen von Abschnitt II.1 nennen wir eine affine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine *Isometrie*, wenn die zugehörige lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Bedingung

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n : \quad \langle L(v), L(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

erfüllt.

<sup>14</sup>Mit  $\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$  bezeichnen wir die Matrix  $(c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  mit  $c_{ii} = b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $c_{ij} = 0$  für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$ .

<sup>15</sup>Für eine Transposition  $\tau$  gilt für die zugehörige Matrix  $S_\tau$  offenbar  $S_\tau^t = S_\tau$  und  $S_\tau \cdot S_\tau = \mathbb{E}_n$  (vgl. [41], Bemerkungen und Beispiele IV.3.10, iii), [36], II.5.26 Aufgabe). Da jede Permutation ein Produkt von Transpositionen ist ([41], Satz IV.3.6, [36], II.5.10 Satz), folgt, dass jede Permutationsmatrix orthogonal ist.

**II.2.28 Bemerkung.** Wie in zahlreichen Anmerkungen in Abschnitt II.1 angedeutet wurde, ist eine affine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann eine Isometrie, wenn

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n : d(f(v), f(w)) = d(v, w).$$

**II.2.29 Satz.** Es sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  eine Quadrik. Dann existiert eine Isometrie  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass für  $f(Q)$  eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

IA) Es existieren  $s, t \in \mathbb{N}$  und reelle Zahlen  $\alpha_1 > \dots > \alpha_s > 0, \beta_1 > \dots > \beta_t > 0$ , so dass  $s + t \leq n$  und

$$f(Q) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{a_1}{\alpha_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_s}{\alpha_s}\right)^2 - \left(\frac{a_{s+1}}{\beta_1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{a_{s+t}}{\beta_t}\right)^2 = 1 \right\}.$$

IB) Es existieren  $s, t \in \mathbb{N}$  und reelle Zahlen  $\alpha_1 > \dots > \alpha_s > 0, \beta_1 > \dots > \beta_t > 0$ , so dass  $s \geq t, s + t \leq n$  und

$$f(Q) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{a_1}{\alpha_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_s}{\alpha_s}\right)^2 - \left(\frac{a_{s+1}}{\beta_1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{a_{s+t}}{\beta_t}\right)^2 = 0 \right\}.$$

II) Es existieren  $s, t \in \mathbb{N}$  und reelle Zahlen  $\alpha_1 > \dots > \alpha_s > 0, \beta_1 > \dots > \beta_t > 0$ , so dass  $s \geq t$  und  $s + t < n$  und

$$f(Q) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{a_1}{\alpha_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_s}{\alpha_s}\right)^2 - \left(\frac{a_{s+1}}{\beta_1}\right)^2 - \dots - \left(\frac{a_{s+t}}{\beta_t}\right)^2 = a_{s+t+1} \right\}.$$

**Beweis.** Es sei  $q$  ein Polynom vom Grad zwei, so dass  $Q = V(q)$ . Wir wählen eine Matrix  $S \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ , so dass  $A' := S^t \cdot A \cdot S$  eine Gestalt wie in II.2.27 Spektralsatz annimmt.

**Fall I).** Wir nehmen an, dass es einen Vektor  $u$  gibt, so dass  $b = A \cdot u$ , und definieren die affine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass

$$B_f^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -u & & S & \end{array} \right).$$

Wenn in (II.16) links oben eine Null steht, befinden wir uns in Fall IB). Falls in diesem Fall  $s < t$  gilt, müssen wir die Gleichung mit  $-1$  multiplizieren und die Variablen umsortieren. Das geschieht mit der bijektiven linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $L(e_i) := e_{t+i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $L(e_i) = e_{i-s}$ ,  $i = s+1, \dots, s+t$ , und  $L(e_i) := e_i$ ,  $i = s+t+1, \dots, n$ . Diese lineare Abbildung wird durch eine Permutationsmatrix definiert, die der orthogonalen Gruppe angehört (s. Fußnote<sup>15</sup>). Ansonsten steht links oben eine Zahl  $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Wir dividieren die Gleichung  $(f \star q)(a_1, \dots, a_n) = 0$  durch  $-d$ . Falls  $d < 0$  erhalten wir die behauptete Gleichung aus Fall IA). Ansonsten müssen wir wie zuvor die Variablen neu sortieren.

**Fall II).** In diesem Fall ist der Rang  $s + t$  der Matrix  $A$  echt kleiner als  $n$ . Wir beginnen mit der affinen Abbildung  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass

$$B_g^{-1} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & S & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

Dann gilt

$$B_{g \star q} = \left( \begin{array}{c|c} c' & b'^t \\ \hline b' & A' \end{array} \right).$$

Wir können nun einen Vektor  $w' \in \mathbb{R}^n$  finden, so dass  $b'' := b' + A' \cdot w' \in \langle e_{s+t+1}, \dots, e_n \rangle$ . Es sei  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Translation um  $-w'$ , i.e.,

$$B_h^{-1} = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline w' & & \mathbb{E}_n & & \end{array} \right).$$

Wenn wir Gleichung (II.16) auf  $B_{g \star q}$  anwenden, erkennen wir, dass

$$B_{h \star g \star q} = \left( \begin{array}{c|c} c'' & b''^t \\ \hline b'' & A' \end{array} \right).$$

Es sei  $\lambda := \|b''\|$ . Da  $b''/\lambda$  Teil einer Orthonormalbasis ist, können wir eine Matrix

$$S' = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{s+t} & 0 \\ \hline 0 & S'' \end{array} \right)$$

finden, so dass  $S'' \in \mathrm{SO}_{n-s-t}(\mathbb{R})$  und  $S'^t \cdot b'' = \lambda \cdot e_{s+t+1}$ . Wir führen nun die affine Transformation  $g': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  aus, für die

$$B_{g'}^{-1} = \left( \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & S' & & \\ 0 & & & & \end{array} \right)$$

gilt. Damit finden wir

$$B_{g' \star h \star g \star q} = \left( \begin{array}{c|cc} c'' & \lambda \cdot e_{s+t+1}^t \\ \hline \lambda \cdot e_{s+t+1} & A' \end{array} \right).$$

Wenn  $c'' = 0$  gilt, setzen wir  $f' := g' \circ h \circ g$ . Andernfalls seien  $h'$  die Translation um  $(c''/(2 \cdot \lambda)) \cdot e_{s+t+1}$ . Falls  $\lambda < 0$  und  $s \geq t$  oder  $\lambda > 0$  und  $s < t$ , definieren wir  $f' := h' \circ g' \circ h \circ g$ . Mit

$$B_{g''}^{-1} := \mathrm{diag}(1| -1, \dots, -1)$$

können wir das Vorzeichen von  $\lambda$  ändern. Wenn also  $\lambda > 0$  und  $s \geq t$  oder  $\lambda < 0$  und  $s < t$ , dann setzen wir  $f' := g'' \circ h' \circ g' \circ h \circ g$ . Anschließend teilen wir die Gleichung  $(f' \star q)(a_1, \dots, a_n) = 0$  im Fall  $s \geq t$  durch  $\lambda$ . Für  $s < t$  teilen wir sie durch  $-\lambda$  und sortieren die Variablen wie zuvor um. Danach ergibt sich eine Gleichung der behaupteten Gestalt.  $\square$

**II.2.30 Bemerkungen.** i) Um festzustellen, in welchen Fällen Eindeutigkeit gilt, wenden wir II.2.23 Satz an. Nach II.2.22 Bemerkungen, iv), müssen wir dazu die gemeinsamen Nullstellen der partiellen Ableitungen auf  $f(Q)$  finden. In Fall IA) ist  $f(Q)$  leer, falls  $s = 0$ . Andernfalls gibt es einen glatten Punkt auf  $f(Q)$ . Wenn in Fall IB)  $t = 0$  gilt, definieren alle Wahlen von  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  denselben linearen Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ . Ansonsten ist z.B.  $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_{s+1} \cdot e_{s+1}$  ein glatter Punkt. Wir können die Gleichung dann noch mit  $\alpha_1^2$  multiplizieren, um  $\alpha_1 = 1$  zu erreichen und Eindeutigkeit zu erhalten. In Fall II) ist die partielle Ableitung nach  $x_{s+t+1}$  immer 1, so dass alle Punkte auf  $V(f(Q))$  glatt sind. Dabei ergibt  $s = t = 0$  die Ebene  $\{a_{s+t+1} = 0\}$ .

ii) Mit den Eindeutigkeitsaussagen, die wir in Teil i) festgehalten haben, finden wir die Klassifikation der Quadriken im  $\mathbb{R}^n$  bis auf (euklidische) Kongruenz.

**II.2.31 Beispiel.** Wir wenden die Klassifikation auf Koniken in  $\mathbb{R}^2$  an. Fall IA) mit  $s = 0$  liefert die leere Menge, mit  $s = 1$  und  $t = 0$  Vereinigungen zweier paralleler Geraden,<sup>16</sup> für  $s = t = 1$  Hyperbeln und für  $s = 2$  und  $t = 0$  Ellipsen. In Fall IB) bekommt man für  $s = 2$  den Ursprung, für  $s = 1$  und  $t = 0$  die Gerade  $\{a_1 = 0\}$  und für  $s = t = 1$  Vereinigungen zweier sich im Ursprung schneidender Geraden. Fall II) ergibt für  $s = 0$  die Gerade  $\{a_2 = 0\}$  und für  $s = 1$  Parabeln. Da für die Koniken die Eindeutigkeitsaussagen aus II.2.30 Bemerkungen, ii), gelten, haben wir die Klassifikation der Koniken in  $\mathbb{R}^2$  bis auf (euklidische) Kongruenz algebraisch überprüft.

**II.2.32 Satz.** Es sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  eine Quadrik. Dann existiert eine bijektive affine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass für  $f(Q)$  eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- IA) Es existieren  $s, t \in \mathbb{N}$ , so dass  $s + t \leq n$  und  $f(Q) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1^2 + \dots + a_s^2 - a_{s+1}^2 - \dots - a_{s+t}^2 = 1\}$ .
- IB) Es existieren  $s, t \in \mathbb{N}$ , so dass  $s \geq t$ ,  $s + t \leq n$  und  $f(Q) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1^2 + \dots + a_s^2 - a_{s+1}^2 - \dots - a_{s+t}^2 = 0\}$ .
- II) Es existieren  $s, t \in \mathbb{N}$ , so dass  $s \geq t$  und  $s + t < n$  und  $f(Q) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1^2 + \dots + a_s^2 - a_{s+1}^2 - \dots - a_{s+t}^2 = a_{s+t+1}\}$ .

*Beweis.* Nach Anwendung einer Isometrie können wir annehmen, dass die Gleichung von  $Q$  der Liste in II.2.29 Satz angehört. Wir wenden nun noch die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (a_1, \dots, a_n)^t &\longmapsto \left( \frac{a_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{a_s}{\alpha_s}, \frac{a_{s+1}}{\beta_1}, \dots, \frac{a_{s+t}}{\beta_t}, a_{s+t+1}, \dots, a_n \right)^t \end{aligned}$$

an, um die Gleichung in eine der Liste dieses Satzes zu überführen.  $\square$

**II.2.33 Bemerkung.** Wie in II.2.30 können wir mit dem obigen Satz die Klassifikation von Quadriken bis auf affine Äquivalenz bewerkstelligen.

**II.2.34 Beispiel.** Eine Konik in  $\mathbb{R}^2$  ist zu genau einer der folgenden Koniken affin äquivalent:

<sup>16</sup>Diesen Fall haben wir bei den Kegelschnitten nicht beobachtet. Er tritt auf, wenn man einen Zylinder mit einer geeigneten Ebene schneidet.

- ★ der Parabel  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b^2\}$ ,
- ★ dem Kreis  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$ ,
- ★ der Hyperbel  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 - b^2 = 1\}$ .

Wir schließen auch, dass eine bijektive affine Abbildung Parabeln auf Parabeln, Ellipsen auf Ellipsen und Hyperbeln auf Hyperbeln abbildet.

*II.2.35 Aufgaben.* a) Zeigen Sie, dass jede Hyperbel zu der Hyperbel

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot b = 1\}$$

affin äquivalent ist. Geben Sie explizit eine affine Transformation an, die die Hyperbel aus II.2.34 Beispiel in die Hyperbel in dieser Aufgabe überführt.

b) Es sei

$$Q := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot b = 1\}.$$

Geben Sie eine affine Transformation  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\psi(Q) = Q$  an, die die Brennpunkte und Leitlinien von  $Q$  nicht auf Brennpunkte und Leitlinien von  $Q$  abbildet.

*II.2.36 Bemerkung.* In diesem Abschnitt haben wir gesehen, dass es mit Methoden der linearen Algebra leicht ist, quadratische Gleichungen zu manipulieren. Dagegen ist es komplizierter, nur mit dem zugrundeliegenden geometrischen Objekt zu arbeiten (II.2.23 Satz). In der modernen algebraischen Geometrie (s. [16], Chapter II) arbeitet man daher in gewisser Weise ausschließlich mit den Gleichungen.

## II.2.4 Quadriken in $\mathbb{R}^3$

Wir illustrieren jetzt die verschiedenen Fälle in II.2.32 Satz für  $n = 3$ .

### Fall IA)

Wenn  $s = 0$  gilt, definiert die angegebene Gleichung die leere Menge. Wir betrachten weiter die Fälle mit  $t = 0$ . Für  $s = 1$  lautet die Gleichung  $a_1^2 = 1$ . Dies ist die Vereinigung der parallelen Ebenen  $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = -1\}$  und  $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 1\}$ . Gilt  $s = 2$ , dann besteht die Quadrik aus denjenigen Punkten  $(a_1, a_2, a_3)$  mit  $a_1^2 + a_2^2 = 1$ . Dies ist der Zylinder über dem Einheitskreis in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene. Für  $s = 3$  ist  $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\}$  die zweidimensionale Sphäre.

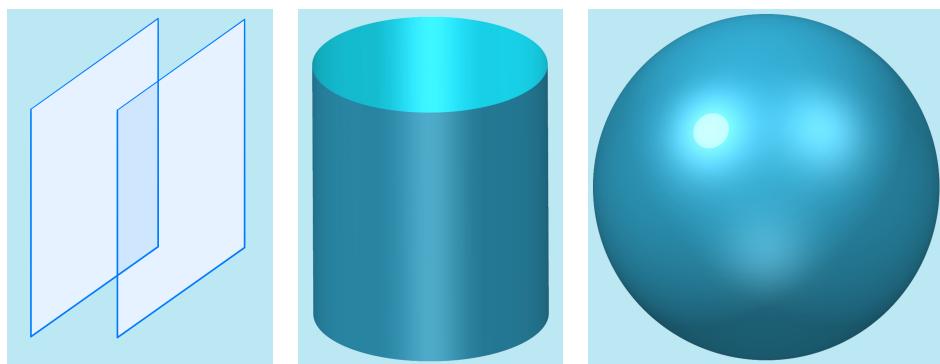


Abbildung II.3: Die Quadriken in Fall IA) mit  $t = 0$

Jetzt setzen wir  $t = 1$  voraus. Für  $s = 1$  lautet die Gleichung  $a_1^2 - a_2^2 = 1$ . Diese Gleichung beschreibt den Zylinder über der Hyperbel in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene aus II.2.34 Beispiel.

Falls  $s = 2$ , dann haben wir es mit der Menge  $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 1\}$  zu tun. Wenn  $(a_1, a_2, c) \in \mathbb{R}^3$  dieser Menge angehört, dann auch alle Elemente der Form  $(b_1, b_2, c)$  mit  $b_1^2 + b_2^2 = a_1^2 + a_2^2$ . Mit anderen Worten, die Menge ist rotationssymmetrisch um die  $x_3$ -Achse. Der Durchschnitt mit der  $(x_1, x_3)$ -Ebene ist wieder die Hyperbel aus II.2.34 Beispiel. Das untersuchte Objekt ist somit ein *einschaliges Rotationshyperboloid*.



**II.2.37 Bemerkungen.** Die Mantelflächen großer Kültürme sind Ausschnitte aus Rotationshyperboloiden. Das obige Bild zeigt die Kathedrale des Architekten Oscar Niemeyer<sup>17</sup> in Brasilia.

Den Abschluss bildet der Fall  $t = 2$  und  $s = 1$ . Die entsprechende Fläche ist  $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 1\}$ . Diesmal rotiert die Hyperbel aus II.2.34 Beispiel um die  $x$ -Achse. Das Ergebnis ist ein *zweischaliges Rotationshyperboloid*.

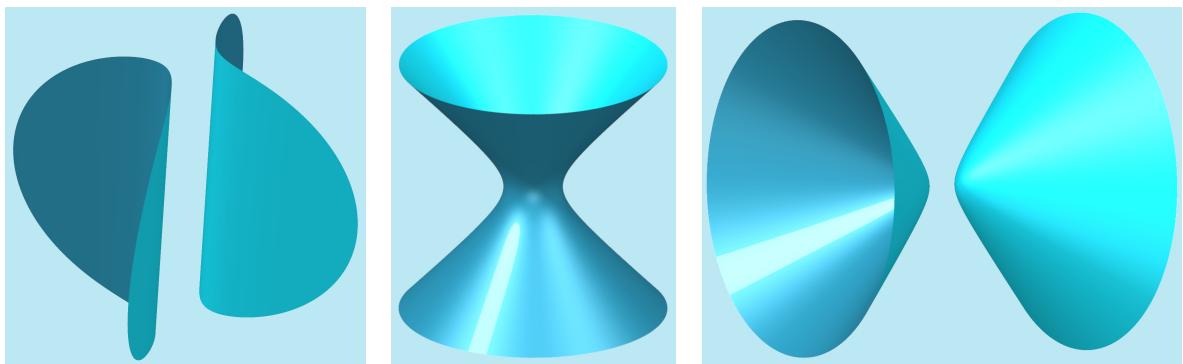


Abbildung II.4: Der Zylinder über einer Hyperbel, das ein- und das zweischalige Rotationshyperboloid

### Fall IB)

Wir beginnen wieder mit  $t = 0$ . Für  $s = 3$ ,  $s = 2$  bzw.  $s = 1$  ergeben sich ein Punkt, eine Gerade bzw. eine Ebene als Lösungsmenge der entsprechenden Gleichung.

<sup>17</sup>Oscar Ribeiro de Almeida Niemeyer Soares Filho (1907 - 2012), brasilianischer Architekt.

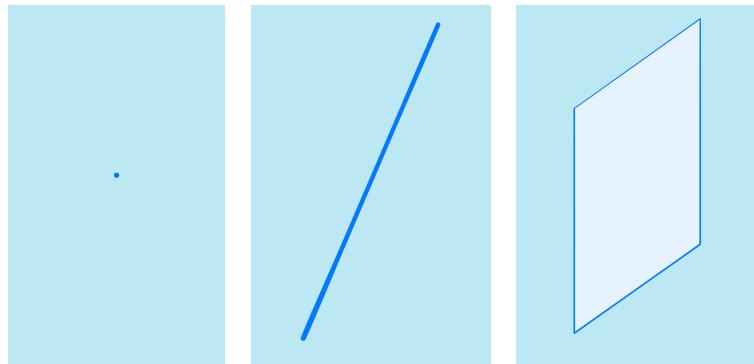


Abbildung II.5: Die „Quadriken“ in Fall IB) mit  $t = 0$

Jetzt betrachten wir die Gleichungen mit  $t = 1$  (s. Abbildung II.6). Falls  $s = 1$ , besteht das Objekt aus denjenigen Punkten  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ , die die Gleichung  $(a_1 - a_2) \cdot (a_1 + a_2) = a_1^2 - a_2^2 = 0$  erfüllen. Dies ist die Vereinigung zweier Ebenen, die sich entlang einer Geraden schneiden. Schließlich kann auch  $s = 2$  gelten. Die Menge  $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 0\}$  ist dann der uns wohlbekannte Kegel aus Abschnitt I.1.2. Da  $s \geq t$  gelten muss, gibt es keine weiteren Unterfälle.

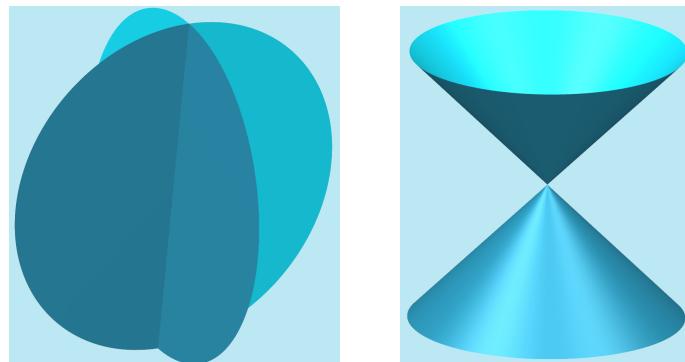


Abbildung II.6: Zwei sich schneidende Ebenen und der Kegel über einem Kreis

## Fall II)

Wir beginnen wieder mit  $t = 0$ . Für  $s = 1$  wird die Quadrik von allen Punkten  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  mit  $a_1^2 = a_2$  gebildet. Sie ist ein Zylinder über einer Parabel in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene. Für  $s = 2$  haben wir die Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 = x_3$ . Schneidet man das entstehende Gebilde mit der  $(x_1, x_3)$ -Ebene, dann ergibt sich eine Parabel. Diese lässt man um die  $x_3$ -Achse rotieren. Das Ergebnis ist ein *Rotationsparaboloid*. Im letzten möglichen Fall  $s = t$  haben wir  $Q = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1^2 - a_2^2 = a_3\}$ . Diese Fläche nennt man *hyperbolische Paraboloidschale*. Wir werden ihre Geometrie weiter unten noch genauer beschreiben.

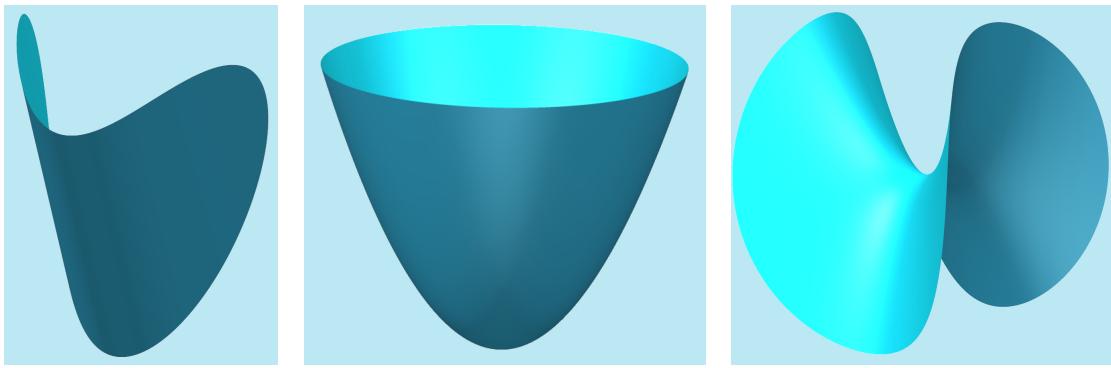


Abbildung II.7: Der Zylinder über einer Parabel, das Rotationsparaboloid und die hyperbolische Paraboloidschale

### Regellinien auf Quadriken

Eine Fläche<sup>18</sup>  $S \subset \mathbb{R}^3$  heißt *Regelfläche*, wenn sie Vereinigung von Geraden ist. Kegel oder Zylinder sind offensichtlich Vereinigungen von Geraden. Es seien  $q(x_1, x_2, x_3)$  ein Polynom vom Grade zwei und  $v = (a_1, a_2, a_3) \in V(q)$  ein glatter Punkt. Dann existieren ein homogenes lineares Polynom  $l_v$  und ein homogenes quadratisches Polynom  $k_v$ , so dass

$$q(x_1, x_2, x_3) = k_v(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) + l_v(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3).$$

Um das Argument zu vereinfachen, wählen wir die Koordinaten so, dass  $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$  und  $l_v = x_1$ , d.h.,

$$q(x_1, x_2, x_3) = k_v(x_1, x_2, x_3) + x_1.$$

Der Durchschnitt von  $V(q)$  mit der Tangentialebene  $V(x_1)$ , die wir auf die offensichtliche Weise mit  $\mathbb{R}^2$  identifizieren, besteht also aus allen Punkten  $(a_2, a_3) \in \mathbb{R}^2$  mit  $k_v(0, a_2, a_3) = 0$ . Dies ist ein Kegel mit Spitze  $(0, 0)$ . Es ist also eine Gerade, die Vereinigung zweier Geraden, die sich in  $(0, 0)$  schneiden, oder ein einzelner Punkt. Letzteres passiert z.B., wenn  $k_v(0, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2$ . Für die Sphäre oder das Rotationsparaboloid haben wir genau diesen Fall.<sup>19</sup>

**Das einschalige Rotationshyperboloid.** Wir beginnen mit dem einschaligen Rotationshyperboloid

$$Q = \{ (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 1 \}.$$

Im Punkt  $(1, 0, 0) \in Q$  lautet die Taylorentwicklung

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2 \cdot (x_1 - 1) = 0.$$

<sup>18</sup>Punkte und Geraden sehen wir hier nicht als Flächen an.

<sup>19</sup>Wir können über den komplexen Zahlen statt über den reellen Zahlen arbeiten. Dann ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra jedes homogene Polynom vom Grad zwei Produkt zweier linearer homogener Polynome, z.B.  $x_2^2 + x_3^2 = (x_2 - \sqrt{-1} \cdot x_3)(x_2 + \sqrt{-1} \cdot x_3)$ . Unser Argument zeigt somit, dass jeder Punkt auf einer komplexen Quadrik auf einer Geraden liegt. Jede Quadrik über den komplexen Zahlen ist also eine Regelfläche.

Die Tangentialebene an  $Q$  in  $(1, 0, 0)$  ist die Ebene

$$E := \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 1\}.$$

Die Punkte in  $E \cap Q$  sind die Punkte der Form  $(1, a_2, a_3)$  mit  $(a_2 - a_3) \cdot (a_2 + a_3) = a_2^2 - a_3^2 = 0$ . Mit

$$\gamma_{\pm} := \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 1 \wedge a_2 = \pm a_3\}$$

gilt

$$E \cap Q = \gamma_- \cup \gamma_+.$$

Für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  schneiden sowohl  $\gamma_-$  als auch  $\gamma_+$  die Ebene

$$E_{\lambda} := \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 = \lambda\}.$$

Jetzt nutzen wir die Rotationssymmetrie aus. Wenn wir die Gerade  $\gamma_-$  um die  $x_3$ -Achse rotieren lassen, dann erhalten wir genau  $Q$ . Die *ersten Geradenschar* besteht aus allen Geraden, die durch Rotation von  $\gamma_-$  um die  $x_3$ -Achse entstehen.

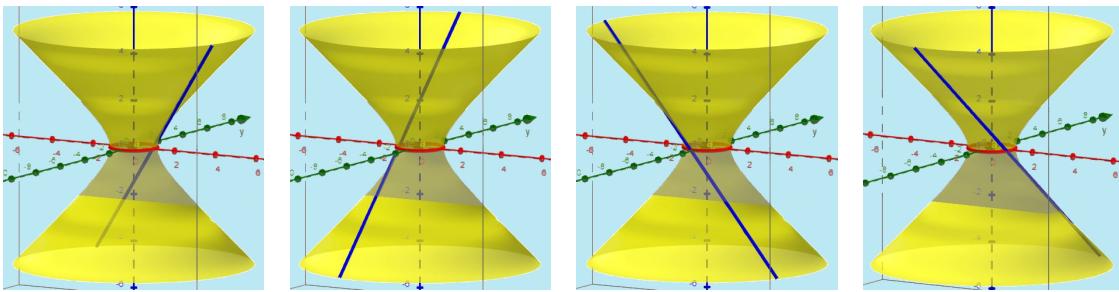


Abbildung II.8: Einige Geraden aus der ersten Geradenschar

Diese Beobachtung können wir dazu verwenden, eine Parametrisierung von  $Q$  anzugeben. Dazu verwenden wir Spaltenvektoren. Es gilt

$$\gamma_- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Rotation um die  $x_3$ -Achse um den Winkel  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

realisiert. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \varphi_- : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \lambda) &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Bijektion ist. Für festes  $\vartheta_0 \in [0, 2\pi)$  ist  $\varphi_-(\{\vartheta_0\} \times \mathbb{R})$  eine Gerade der ersten Schar, und jede Gerade der ersten Schar ist von dieser Form.

Diesmal lassen wir die Gerade  $\gamma_+$  um die  $x_3$ -Achse rotieren und überstreichen so  $Q$ . Die so erhaltenen Geraden sind die Geraden der *zweiten Geradenschar*. Mit

$$\gamma_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

gewinnen wir die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi_+ : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \lambda) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

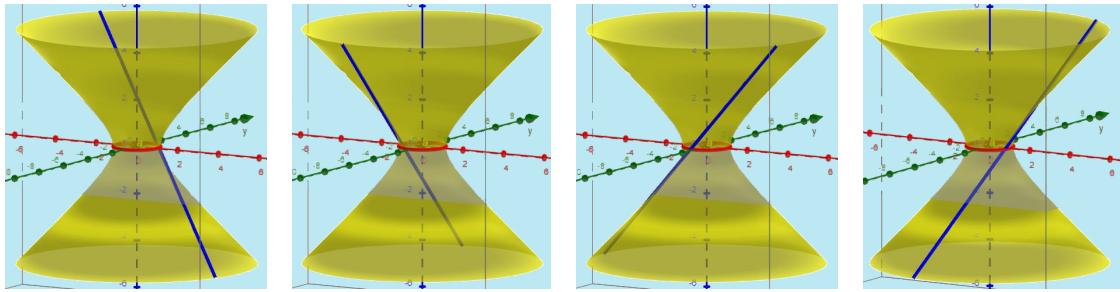
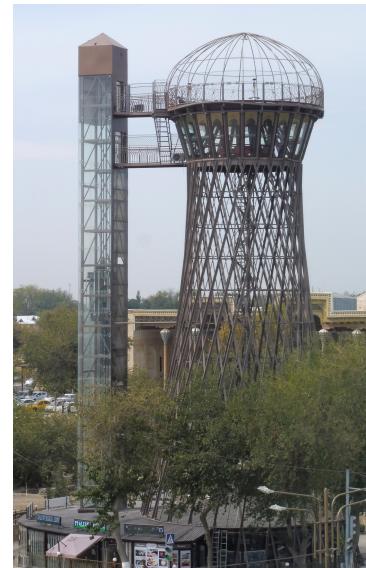


Abbildung II.9: Einige Geraden aus der zweiten Geradenschar

Der folgende Satz fasst die erzielten Ergebnisse zusammen.

**II.2.38 Satz.** Auf der Quadrik  $Q$  gibt es zwei Geradenscharen. Dabei gilt:

- i) Zwei Geraden einer Geradenschar sind entweder gleich oder disjunkt.
- ii) Jede Gerade der ersten Geradenschar schneidet jede Gerade der zweiten Schar in jeweils genau einem Punkt.
- iii) Jeder Punkt auf  $Q$  liegt auf genau einer Geraden der ersten Geradenschar und auf genau einer Geraden der zweiten Geradenschar.



**II.2.39 Bemerkungen.** Es gibt Bauwerke, an denen die Regellinien als Stilelement eingesetzt werden, z.B. den Kobe Port Tower, die Skulptur „Mae West“ in München oder den abgebildeten Wasserturm des Ingenieurs Schuchow<sup>20</sup> in Buchara, Usbekistan.

<sup>20</sup>Wladimir Grigorjewitsch Schuchow (1853 - 1939), russischer Ingenieur.

*II.2.40 Aufgabe.* Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\psi: [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \lambda) &\longmapsto (\cos(\vartheta) \cdot \cosh(\lambda), \sin(\vartheta) \cdot \cosh(\lambda), \sinh(\lambda))\end{aligned}$$

das einschalige Rotationshyperboloid

$$Q = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 1\}$$

parametrisiert.

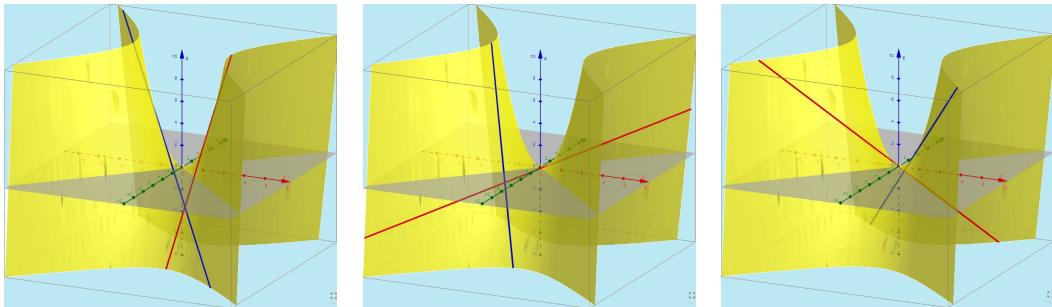


Abbildung II.10: Einige Beispiele für Geraden aus den beiden Geradenscharen

**Die hyperbolische Paraboloidschale.** Wir untersuchen  $Q = V(x_1^2 - x_2^2 - x_3)$ . Diese Quadrik hat die folgende Parametrisierung:<sup>21</sup>

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a_1, a_2) &\longmapsto (a_1 + a_2, a_1 - a_2, 4 \cdot a_1 \cdot a_2).\end{aligned}$$

Man erkennt, dass es zwei Scharen von Geraden auf  $Q$  gibt, so dass die zu II.2.38 Satz analogen Eigenschaften erfüllt sind (s. Abbildung II.10).

*II.2.41 Bemerkungen.* i) Hyperbolische Paraboloidschalen werden ebenfalls in der Baukunst eingesetzt. Man kennt sie auch als Kartoffelchips.

ii) Wenn eine Gerade  $\gamma$  in einer Fläche  $Q$  enthalten ist, dann ist sie in jedem Tangentialraum an  $Q$  in einem Punkt  $v \in \gamma$  enthalten. Gibt es also in einem glatten Punkt  $v$  der Fläche  $Q$  zwei verschiedene Geraden, die diesen Punkt passieren und in der Fläche enthalten sind, dann spannen diese Geraden den Tangentialraum an  $Q$  in  $v$  auf. Außer den Vereinigungen von Ebenen sind das einschalige Rotationshyperboloid und die hyperbolische Paraboloidschale die einzige Quadriken, so dass durch jeden Punkt der Quadrik zwei verschiedene Geraden laufen, die in der Fläche enthalten sind.

---

<sup>21</sup>Diese Quadrik ist affin äquivalent zu der Quadrik  $V(x_1 \cdot x_2 - x_3)$ . Dort ist die Parametrisierung besonders leicht zu finden.

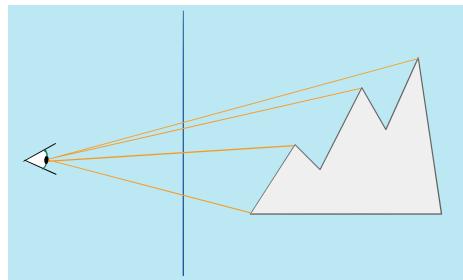
# III

## Projektive Geometrie

Betrachtet man ebene perspektivische Abbildungen des dreidimensionalen Raums, so entsteht bisweilen der Eindruck, dass sich parallele Geraden im Unendlichen schneiden. Experimentiert man weiter mit solchen perspektivischen Darstellungen, dann erkennt man z.B., dass man durch Hinzufügen eines einzigen Punkts aus einer Parabel eine Ellipse machen kann. Der projektive Raum  $\mathbb{P}^n$  ist eine „Kompaktifizierung“ des affinen Raums  $\mathbb{A}^n$ , in dem diese Aussagen präzise beweisbar sind. Die Konstruktion des projektiven Raums ermöglicht es einem, fundamentale Aussagen mit Hilfe von linearer Algebra zu beweisen. Durch seine Konstruktion ist der projektive Raum bereits mit einer Symmetriegruppe ausgestattet, nämlich der projektiven linearen Gruppe. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie klärt, durch welche Eigenschaften diese Symmetriegruppe charakterisiert ist. Zu den Größen, die invariant unter der Wirkung der projektiven linearen Gruppe sind, gehört das Doppelverhältnis. Es hat eine interessante technische Anwendung.

### III.1 Perspektivische Abbildungen

Möchte man ein Bild eines dreidimensionalen Objekts, z.B. einer Landschaft oder eines Gebäudes, auf einer Zeichenebene festhalten, so ist das Prinzip ganz einfach. Man fixiert die Zeichenebene  $E$  und nimmt einen Beobachtungspunkt  $O$  ein. Man visiert mit dem Auge einen Punkt  $P$  auf dem darzustellenden Objekt an. Der Punkt  $Q$ , in dem die gedachte Gerade durch  $O$  und  $P$  die Zeichenebene  $E$  schneidet, ist der Punkt, der  $P$  auf unserem Bild darstellt.

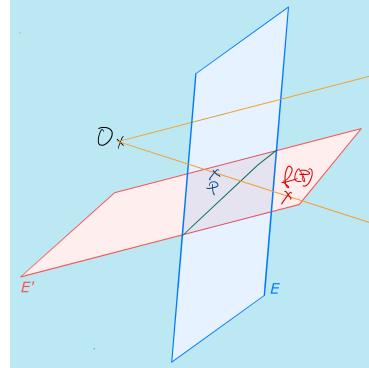


An dieser Stelle scheint die Äquivalenzrelation III.2.1 der projektiven Geometrie schon ein bisschen durch, denn alle Punkte, die auf derselben in  $O$  beginnenden Halbgerade liegen, sind auf der Zeichenebene ununterscheidbar. Allerdings werden in III.2.1 Definition ganze Geraden und nicht nur Halbgeraden identifiziert.

Man kann nun die Zeichengerade und den Beobachtungspunkt variieren und erhält so verschiedene Abbilder desselben Objekts. Ändert man den Beobachtungspunkt von  $O$  zu  $O'$ , so gibt es Punkte  $P$  und  $Q$  im Raum, die mit  $O$  auf einer gemeinsamen Geraden liegen aber nicht mit  $O'$ . Im ersten Bild sind sie nicht unterscheidbar, im zweiten Bild erscheinen Sie als verschiedene Punkte. Dieses Phänomen wollen wir außer Acht lassen und diskutieren nur den Fall zweier verschiedener Positionen der Zeichenebene.

### III.1.1 Heuristische Diskussion perspektivischer Abbildungen

Wir fixieren nun einen Punkt  $O \in \mathbb{R}^3$  und zwei Ebenen  $E \subset \mathbb{R}^3$  und  $E' \subset \mathbb{R}^3$  und nehmen dabei an, dass  $E$  und  $E'$  nicht parallel sind, sondern sich in einer Geraden schneiden, und  $O$  auf keiner der Ebenen liegt. Wir möchten eine Korrespondenz zwischen  $E$  und  $E'$  herstellen. Sie ergibt sich, grob gesagt, dadurch, dass wir  $E$  auf  $E'$  darstellen. Das bedeutet, wir nehmen einen Punkt  $P \in E$ , zeichnen die Gerade durch  $O$  und  $P$  und ordnen  $P$  den Schnittpunkt  $f(P)$  dieser Gerade mit  $E'$  zu.



Wir erkennen sofort ein Problem. Wenn nämlich die Gerade durch  $O$  und  $P$  parallel zur Ebene  $E'$  verläuft, dann schneidet sie  $E'$  nicht, und  $f(P)$  ist nicht definiert. Ebenso hat ein Punkt  $Q$  auf der Ebene  $E'$  kein Urbild, wenn die Gerade durch  $O$  und  $Q$  parallel zur Ebene  $E$  ist. Die Abbildung  $f$  ist außerhalb einer Geraden  $\gamma \subset E$  definiert. Wir schreiben daher

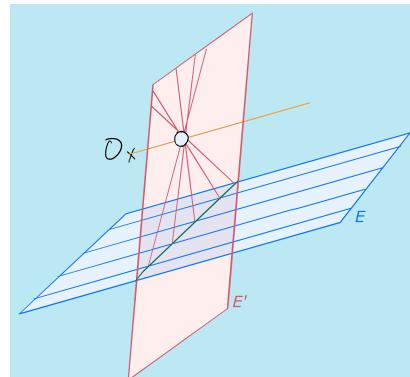
$$f: E \dashrightarrow E'.$$

Es stellt sich die natürliche Frage, ob man die Ebenen  $E$  und  $E'$  so zu Objekten  $\overline{E}$  und  $\overline{E}'$  erweitern kann, dass  $f$  eine bijektive Abbildung

$$\overline{f}: \overline{E} \longrightarrow \overline{E}'$$

induziert. Die folgenden Beobachtungen liefern zusätzliche Intuition und Motivation, diese Frage zu untersuchen, und illustrieren, dass in gewisser Weise Punkte „im Unendlichen“ zu fehlen scheinen. Wir empfehlen dem Leser bzw. der Leserin, die folgenden Illustrationen selbstständig nachzuvollziehen.

Es sei  $\ell \subset \mathbb{R}^3$  eine Gerade, die parallel zur Ebene  $E$  verläuft und den Punkt  $O$  enthält. Weiter sei  $R$  der Punkt, in dem diese Gerade die Ebene  $E'$  schneidet. Die Schar der Geraden in der Ebene  $E$ , die parallel zu  $\ell$  verlaufen, wird dann auf die Schar der Geraden in  $E'$  abgebildet, die sich im Punkt  $R$  schneiden. Der Punkt  $R$  liegt natürlich nicht im Bild der Korrespondenz  $f: E \dashrightarrow E'$ . Dieses Bild könnte Ihnen noch aus dem Kunstunterricht bekannt sein. Es stellt nämlich die Fluchtpunktperspektive mit einem zentralen Fluchtpunkt dar.



Die Ebene, die parallel zu  $E'$  ist und den Punkt  $O$  enthält, schneidet die Ebene  $E$  in einer Geraden  $\gamma$ .<sup>1</sup> Diese Gerade teilt die Ebene  $E$  in zwei Hälften. Eine Ellipse  $K \subset E$ ,

<sup>1</sup>Dies ist genau die Gerade, in der  $f$  nicht definiert ist, sozusagen der Horizont.

die  $\gamma$  in einem Punkt berührt, erscheint in  $E'$  als Parabel. Eine Ellipse  $K \subset E$ , die  $\gamma$  in zwei verschiedenen Punkten schneidet, erscheint in  $E'$  als Hyperbel.

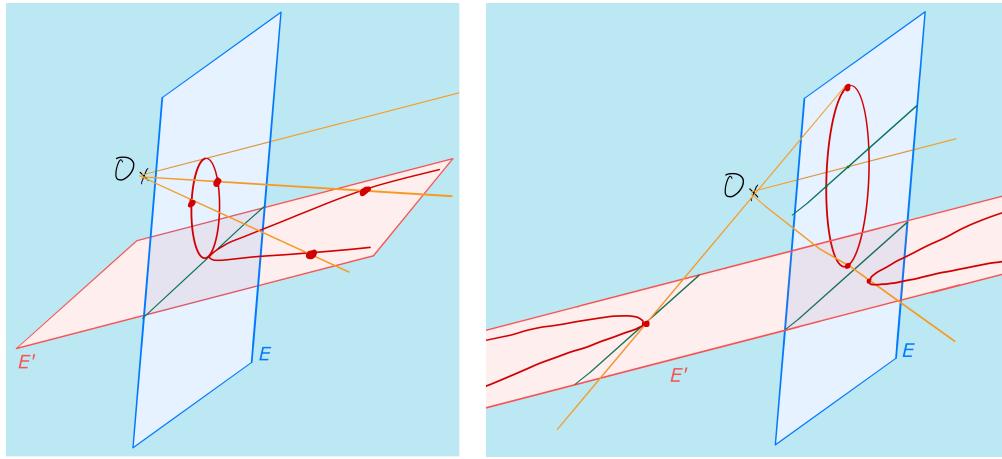
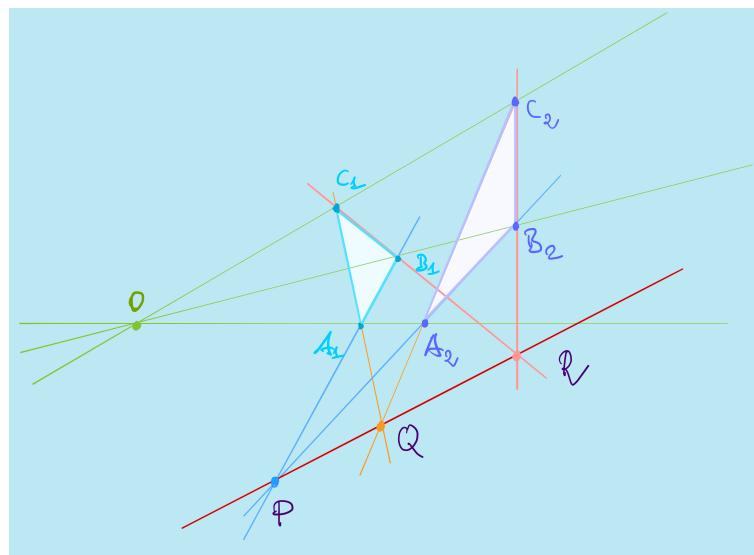


Abbildung III.1: Korrespondenzen zwischen verschiedenen Typen von Koniken

Die Bilder suggerieren, dass Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln in der Geometrie, die wir suchen, zusammenfallen. Genauer gesagt, scheint durch das Hinzufügen eines unendlich fernen Punkts aus einer Parabel eine Ellipse zu werden, und durch das Hinzufügen zweier unendlich ferner Punkte aus einer Hyperbel eine Ellipse.

### III.1.2 Der Satz von Desargues

Der Satz von Desargues<sup>2</sup> beschreibt Eigenschaften gewisser Konfigurationen von Punkten und Geraden in der Ebene. Er spielt in der axiomatischen Geometrie eine wichtige Rolle. Wir gehen darauf in III.4.6 Bemerkung ein, nachdem wir die Version des Satzes von Desargues in der projektiven Ebene (III.4.5 Satz) formuliert und bewiesen haben.



<sup>2</sup>Gérard Desargues (1591 - 1661), französischer Architekt und Mathematiker.

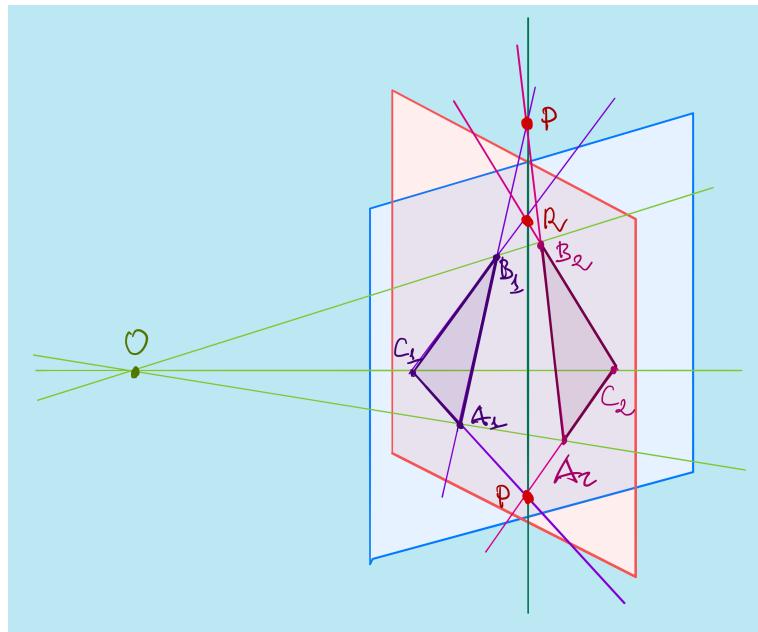
**III.1.1 Der Satz von Desargues in der affinen Ebene.** Gegeben seien sechs Punkte  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , von denen keine drei auf einer Geraden liegen.<sup>3</sup> Es wird vorausgesetzt, dass sich die Gerade durch  $A_1$  und  $A_2$ , die Gerade durch  $B_1$  und  $B_2$  und die Gerade durch  $C_1$  und  $C_2$  in einem Punkt  $O$  schneiden, die Gerade durch  $A_1$  und  $B_1$  und die Gerade durch  $A_2$  und  $B_2$  in einem Punkt  $P$ , die Gerade durch  $A_1$  und  $C_1$  und die Gerade durch  $A_2$  und  $C_2$  in einem Punkt  $Q$  und die Gerade durch  $B_1$  und  $C_1$  und die Gerade durch  $B_2$  und  $C_2$  in einem Punkt  $R$ . Dann liegen die Punkte  $P, Q$  und  $R$  auf einer Geraden.

Um den Satz plausibel zu machen, benutzen wir die Projektion

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a_1, a_2, a_3) &\longmapsto (a_1, a_2)\end{aligned}$$

und nehmen an, dass die im Satz angegebene Konfiguration die Projektion einer Konfiguration im Raum ist. Wir nehmen also an, dass wir sechs verschiedene Punkte  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  im Raum  $\mathbb{R}^3$  gegeben haben, so dass weder  $A_1, B_1$  und  $C_1$  noch  $A_2, B_2$  und  $C_2$  auf einer Geraden liegen. Weiter sollen sich die Gerade durch  $A_1$  und  $A_2$ , die Gerade durch  $B_1$  und  $B_2$  und die Gerade durch  $C_1$  und  $C_2$  in einem Punkt  $O$  schneiden. Schließlich nehmen wir an, dass sich die Gerade durch  $A_1$  und  $B_1$  und die Gerade durch  $A_2$  und  $B_2$  in einem Punkt  $P$  schneiden, die Gerade durch  $A_1$  und  $C_1$  und die Gerade durch  $A_2$  und  $C_2$  in einem Punkt  $Q$  und die Gerade durch  $B_1$  und  $C_1$  und die Gerade durch  $B_2$  und  $C_2$  in einem Punkt  $R$ .

Die Punkte  $A_1, B_1$  und  $C_1$  spannen eine Ebene  $E_1$  auf und die Punkte  $A_2, B_2$  und  $C_2$  eine Ebene  $E_2$ , und wir setzen weiter voraus, dass  $E_1 \neq E_2$ . Unter der perspektivischen Abbildung  $f: E_1 \dashrightarrow E_2$ , die durch  $O$  gegeben ist, wird das Dreieck mit den Ecken  $A_1, B_1$  und  $C_1$  auf das Dreieck mit den Ecken  $A_2, B_2$  und  $C_2$  abgebildet.



<sup>3</sup>Die Punkte  $A_1, B_1$  und  $C_1$  sowie  $A_2, B_2$  und  $C_2$  sind also jeweils die Ecken eines Dreiecks.

Der Punkt  $P$  liegt auf der Geraden durch  $A_1$  und  $B_1$  und damit in der Ebene  $E_1$ . Ebenso liegt er auf der Geraden durch  $A_2$  und  $B_2$  und damit in der Ebene  $E_2$ . Folglich liegt  $P$  auf der Geraden  $\gamma := E_1 \cap E_2$ . Genauso schließen wir, dass  $Q$  und  $R$  auf der Geraden  $\gamma$  liegen. Die Bilder dieser Punkte unter  $\pi$  liegen somit auf der Geraden  $\pi(\gamma)$ .

**III.1.2 Aufgabe.** Beweisen Sie, dass eine Konfiguration wie in III.1.1 Satz als Projektion unter  $\pi$  einer Konfiguration im Raum wie oben beschrieben erhalten werden kann, so dass wir in der Tat einen exakten Beweis geführt haben.

## III.2 Die Projektivierung eines Vektorraums

Es seien  $k$  ein Körper und  $V \neq \{0\}$  ein nicht-trivialer  $k$ -Vektorraum. Dann ist der zugehörige *projektive Raum*  $\mathbb{P}(V)$  die Menge aller Geraden in  $V$ , die durch den Ursprung gehen. Die Bildung dieser Menge ist nach den Axiomen der Mengenlehre (vgl. [37], Abschnitt 1.2) zulässig. Wir werden jetzt eine andere Definition besprechen, die für die Beschreibung vieler Eigenschaften der Projektivierung besser geeignet ist.

Eine *Gerade durch den Ursprung* ist ein linearer Teilraum  $\gamma \subset V$  der Dimension eins. Für einen nicht-trivialen Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  ist die *durch  $v$  aufgespannte Gerade* die Teilmenge

$$\gamma_v := \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in k\}.$$

Offenbar ist jede Gerade  $\gamma$  durch den Ursprung in  $V$  von der Form  $\gamma_v$  für einen geeigneten Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$ . Genauer gilt

$$\forall v \in V \setminus \{0\} : \gamma_v = \gamma \iff v \in \gamma.$$

Es seien nun  $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$  zwei Vektoren. Wenn  $\gamma_{v_1} = \gamma_{v_2}$ , dann gilt insbesondere  $v_1 \in \gamma_{v_2}$ , so dass es eine Zahl  $\lambda \in k$  mit  $v_1 = \lambda \cdot v_2$  gibt. Da  $v_1 \neq 0$ , muss  $\lambda \neq 0$  gelten.

**III.2.1 Definition.** Auf  $V \setminus \{0\}$  sei die Relation „ $\sim$ “ durch

$$\forall v_1, v_2 \in V \setminus \{0\} : v_1 \sim v_2 \iff \exists \lambda \in k \setminus \{0\} : v_1 = \lambda \cdot v_2$$

festgelegt.

Es ist leicht zu überprüfen, dass „ $\sim$ “ eine Äquivalenzrelation ist. Für einen Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  bezeichnen wir seine Äquivalenzklasse bzgl. „ $\sim$ “ mit  $[v]$ . Wie üblich setzen wir  $k^* := k \setminus \{0\}$ .

**III.2.2 Bemerkung.** Es ist

$$\begin{aligned} \sigma : (V \setminus \{0\}) \times k^* &\longrightarrow V \setminus \{0\} \\ (v, \lambda) &\longmapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

eine Wirkung von rechts der multiplikativen Gruppe  $(k^*, \cdot)$  des Körpers  $k$  auf die Menge  $V \setminus \{0\}$ .<sup>4</sup> Die obige Äquivalenzrelation ist dann die Äquivalenzrelation, die durch diese Gruppenwirkung wie in [36], II.6.7 Definition und II.6.8 Lemma, beschrieben induziert ist. Daher bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen mit

$$(V \setminus \{0\})/k^*.$$

---

<sup>4</sup>Da  $(k^*, \cdot)$  eine abelsche Gruppe ist, können wir  $\sigma$  auch als Linkswirkung ansehen (vgl. [36], II.6.23 Aufgabe).

Unsere Betrachtungen zeigen das Folgende.

### III.2.3 Lemma. Die Abbildung

$$(V \setminus \{0\})/k^{\star} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

$$[v] \longmapsto \gamma_v$$

ist eine Bijektion.

Wir haben die Projektionsabbildung

$$\pi: V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

$$v \longmapsto [v] = \gamma_v.$$

Für eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{P}(V)$  ist

$$\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$$

der *affine Kegel* über  $X$ .

Wenn  $U \subset V$  ein linearer Teilraum ist, dann ist jede Gerade durch den Ursprung in  $U$  in  $V$  enthalten und dort ebenfalls eine Gerade durch den Ursprung, d.h.,  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ . Mit der Bijektion aus III.2.3 Lemma gilt

$$\mathbb{P}(U) = \{ [u] \in \mathbb{P}(V) \mid u \in U \setminus \{0\} \}.$$

Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{P}(V)$  ist ein *linearer Unterraum*, wenn es einen linearen Teilraum  $U \subset V$  gibt, so dass  $X = \mathbb{P}(U)$ . Die *Dimension* von  $X$  ist

$$\dim(X) := \dim_k(U) - 1.$$

Demnach ist  $\dim_k(V) - 1$  die Dimension von  $\mathbb{P}(V)$ . Wir schreiben  $\mathbb{P}_k^n := \mathbb{P}(k^{n+1})$  und nennen  $\mathbb{P}_k^n$  den *n-dimensionalen projektiven Raum*. Lineare Teileräume der Dimension eins von  $\mathbb{P}(V)$  heißen *Geraden*, zweidimensionale *Ebenen*. Für  $(a_0, \dots, a_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$  schreiben wir<sup>5</sup>

$$[a_0 : \cdots : a_n] := [(a_0, \dots, a_n)].$$

Man nennt dies die *homogenen Koordinaten* des Punkts.

### III.2.4 Lemma. Zwei verschiedene Punkte $p_1, p_2 \in \mathbb{P}(V)$ liegen auf genau einer Geraden.

*Beweis.* Geraden in  $\mathbb{P}(V)$  stehen in Bijektion zu zweidimensionalen linearen Teileräumen von  $V$ .

Es sei  $v_i \in V \setminus \{0\}$  ein Vektor mit  $p_i = [v_i]$ ,  $i = 1, 2$ . Die Bedingung  $p_1 \neq p_2$  ist äquivalent dazu, dass  $v_1$  und  $v_2$  in  $V$  linear unabhängig sind. Der von  $v_1$  und  $v_2$  aufgespannte lineare Teilraum  $\langle v_1, v_2 \rangle$  ist somit zweidimensional und der einzige zweidimensionale lineare Teilraum von  $V$ , der  $v_1$  und  $v_2$  enthält.  $\square$

<sup>5</sup>Sehen wir die Elemente von  $k^n$  als Spaltenvektoren an, dann schreiben wir ebenfalls

$$[a_0 : \cdots : a_n] := [(a_0, \dots, a_n)^t], \quad (a_0, \dots, a_n)^t \in k^{n+1} \setminus \{0\}.$$

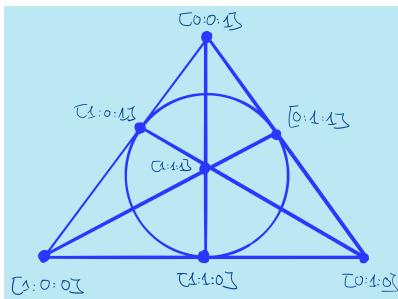
**III.2.5 Satz.** Zwei verschiedene Geraden  $\gamma_1, \gamma_2$  in der projektiven Ebene  $\mathbb{P}_k^2$  schneiden sich in genau einem Punkt.

*Beweis.* Es sei  $U_i \subset V$  der zweidimensionale lineare Teilraum, der der Geraden  $\gamma_i$  entspricht,  $i = 1, 2$ , und  $U_1 + U_2 \subset k^3$  der kleinste lineare Teilraum, der  $U_1$  und  $U_2$  enthält ([41], Definitionen III.2.1). Wegen  $U_1 \neq U_2$  gilt  $U_1 \subsetneq U_1 + U_2$ . Da  $U_1$  zweidimensional ist, muss  $U_1 + U_2$  (mindestens) dreidimensional sein, d.h.,  $U_1 + U_2 = k^3$ . Aus der Dimensionsformel ([41], Aufgabe III.5.49)

$$\dim_k(U_1 + U_2) = \dim_k(U_1) + \dim_k(U_2) - \dim_k(U_1 \cap U_2)$$

folgt, dass  $U_1 \cap U_2$  ein eindimensionaler Teilraum ist. Er definiert den Schnittpunkt von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ . Die Eindeutigkeit ist klar.  $\square$

**III.2.6 Aufgabe.** Es sei  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  der Körper mit zwei Elementen. Die Punkte der projektiven Ebene  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ <sup>6</sup> werden in einen Graphen eingetragen.



Drei Punkte liegen in dem Bild dabei auf einer Geraden oder dem Kreis, wenn sie auf einer Geraden in der projektiven Ebene liegen.

Bei einer Lotterie werden 3 Zahlen aus der Menge  $\{1, \dots, 14\}$  gezogen. Man gewinnt, wenn man mindestens zwei Zahlen richtig tippt. Geben Sie eine Menge von 14 Tippereihen an, so dass Sie bei einer Ziehung auf jeden Fall gewinnen.

**Hinweis.** Nummerieren Sie die Punkte im Graphen der Ebene auf zwei Weisen neu, und verwenden Sie die Geraden.

**III.2.7 Aufgaben.** Es seien  $V$  ein dreidimensionaler  $k$ -Vektorraum und  $V^\vee := \text{Hom}_k(V, k)$  sein Dualraum ([41], Definitionen IV.2.1, i).

a) Erklären Sie, wieso die Projektivierung  $\mathbb{P}(V^\vee)$  Geraden in der projektiven Ebene  $\mathbb{P}(V)$  parametrisiert. Geben Sie dazu eine Vorschrift  $P \mapsto \ell_P$  an, die einem Punkt  $P \in \mathbb{P}(V^\vee)$  eine Gerade  $\ell_P \subset \mathbb{P}(V)$  zuordnet. Beschreiben Sie auch die Umkehrabbildung, die einer Gerade  $\ell \subset \mathbb{P}(V)$  einen Punkt  $P_\ell \in \mathbb{P}(V^\vee)$  zuordnet.

b) Für  $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$  sei

$$\gamma_P := \{ [\chi] \in \mathbb{P}(V^\vee) \mid \chi(v) = 0 \}.$$

Weisen Sie nach, dass  $\gamma_P \subset \mathbb{P}(V^\vee)$  eine Gerade ist und dass  $P \mapsto \gamma_P$  eine Bijektion zwischen  $\mathbb{P}(V)$  und der Menge der Geraden in  $\mathbb{P}(V^\vee)$  induziert.

c) Gegeben seien ein Punkt  $A \in \mathbb{P}(V)$  und eine Gerade  $\ell \subset \mathbb{P}(V)$ . Zeigen, Sie dass genau dann  $A \in \ell$  gilt, wenn  $\gamma_A \ni P_\ell$  erfüllt ist. Folgern Sie, dass für zwei verschiedene Punkte  $A, B \in \mathbb{P}(V)$  und ihre Verbindungsgerade  $\ell := \overline{AB}$  der Punkt  $P_\ell$  der Schnittpunkt der Geraden  $\gamma_A$  und  $\gamma_B$  ist.

**Bemerkung.** Die Bedeutung dieser Beobachtungen liegt darin, dass jede Aussage, die Punkte und Geraden in der projektiven Ebene betrifft eine duale Aussage hat (vgl. III.6.11 Aufgabe, i), in der Punkte und Geraden ihre Rollen tauschen und Schnittpunkte in Verbindungsgeraden und umgekehrt übergehen.

<sup>6</sup>Diese projektive Ebene heißt *Fano-Ebene*, nach dem italienischen Mathematiker Gino Fano (1871 - 1952).

### III.2.1 Die projektive lineare Gruppe

Es seien  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $k$  und  $\mathrm{GL}(V) := \{\varphi: V \rightarrow V \mid \varphi \text{ ist bijektiv und linear}\}$  die allgemeine lineare Gruppe. Wir betrachten die Linkswirkung (vgl. [36], II.6.3 Beispiele, ii)

$$\begin{aligned}\sigma: \mathrm{GL}(V) \times V &\longrightarrow V \\ (\varphi, v) &\longmapsto \varphi(v).\end{aligned}$$

Es gilt

$$\forall \varphi \in \mathrm{GL}(V), \forall v \in V, \forall \lambda \in k: \quad \varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v).$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}: \mathrm{GL}(V) \times \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ (\varphi, [v]) &\longrightarrow [\varphi(v)]\end{aligned}$$

wohldefiniert. Es handelt sich ebenfalls um eine Linkswirkung. Die Teilmenge

$$Z(\mathrm{GL}(V)) := \{\lambda \cdot \mathrm{id}_V \mid \lambda \in k^\star\}$$

ist eine Untergruppe, die im Zentrum<sup>7</sup> enthalten ist.<sup>8</sup> Eine Untergruppe des Zentrums ist normal ([36], II.9.6 Beispiele, ii), so dass die Quotientengruppe ([36], II.9.4 Satz) definiert ist. In unserem Fall heißt die Quotientengruppe

$$\mathrm{PGL}(V) := \mathrm{GL}(V)/Z(\mathrm{GL}(V))$$

die *projektive lineare Gruppe*.<sup>9</sup>

Analog ist für  $n \in \mathbb{N}$  die *projektive lineare Gruppe*

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(k) := \mathrm{GL}_{n+1}(k)/\{\lambda \cdot \mathrm{id}_{n+1} \mid \lambda \in k^\star\}$$

<sup>7</sup>Dies sind die Abbildungen  $\zeta \in \mathrm{GL}(V)$ , so dass  $\zeta \circ \varphi = \varphi \circ \zeta$  für alle  $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$  gilt (vgl. [36], II.6.17 Definitionen, iv).

<sup>8</sup>In der Tat ist dies genau das Zentrum von  $\mathrm{GL}(V)$ . Dazu seien  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$  und  $\zeta \in \mathrm{GL}(V)$  ein Element aus dem Zentrum. Es gebe einen Vektor  $v \in V$ , der kein Eigenvektor von  $\zeta$  ist, d.h.,  $w := \zeta(v) \notin \langle v \rangle$ . Wir können annehmen, dass es Indizes  $i, j \in I$  gibt, so dass  $v = v_i$  und  $w = v_j$ . Es sei  $\psi_1: V \rightarrow V$  die lineare Abbildung mit  $\psi_1(v) = w$ ,  $\psi_1(w) = v$  und  $\psi_1(v_k) = v_k$ ,  $k \in I \setminus \{i, j\}$ , und  $\psi_2: V \rightarrow V$  die lineare Abbildung mit  $\psi_2(v) = w$ ,  $\psi_2(w) = v + w$  und  $\psi_2(v_k) = v_k$ ,  $k \in I \setminus \{i, j\}$ . Dann

$$\begin{aligned}\zeta(w) &= \zeta(\psi_1(v)) = \psi_1(\zeta(v)) = \psi_1(w) = v, \\ \zeta(w) &= \zeta(\psi_2(v)) = \psi_2(\zeta(v)) = \psi_2(w) = v + w.\end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass jeder Vektor  $v \in V$  ein Eigenvektor von  $\zeta$  sein muss. Nun gebe es Zahlen  $\lambda, \mu \in k^\star$  mit  $\lambda \neq \mu$  und Vektoren  $v, w \in V \setminus \{0\}$  mit  $\zeta(v) = \lambda \cdot v$  und  $\zeta(w) = \mu \cdot w$ . Dann sind  $v$  und  $w$  linear unabhängig. Nun ist  $v + w$  auch ein Eigenvektor. Es gibt also eine Zahl  $\alpha \in k^\star$  mit  $\zeta(v + w) = \alpha \cdot (v + w)$ . Damit gilt

$$\alpha \cdot (v + w) = \zeta(v + w) = \zeta(v) + \zeta(w) = \lambda \cdot v + \mu \cdot w,$$

d.h.,

$$(\alpha - \lambda) \cdot v = (\mu - \alpha) \cdot w.$$

Das ist offenbar unmöglich.

<sup>9</sup>Es sei  $\mathrm{End}(V) := \{\psi: V \rightarrow V \mid \psi \text{ ist linear}\}$ . Man beachte, dass  $\mathrm{PGL}(V)$  eine Teilmenge von  $\mathbb{P}(\mathrm{End}(V))$  ist. Damit ist auch die Notation mit den eckigen Klammern definiert.

definiert.<sup>10</sup>

Man beachte, dass die Gruppe  $Z(GL(V))$  trivial auf den projektiven Raum  $\mathbb{P}(V)$  wirkt. Nach unseren Überlegungen sind

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} : \mathrm{PGL}(V) \times \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ ([\varphi], [v]) &\longmapsto [\varphi(v)]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\bar{\tau} : \mathrm{PGL}_{n+1}(k) \times \mathbb{P}_k^n &\longrightarrow \mathbb{P}_k^n \\ ([A], [v]) &\longmapsto [A \cdot v]\end{aligned}$$

wohldefinierte Abbildungen und Linkswirkungen.

*III.2.8 Bemerkung.* Es wirkt jetzt kein Element  $\varphi \in \mathrm{PGL}(V)$  mehr trivial auf  $\mathbb{P}(V)$ .

Zwei Teilmengen  $X, Y \subset \mathbb{P}(V)$  heißen *projektiv äquivalent*, wenn es eine projektive Transformation  $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$  mit

$$\varphi(X) = Y$$

gibt.

## III.3 Die projektive Ebene

Wir beschränken uns jetzt auf die Betrachtung des zweidimensionalen projektiven Raums  $\mathbb{P}_k^2$  über dem Körper  $k$  und nennen  $\mathbb{P}_k^2$  die *projektive Ebene*. Auch die *projektive Gerade*  $\mathbb{P}_k^1$  wird eine gewisse Rolle spielen.

### III.3.1 Einbettung der affinen Ebene

Wir definieren

$$U_0 := \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid a_0 \neq 0\} = \{[1 : b_1 : b_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid (b_1, b_2) \in k^2\}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\iota_0 : k^2 &\longrightarrow U_0 \\ (b_1, b_2) &\longmapsto [1 : b_1 : b_2]\end{aligned}$$

eine Bijektion. Diese Bijektion kommt dadurch zustande, dass  $k^2$  als die Ebene  $E := \{(a_0, a_1, a_2) \in k^3 \mid a_0 = 1\}$  in  $k^3$  eingebettet wird und dann vermöge der Projektion  $\pi : k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}_k^2$  in die projektive Ebene abgebildet wird. In der Tat schneidet jede Gerade  $\gamma \subset k^3$ , die nicht in der Ebene  $\{(a_0, a_1, a_2) \in k^3 \mid a_0 = 0\}$  liegt und damit in  $U_0$ , die Ebene in genau einem Punkt. Der Unterraum  $Z_0 := \{(a_0, a_1, a_2) \in k^3 \mid a_0 = 0\}$  definiert die Gerade  $\mathbb{P}(Z_0) \subset \mathbb{P}_k^3$ , und es gilt

$$\mathbb{P}_k^2 = U_0 \cup \mathbb{P}(Z_0).$$

Man nennt  $\mathbb{P}(Z_0)$  die *unendlich ferne Gerade*.

---

<sup>10</sup>In diesem Fall gilt  $\mathrm{PGL}_{n+1}(k) \subset \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{n+1}(k))$ .

**III.3.1 Aufgabe.** Es sei

$$A := \{ [g] \in \mathrm{PGL}_3(k) \mid [g] \cdot U_0 = U_0 \}.$$

Die Gruppe wirkt auf  $k^2$  vermöge

$$\begin{aligned} A \times k^2 &\longrightarrow k^2 \\ ([g], u) &\longrightarrow \iota_0^{-1}(\bar{\tau}([g], \iota_0(u))). \end{aligned}$$

Verwenden Sie diese Gruppenwirkung, um einen Isomorphismus zwischen  $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}_k^2)$  und  $A$  anzugeben.

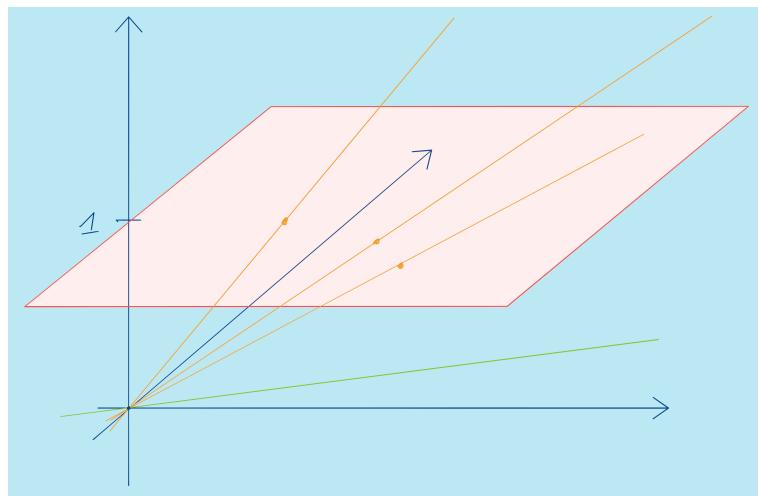
Analog erklären wir

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{ [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid a_1 \neq 0 \} = \{ [b_0 : 1 : b_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid (b_0, b_2) \in k^2 \}, \\ U_2 &:= \{ [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid a_2 \neq 0 \} = \{ [b_0 : b_1 : 1] \in \mathbb{P}_k^2 \mid (b_0, b_1) \in k^2 \}. \end{aligned}$$

Wir haben die Bijektionen  $\iota_i: k^2 \longrightarrow U_i$ ,  $i = 1, 2$ , und es gilt

$$\mathbb{P}_k^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2.$$

Das folgende Bild illustriert die Abbildung  $\iota_2: k^2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{P}_k^2$ ,  $(b_0, b_1) \mapsto [b_0 : b_1 : 1]$ .



### III.3.2 Zur Geometrie der reellen projektiven Ebene

In diesem Abschnitt arbeiten wir über dem Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen und wollen das Objekt  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , das wir erschaffen haben, genauer verstehen. Dazu sei

$$S^2 := \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1 \} = \{ (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1 \}$$

die zweidimensionale Sphäre. Für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  gilt

$$\frac{v}{\|v\|} \in S^2,$$

d.h. jeder Vektor in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ist zu einem Vektor in der Sphäre  $S^2$  äquivalent. Weiter gilt

$$\forall v, w \in S^2 : \quad v \sim w \iff (v = w) \vee (v = -w).$$

Die Abbildung

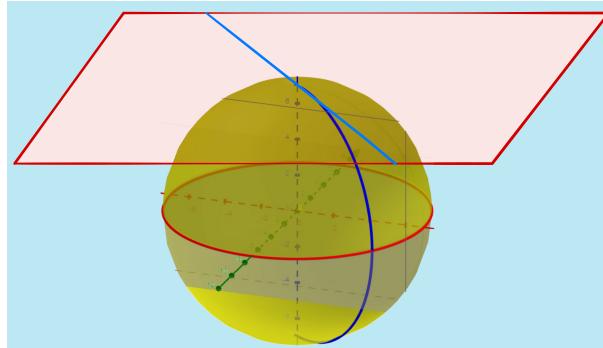
$$\begin{aligned} a: S^2 &\longrightarrow S^2 \\ v &\longmapsto -v \end{aligned}$$

nennt man *Antipodenabbildung*. Wir haben somit eine surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}: S^2 &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \\ v &\longmapsto [v], \end{aligned}$$

und die beiden Urbilder von  $[w] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  sind die Antipoden  $\pm w$ .

*III.3.2 Bemerkungen.* i) Als Zwischenschritt zum Verständnis der Einbettung der affinen Ebene in die projektive Ebene, die wir in Abschnitt III.3.1 besprochen haben, beschreiben wir die Teilmengen der Sphäre, die den Geraden in  $\mathbb{R}^2$  entsprechen. Dazu betten wir  $\mathbb{R}^2$  wieder als Ebene  $E = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_2 = 1\}$  in  $\mathbb{R}^3$  ein. Für eine Gerade  $\gamma \subset E$  seien  $E_{\gamma} \subset \mathbb{R}^3$  die Ebene, die  $\gamma$  und den Ursprung  $(0, 0, 0)$  enthält, und  $\sigma_{\gamma} := E_{\gamma} \cap S^2$ . (Ein solches Objekt nennt man einen *Großkreis*.)



Der Durchschnitt von  $\sigma_{\gamma}$  mit dem Äquator besteht aus zwei Antipoden  $p_{\gamma}^-$  und  $p_{\gamma}^+$ . Nun gilt

$$\iota_0(\gamma) = \tilde{\pi}(\sigma_{\gamma} \setminus \{p_{\gamma}^-, p_{\gamma}^+\}).$$

Das Bild des Äquators unter  $\tilde{\pi}$  ist die unendlich ferne Gerade. Weiter ist

$$\tilde{\gamma} := \tilde{\pi}(\sigma_{\gamma}) = \iota_0(\gamma) \cup \tilde{\pi}(p_{\gamma}^+)$$

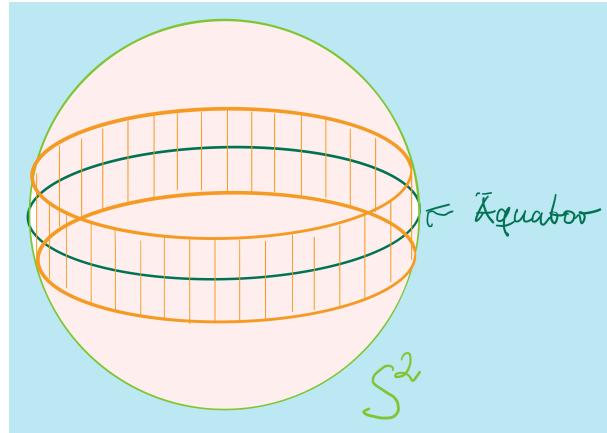
eine (projektive) Gerade in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Damit wird die affine Gerade  $\gamma$  durch den Punkt  $\tilde{\pi}(p_{\gamma}^+)$  zu einer projektiven Gerade vervollständigt, und  $\tilde{\pi}(p_{\gamma}^+)$  ist der Durchschnitt der vervollständigten Gerade mit der unendlich fernen Gerade.

ii) Da  $\mathbb{R}^3$  eine Topologie trägt ([38], 1.4.2 Beispiele, iii), erhalten  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  und  $S^2$  induzierte Topologien ([38], 1.4.2 Beispiele, iv). Auf  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  wird die sogenannte Quotiententopologie ([38], 11.A.5 Bemerkungen, ii), und 11.A.6 Beispiel) induziert. Beide Konstruktionen der projektiven Ebene führen zur selben Topologie auf  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Gemäß Definition der Quotiententopologie ist die Abbildung  $S^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  stetig. Da  $S^2$  kompakt ist

([38], 2.2.14 Satz), ist auch  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  kompakt (vgl. [38], 3.4.1 Satz<sup>11</sup>). Man beachte, dass  $\mathbb{R}^2$  nicht kompakt ist ([38], 2.2.10 Satz). Daher bezeichnen wir  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  auch als *Kompaktifizierung* von  $\mathbb{R}^2$ .

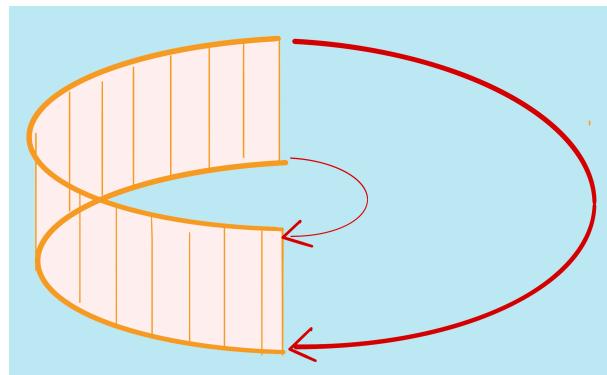
**III.3.3 Aufgabe.** Führen Sie die analoge Konstruktion für die projektive Gerade  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  durch, und erklären Sie, wie sie zu einer Identifikation  $S^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  führt.

Um diese Konstruktion der projektiven Ebene zu verstehen, bemerken wir, dass wir den Streifen  $S^1 \times [-1, 1]$  so in die Sphäre  $S^2$  einbetten können, dass  $S^1 \times \{0\}$  auf den Äquator abgebildet wird.



Es sei  $M \subset S^2$  das Bild dieser Einbettung. Um das Bild  $\tilde{M}$  von  $M$  in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  zu bestimmen, schneiden wir  $M$  mit  $\bar{\mathbb{H}} := \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_0 \leq 0\}$ . Für  $\mathbb{H} := \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_0 < 0\}$  ist  $\pi|_{M \cap \mathbb{H}}$  injektiv. Den Durchschnitt von  $M$  mit  $\mathbb{H}_0 := \bar{\mathbb{H}} \setminus \mathbb{H} = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid a_0 = 0\}$  können wir mit  $\{\pm 1\} \times [-1, 1]$  identifizieren. Die Antipodenabbildung  $a$  entspricht auf  $M \cap \mathbb{H}_0$  der Abbildung

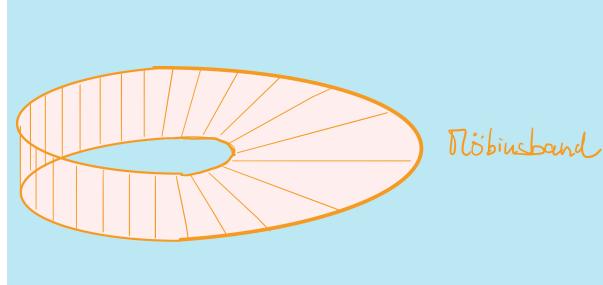
$$\begin{aligned} \{\pm 1\} \times [-1, 1] &\rightarrow \{\pm 1\} \times [-1, 1] \\ (\varepsilon, \lambda) &\mapsto (-\varepsilon, -\lambda). \end{aligned}$$



Es folgt, dass  $\tilde{M} = \tilde{\pi}(M)$  ein Möbiusband<sup>12</sup> ist (vgl. [39], 5.3.9 Beispiele, iv).

<sup>11</sup>Da der Beweis die Überdeckungseigenschaft benutzt, funktioniert er nicht nur für metrische Räume.

<sup>12</sup>August Ferdinand Möbius (1790 - 1868), deutscher Mathematiker und Astronom.



Dies impliziert.

### III.3.4 Satz. Die projektive Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ist nicht orientierbar.

*III.3.5 Bemerkung.* Der Begriff der Orientierbarkeit wird für Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  wird [39], 5.3.7 Definition, b), definiert. Er lässt sich unmittelbar auf abstrakte Mannigfaltigkeiten ([38], 11.A.3 Definition, a) übertragen. Aus der Konstruktion der projektiven Ebene kann man ableiten, dass sie die Struktur einer Mannigfaltigkeit ([38], 11.A.6 Beispiel) trägt. Die folgende Beschreibung kann helfen, diese Struktur zu erkennen.

Der Rand des Möbiusbands ist homöomorph ([38], 10.1.1 Definition) zu  $S^1$ . Das Komplement des Möbiusbands besteht aus zwei disjunkten Teilen, die beide homöomorph zur offenen Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D} := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1^2 + a_2^2 < 1\}$$

sind. Auf Grund der Äquivalenzrelation benötigen wir nur eine der beiden Scheiben. Es sei

$$\overline{\mathbb{D}} := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1^2 + a_2^2 \leq 1\} = \mathbb{D} \cup S^1.$$

Wir erkennen, dass die projektive Ebene dadurch entsteht, dass wir das Möbiusband  $\tilde{M}$  mit der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\overline{\mathbb{D}}$  entlang des Kreises  $S^1$  verkleben.

### III.3.6 Satz. Die projektive Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ lässt sich nicht in den affinen Raum $\mathbb{R}^3$ einbetten.

Unter einer *Einbettung* verstehen wir hier eine injektive stetige Abbildung  $\iota: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass das Bild  $\iota(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$  eine (topologische) Untermannigfaltigkeit ist.<sup>13</sup>

*Idee des Beweises.* Um den Satz für den eben eingeführten Begriff der Einbettung zu beweisen, benutzt man einige fortgeschrittene Konzepte und Ergebnisse der algebraischen Topologie ([43], Chapter 6, 24). Man kann jedoch fordern, dass die Einbettung zahm (in einem mathematisch präzisen Sinn) ist und dann einen anschaulichen Beweis geben. Ein solcher Beweis wird in der Arbeit [27] besprochen. Wie bereits gesehen ist der Rand  $R = \partial \tilde{M}$  ein Kreis. Zudem ist das Bild  $S$  von  $S^1 \times \{0\}$ , in der obigen Konstruktion der Äquator von  $S^2$ , ein Kreis in  $\tilde{M}$ . Wir nennen ihn den *Meridian*. Maehara beweist, dass für eine zahme Einbettung  $\eta: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  die beiden Kreise  $\eta(R)$  und  $\eta(S)$  verschlungen sind. Sie können sich die beiden Kreise  $\eta(R)$  und  $\eta(S)$  als zwei Drahtschlingen oder Gummibänder im Raum vorstellen, die sie nicht voneinander trennen können.

<sup>13</sup>Da  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  kompakt ist, ist  $\iota(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$  automatisch abgeschlossen (vgl. [38], 3.4.1 Satz) und die Abbildung  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \iota(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$  ist ein Homöomorphismus. (Da  $\iota$  abgeschlossene Teilmengen von  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  auf abgeschlossene Teilmengen von  $\iota(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$  abbildet, bildet  $\iota$  auch offene Teilmengen von  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  auf offene Teilmengen von  $\iota(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$  ab. Die behauptete Eigenschaft folgt daher aus [38], 10.1.4 Lemma.) Dabei trägt  $\iota(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$  die Teilraumtopologie.

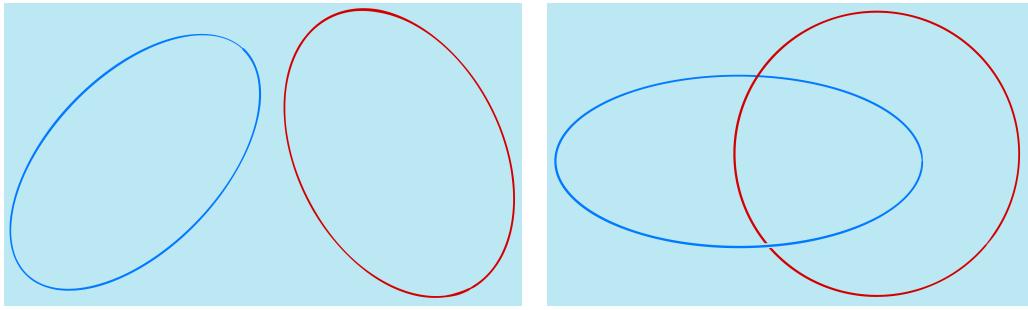
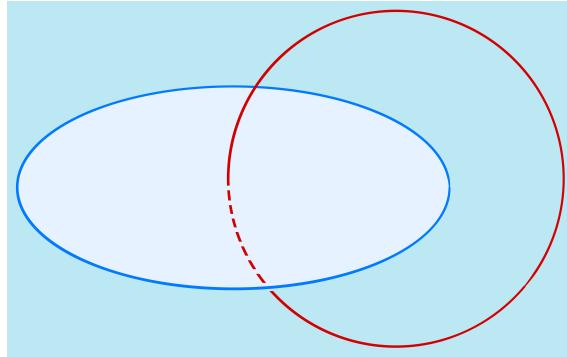


Abbildung III.2: Zwei unverschlungene (links) und zwei verschlungene (rechts) Kreise im Raum  $\mathbb{R}^3$ .

Für das „übliche“ Möbiusband, das oben oder in [39], 5.3.9 Beispiele, iv), wiedergegeben ist, kann man sich davon explizit überzeugen. Man fertige dazu ein Möbiusband aus Papier an, indem man einen Papierstreifen nimmt, ein Ende um  $180^\circ$  dreht und dann mit dem anderen Ende verklebt. Nun schneide man das Möbiusband in der Mitte durch. Es entsteht ein einzelnes geschlossenes Band. Es ist verdreht, aber orientierbar, so dass es zwei Kanten hat. Eine davon entspricht  $R$ , die andere  $S$ . Da das Band verdreht ist, sind die beiden Kanten verschlungen. Um dies zu visualisieren, schneide man das Band erneut durch. Das Ergebnis sind zwei Streifen, die ineinander eingehängt sind.

Aus dieser Verschlingungseigenschaft können wir nun folgern, dass  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  nicht (zahm) in  $\mathbb{R}^3$  eingebettet werden kann. Eine Einbettung  $\iota: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  induziert die Einbettung  $\eta := \iota_{|\tilde{M}}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  des Möbiusbands. Gemäß unserer obigen Beschreibung berandet  $R$  eine Kreisscheibe  $D$ .



Weil  $R$  und  $S$  verschlungen sind, muss  $S$  diese Kreisscheibe schneiden. Dann kann  $\iota$  aber nicht injektiv sein, da der Meridian und die Kreisscheibe in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  disjunkt sind.  $\square$

Eine *Immersion* der projektiven Ebene nach  $\mathbb{R}^3$  ist eine differenzierbare Abbildung

$$\chi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

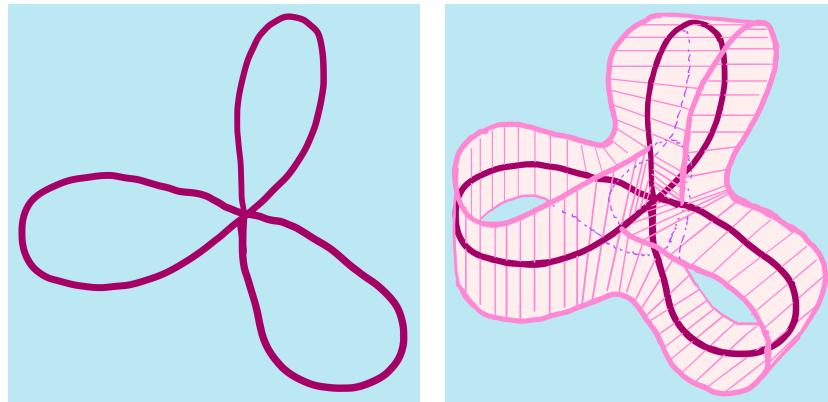
so dass für jeden Punkt  $[v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  die totale Ableitung

$$D_{\chi}([v]): T_{[v]}\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

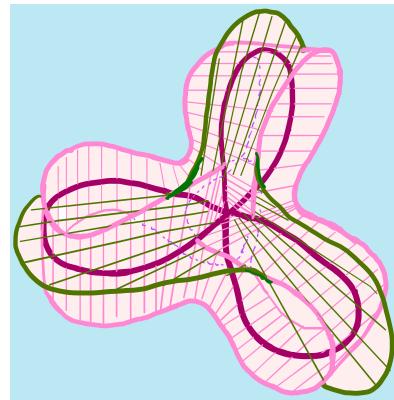
injektiv ist, d.h., Tangentenvektoren werden getrennt. Die Abbildung  $D_{\chi}([v])$  wird mittels Karten ([38], Anhang, Abstrakte Mannigfaltigkeiten) und der üblichen totalen Ableitung

([38], 6.1.1 Definition, a) erklärt. Hilbert vermutete, dass es keine solche Immersion geben kann, und beauftragte Werner Boy,<sup>14</sup> dies in seiner Doktorarbeit zu beweisen. Boy konnte allerdings zeigen, dass solch eine Immersion doch existiert.

Wie die Beschreibung des projektiven Raum als Verklebung des Möbiusbands und der Einheitskreisscheibe suggeriert, können wir mit einer Immersion des Meridians und des Möbiusbands beginnen. Die folgenden Zeichnungen illustrieren, wie solch eine Immersion aussieht.<sup>15</sup>



Diese Immersion des Möbiusbands kann man noch modifizieren und erhält das folgende Bild.

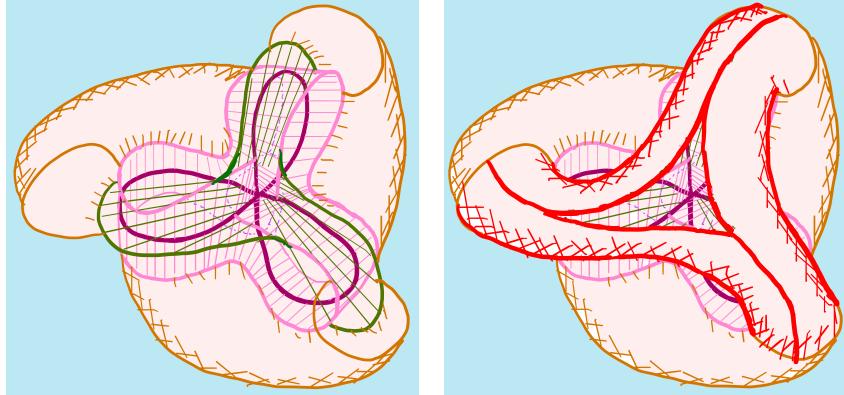


Für das Weitere stelle man sich vor, dass das Möbiusband aus Gummi ist. Man kann die

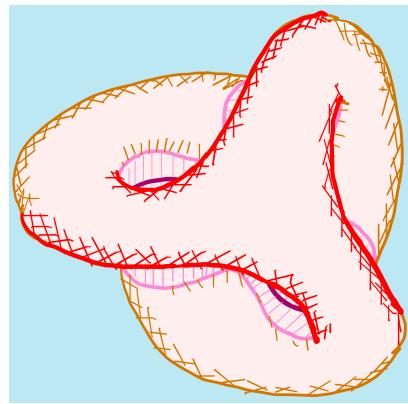
<sup>14</sup>Werner Boy (1879 - 1914), deutscher Mathematiker, im ersten Weltkrieg gefallen.

<sup>15</sup>Bessere Versionen der folgenden Skizzen findet man in [11], S. 197f., und auf der Website

obige Immersion dann „dehnen“ und in die folgenden Immersionen verformen.



Das verbleibende Loch lässt sich dann durch eine (ebenfalls verformte) Kreisscheibe verschließen.



Man nennt dieses Objekt die *Boy-Fläche*.

*III.3.7 Bemerkung.* In dem Artikel [30] wird erklärt, wie Sie eine Boy-Fläche aus Papier basteln können. Auf YouTube™ gibt es zu diesem Artikel auch ein „Tutorial“.

Das obige Verfahren zeigt die Existenz einer Immersion, ohne diese explizit anzugeben. Explizite Immersionen wurden von Bryant<sup>16</sup> und Apéry [1] entdeckt. Apérys Immersion ([1], Proposition 1, S. 78) entsteht durch folgende Parametrisierung einer Boy-Fläche:

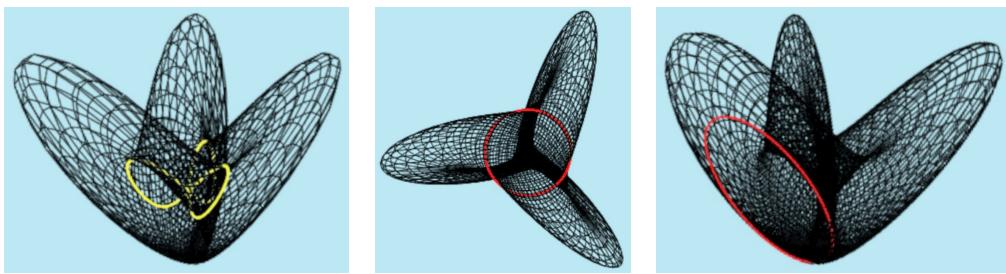
$$\varphi_A: [0, \pi) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \cos^2(\psi) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + \frac{2}{3} \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi) \\ \frac{1 - \sqrt{2} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(3 \cdot \varphi)}{1 - \sqrt{2} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(3 \cdot \varphi)} \\ \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \cos^2(\psi) \cdot \sin(2 \cdot \varphi) - \frac{2}{3} \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\psi) \cdot \sin(\varphi)}{1 - \sqrt{2} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(3 \cdot \varphi)} \\ \frac{\cos^2(\psi)}{1 - \sqrt{2} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(3 \cdot \varphi)} \end{cases}.$$

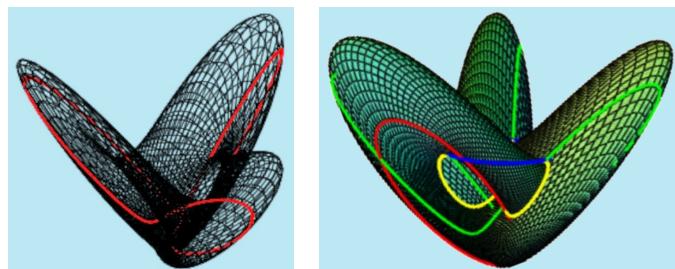
<sup>16</sup>Robert Leamon Bryant (geb. 1953), US-amerikanischer Mathematiker.

Über die Kugelkoordinaten [38], 10.2.5 Beispiele, iii), definiert dies eine differenzierbare Abbildung  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die Antipoden nicht unterscheidet, und daher eine Abbildung  $\chi_A: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vermittelt.

Die folgenden Bilder wurden mit CalcPlot3D<sup>17</sup> und dieser Parametrisierung erstellt. Das erste Bild zeigt die Kurve der Selbstdurchdringung. Mit der obigen Parametrisierung erkennt man, dass der Äquator auf einen Kreis in der Ebene  $E := \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 = 1\}$  abgebildet wird. Das zweite Bild zeigt diesen Kreis in einer Ansicht von oben. Das dritte Bild zeigt das Bild einer Geraden wie im Bild in III.3.2 Bemerkungen, i), gezeigt. Alle Geraden durch den Nordpol nehmen unter  $\varphi_A$  eine ähnliche Gestalt an.



Zum Vergleich wird noch eine Abbildung des Bilds in  $\mathbb{R}^3$  unter  $\varphi_A$  eines Kreises, der entsteht, wenn man  $S^2$  mit einer Ebene, die parallel zur  $(x_1, x_2)$ -Ebene ist, schneidet, gezeigt. (Ein solcher Kreis entspricht keiner Geraden in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ .) Das letzte Bild enthält alle bisher geschilderten Kurven.



Apéry beweist weiter ([1], Proposition 2, S. 79), dass das Bild  $B$  der obigen Parametrisierung aus allen Punkten  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  besteht, die die Gleichung

$$\begin{aligned} & 64 \cdot (1 - a_3)^3 \cdot a_3^3 - 48 \cdot (1 - a_3)^2 \cdot a_3^2 \cdot (3 \cdot a_1^2 + 3 \cdot a_2^2 + 2 \cdot a_3^2) + \\ & + 12 \cdot (1 - a_3) \cdot a_3 \cdot [27 \cdot (a_1^2 + a_2^2)^2 - 24 \cdot a_3^2 \cdot (a_1^2 + a_2^2)] + \\ & + 36 \cdot \sqrt{2} \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot (a_2^2 - 3 \cdot a_1^2) + 4 \cdot a_3^4] + (9 \cdot a_1^2 + 9 \cdot a_2^2 - 2 \cdot a_3^2) \cdot \\ & \cdot [-81 \cdot (a_1^2 + a_2^2)^2 - 72 \cdot a_3^2 \cdot (a_1^2 + a_2^2) + 108 \cdot \sqrt{2} \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot (a_1^2 - 3 \cdot a_2^2) + 4 \cdot a_3^4] = 0 \end{aligned}$$

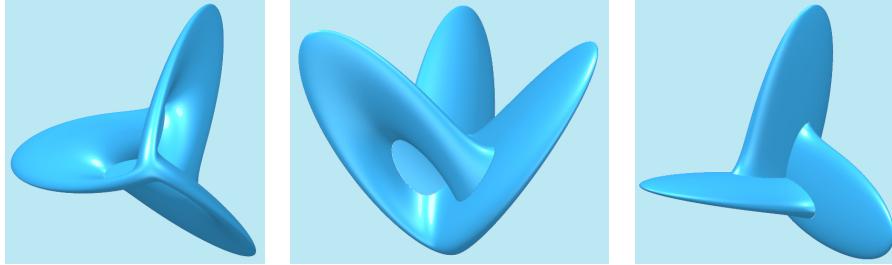
vom Grad 6 erfüllen.

Mit dieser Gleichung und einem geeigneten Programm<sup>18</sup> kann man ebenfalls Ansich-

<sup>17</sup><https://c3d.libretexts.org/CalcPlot3D/index.html>

<sup>18</sup>Wir haben Surfer verwendet.

ten einer Boy-Fläche erstellen.



## III.4 Der Hauptsatz der projektiven Geometrie

In diesem Abschnitt beweisen wir zwei Aussagen, die beide als Teile des Hauptsatzes der projektiven Geometrie bezeichnet werden. Der erste Teil erklärt, dass eine projektive lineare Abbildung durch die Vorgabe eines Vierecks eindeutig spezifiziert wird. Damit können wir leicht die projektive Version des Satzes von Desargues beweisen. Der andere Teil charakterisiert alle bijektiven Selbstabbildungen der projektiven Ebene, die Geraden auf Geraden abbilden. Im Fall der projektiven Ebene über den reellen Zahlen sind dies genau die projektiven linearen Abbildungen.

### III.4.1 Projektive Äquivalenz von Vierecken

Ein *Viereck* ist ein geordnetes Tupel  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  von Punkten in der projektiven Ebene  $\mathbb{P}_k^2$ , so dass keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen.

*III.4.1 Bemerkung.* Es sei  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  ein geordnetes Tupel von Punkten in der Ebene. Es sei  $v_i \in k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ein Vektor mit  $A_i = [v_i]$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Dann ist  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  genau dann ein Viereck, wenn je drei der Vektoren  $(v_0, v_1, v_2, v_3)$  linear unabhängig sind.

*III.4.2 Beispiel.* Wir setzen  $E_0 := [1 : 0 : 0]$ ,  $E_1 := [0 : 1 : 0]$ ,  $E_2 := [0 : 0 : 1]$  und  $E_3 := [1 : 1 : 1]$ . Dann ist  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$  ein Viereck. Wir werden es manchmal das *Standardviereck* nennen.

Der erste Teil des Hauptsatzes betrifft die Existenz und Eindeutigkeit gewisser Transformationen der projektiven Ebene.

**III.4.3 Satz.** *Es seien  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  und  $(B_0, B_1, B_2, B_3)$  zwei Vierecke in der projektiven Ebene. Dann existiert genau eine projektive Transformation  $\varphi = [A] \in \mathrm{PGL}_3(k)$  mit*

$$\varphi(A_i) = B_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass es zu einem Viereck  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  genau eine projektive Transformation  $\varphi_{(A_0, A_1, A_2, A_3)} \in \mathrm{PGL}_3(k)$  mit

$$\varphi_{(A_0, A_1, A_2, A_3)}(E_i) = A_i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

gibt. Wir wählen Vektoren  $v_0, v_1, v_2, v_3 \in k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  mit  $A_i = [v_i]$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Weiter seien  $e_0 := (1, 0, 0)^t$ ,  $e_1 = (0, 1, 0)^t$ ,  $e_2 = (0, 0, 1)^t$  und  $e_3 = (1, 1, 1)^t$ . Eine Matrix  $A \in \mathrm{GL}_3(k)$  erfüllt genau dann  $[A] \cdot E_i = A_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , wenn es Zahlen  $\lambda_i \in k^\star$  mit  $A \cdot e_i = \lambda_i \cdot v_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , gibt. Damit auch  $[A] \cdot E_3 = A_3$  gilt, muss es eine Zahl  $\lambda_3 \in k^\star$  geben, so

dass  $v_0 + v_1 + v_2 = \lambda_3 \cdot v_3$ . Da  $A_0, A_1$  und  $A_2$  nicht auf einer Gerade liegen, sind  $v_0, v_1$  und  $v_2$  linear unabhängig. Es gibt daher eindeutig bestimmte Zahlen  $\mu_0, \mu_1$  und  $\mu_2$  mit  $\mu_0 \cdot v_0 + \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 = v_3$ . Wir setzen  $w_i := \mu_i \cdot v_i, i = 0, 1, 2$ . Wählen wir statt  $v_3$  den Vektor  $\mu \cdot v_3$  mit  $\mu \in k^*$ , dann erhalten wir  $\mu \cdot w_i, i = 0, 1, 2$ . Dies zeigt, dass das Tupel  $(w_0, w_1, w_2)$  mit  $A_i = [w_i], i = 0, 1, 2$ , und  $w_0 + w_1 + w_2 \in \langle v_3 \rangle$  bis auf einen gemeinsamen Faktor in  $k^*$  eindeutig bestimmt ist. Damit ist auch die Matrix  $A \in \mathrm{GL}_3(k)$  mit  $A \cdot e_i = w_i, i = 0, 1, 2$ , bis auf einen Faktor in  $k^*$  bestimmt, d.h.,  $[A] \in \mathrm{PGL}_3(k)$  ist eindeutig bestimmt.

Sind nun  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  und  $(B_0, B_1, B_2, B_3)$  zwei Vierecke, dann erfüllt

$$\varphi := \varphi_{(B_0, B_1, B_2, B_3)} \circ \varphi_{(A_0, A_1, A_2, A_3)}^{-1}$$

die gewünschte Bedingung  $\varphi(A_i) = B_i, i = 0, 1, 2, 3$ . Für eine andere projektive Transformation  $\varphi' \in \mathrm{PGL}_3(k)$  mit  $\varphi'(A_i) = B_i, i = 0, 1, 2, 3$ , sei

$$\psi := \varphi_{(B_0, B_1, B_2, B_3)}^{-1} \circ \varphi' \circ \varphi_{(A_0, A_1, A_2, A_3)} \in \mathrm{PGL}_3(k).$$

Wir finden  $\psi(E_i) = E_i, i = 0, 1, 2, 3$ . Daher muss  $\psi$  die Identität sein und  $\varphi = \varphi'$ .  $\square$

### III.4.2 Der Satz von Desargues

Wir nennen Punkte  $D_1, \dots, D_n \in \mathbb{P}_k^2$  *kollinear*, wenn sie auf einer Geraden liegen. Ein Tupel  $(A, B, C)$ , das aus drei nicht kollinearen Punkten besteht, nennen wir ein *Dreieck*.

*III.4.4 Bemerkung.* In Lichte der Dualität aus III.2.7 Aufgabe, ist die Eigenschaft, dass sich drei Geraden in einem Punkt schneiden, dual zu der Eigenschaft, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen. Man nennt Geraden  $\gamma_1, \dots, \gamma_s \subset \mathbb{P}_k^2$ , die sich in einem Punkt schneiden, auch *konkurrent*.

Um die Schnittpunkte zweier Geraden zu berechnen, beachte man, dass für zwei verschiedene Punkte  $D = [d_0 : d_1 : d_2]$  und  $F = [f_0 : f_1 : f_2]$  aus der projektiven Ebene die Gerade durch  $D$  und  $F$  die Menge

$$\overline{DF} = \{ [\lambda \cdot d_0 + \mu \cdot f_0 : \lambda \cdot d_1 + \mu \cdot f_1 : \lambda \cdot d_2 + \mu \cdot f_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid (\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\} \} \quad (\text{III.1})$$

ist und dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k^1 &\longrightarrow \overline{DF} \\ [\lambda : \mu] &\longmapsto [\lambda \cdot d_0 + \mu \cdot f_0 : \lambda \cdot d_1 + \mu \cdot f_1 : \lambda \cdot d_2 + \mu \cdot f_2] \end{aligned}$$

eine bijektive Abbildung ist.

**III.4.5 Der Satz von Desargues in der projektiven Ebene.** Für sechs Punkte  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  in der projektiven Ebene, von denen keine drei kollinear sind, werde angenommen, dass sich die Geraden  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{B_1B_2}$  und  $\overline{C_1C_2}$  in einem Punkt  $O$  schneiden. Es sei  $P$  der Schnittpunkt der Geraden  $\overline{A_1B_1}$  und  $\overline{A_2B_2}$ ,  $Q$  der Schnittpunkt der Geraden  $\overline{A_1C_1}$  und  $\overline{A_2C_2}$  und  $R$  der Schnittpunkt der Geraden  $\overline{B_1C_1}$  und  $\overline{B_2C_2}$ .<sup>19</sup> Dann sind  $P, Q$  und  $R$  kollinear.

<sup>19</sup>Man erinnere sich, dass sich zwei verschiedene Geraden in  $\mathbb{P}_k^2$  in genau einem Punkt schneiden (III.2.5 Satz).

*Beweis.* Der Aussage ist invariant unter projektiven Transformationen. Deshalb dürfen wir nach III.4.3 Satz annehmen, dass  $A_1 = [1 : 0 : 0]$ ,  $B_1 = [0 : 1 : 0]$ ,  $C_1 = [0 : 0 : 1]$  und  $O = [1 : 1 : 1]$ . Mit (III.1) erkennen wir, dass  $\overline{OA_1} = \{[\lambda : \mu : \mu] \in \mathbb{P}_k^2 | (\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ . Da  $A_2$  auf der Geraden  $\overline{OA_1}$  liegt, gibt es ein Paar  $(\alpha, \beta) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}$  mit  $A_2 = [\alpha : \beta : \beta]$ . Wegen  $A_1 \neq A_2$  gilt sogar  $\beta \neq 0$ , d.h., mit  $a := \alpha/\beta$  gilt  $A_2 = [a : 1 : 1]$ . Ebenso finden wir reelle Zahlen  $b$  und  $c$  mit  $B_2 = [1 : b : 1]$  und  $C_2 = [1 : 1 : c]$ .

Weiter gilt  $\overline{A_1B_1} = \{[\lambda : \mu : 0] \in \mathbb{P}_k^2 | (\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ . Ein Punkt der Form

$$[\lambda \cdot a + \mu : \lambda + \mu \cdot b : \lambda + \mu],$$

d.h. ein Punkt auf der Geraden  $\overline{A_2B_2}$ , liegt genau dann auf der Geraden  $\overline{A_1B_1}$ , wenn  $\lambda + \mu = 0$ . Damit hat der Schnittpunkt  $P$  die homogenen Koordinaten  $[a - 1 : 1 - b : 0]$ . Analog berechnet man  $Q = [a - 1 : 0 : 1 - c]$  und  $R = [0 : b - 1 : 1 - c]$ . Die Bedingung, dass  $P$ ,  $Q$  und  $R$  kollinear sind, entspricht der Bedingung, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a - 1 \\ 1 - b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a - 1 \\ 0 \\ 1 - c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ b - 1 \\ 1 - c \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind. Man erkennt sofort, dass

$$\begin{pmatrix} a - 1 \\ 1 - b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a - 1 \\ 0 \\ 1 - c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b - 1 \\ 1 - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

*III.4.6 Bemerkung.* In der axiomatischen Geometrie ist eine *projektive Ebene* (vgl. [26], Kapitel I, 1.2 Definition) eine Menge  $\mathbb{P}$  zusammen mit einer Teilmenge  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{P})$  der Potenzmenge ([37], 1.2.18 Axiom) von  $\mathbb{P}$ , deren Elemente *Geraden* von  $\mathbb{P}$  genannt werden, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

- Zu zwei verschiedenen Punkten von  $\mathbb{P}$  existiert genau eine Gerade  $\gamma \in \mathfrak{G}$ , die diese Punkte enthält.
- Zu zwei verschiedenen Geraden  $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{G}$  existiert genau ein Punkt, der in beiden enthalten ist.
- In  $\mathbb{P}$  existiert ein Viereck, d.h. vier verschiedene Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden aus  $\mathfrak{G}$  liegen.

Der Satz von Desargues kann für jede projektive Ebene in diesem Sinn formuliert werden ([26], Kapitel I, 5.1 Desarguessches Postulat), und man nennt eine projektive Ebene  $\mathbb{P}$  *desarguessch*, wenn der Satz von Desargues für diese Ebene wahr ist. Wie wir bewiesen haben, ist jede Projektivierung eines dreidimensionalen Vektorraums über einem Körper desarguessch. Es gibt eine allgemeinere Version, die desarguesche Ebenen liefert ([26], Kapitel II, Abschnitt 3<sup>20</sup>), und man kann die desargueschen Ebenen charakterisieren ([26], Kapitel II, 5.2 Satz). In der axiomatischen Geometrie werden aber auch projektive Ebenen untersucht, die nicht desarguessch sind (s. [5], [44]).

<sup>20</sup>Man beachte, dass „Körper“ in dem genannten Buch „Schiefkörper“ bedeutet ([26], S. 4, Zeile 6ff).

### III.4.3 Bijektive Selbstabbildungen, die Geraden auf Geraden abbilden, und Körperautomorphismen

Außer den Elementen der projektiven linearen Gruppe gibt es weitere, einfach zu definierende bijektive Selbstabbildungen der projektiven Ebene, die Geraden auf Geraden abbilden. Sie bringen Eigenschaften des zugrundeliegenden Körpers  $k$  ins Spiel.

Es sei  $\sigma: k \rightarrow k$  ein Körperautomorphismus, d.h.,  $\sigma$  ist bijektiv, und es gilt

- ★  $\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$ ,  $\lambda, \mu \in k$ ,
- ★  $\sigma(\lambda \cdot \mu) = \sigma(\lambda) \cdot \sigma(\mu)$ ,  $\lambda, \mu \in k$ .

Für die Umkehrabbildung gilt auch

- ★  $\sigma^{-1}(\lambda + \mu) = \sigma^{-1}(\lambda) + \sigma^{-1}(\mu)$ ,  $\lambda, \mu \in k$ ,
- ★  $\sigma^{-1}(\lambda \cdot \mu) = \sigma^{-1}(\lambda) \cdot \sigma^{-1}(\mu)$ ,  $\lambda, \mu \in k$ .

*III.4.7 Aufgabe.* Es seien  $p$  eine Primzahl und  $\mathbb{F}_p$  der Körper mit  $p$  Elementen ([41], Satz II.4.8). Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} F: \mathbb{F}_p &\longrightarrow \mathbb{F}_p \\ \alpha &\longmapsto \alpha^p \end{aligned}$$

ein Körperautomorphismus ist. Er heißt *Frobenius<sup>21</sup>-Automorphismus*.

Ein Körperautomorphismus  $\sigma: k \rightarrow k$  induziert die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_\sigma: \mathbb{P}_k^2 &\longrightarrow \mathbb{P}_k^2 \\ [a_0 : a_1 : a_2] &\longmapsto [\sigma(a_0) : \sigma(a_1) : \sigma(a_2)]. \end{aligned}$$

Sowohl projektive Transformationen  $\varphi \in \mathrm{PGL}_3(k)$  als auch Abbildungen der Form  $\psi_\sigma$ ,  $\sigma: k \rightarrow k$  ein Körperautomorphismus, bilden Geraden in der projektiven Ebene auf Geraden in der projektiven Ebene ab. Der zweite Teil des Hauptsatzes der projektiven Geometrie charakterisiert alle bijektiven Selbstabbildungen der projektiven Ebene, die Geraden auf Geraden abbilden.

**III.4.8 Satz.** *Es sei  $\psi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  eine bijektive Abbildung, so dass  $\psi(\gamma)$  für jede Gerade  $\gamma \subset \mathbb{P}_k^2$  wieder eine Gerade ist. Dann existieren eine projektive Transformation  $\varphi \in \mathrm{PGL}_3(k)$  und ein Körperautomorphismus  $\sigma: k \rightarrow k$  mit*

$$\psi = \varphi \circ \psi_\sigma.$$

*Beweis.* Es seien  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$  das Standardviereck aus III.4.2 Beispiel,  $A_i := \psi(E_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , und  $\varphi_{(A_0, A_1, A_2, A_3)}$  die Abbildung, die im Beweis von III.4.3 Satz eingeführt wurde. Wir setzen

$$\psi' := \varphi_{(A_0, A_1, A_2, A_3)}^{-1} \circ \psi.$$

Dies ist eine bijektive Selbstabbildung der projektiven Ebene  $\mathbb{P}_k^2$ , die Geraden auf Geraden abbildet und die die Punkte des Standardvierecks fixiert. Wir müssen im Folgenden zeigen, dass  $\psi'$  durch einen Körperautomorphismus  $\sigma: k \rightarrow k$  induziert ist.

<sup>21</sup> Ferdinand Georg Frobenius (1849 - 1917), deutscher Mathematiker.

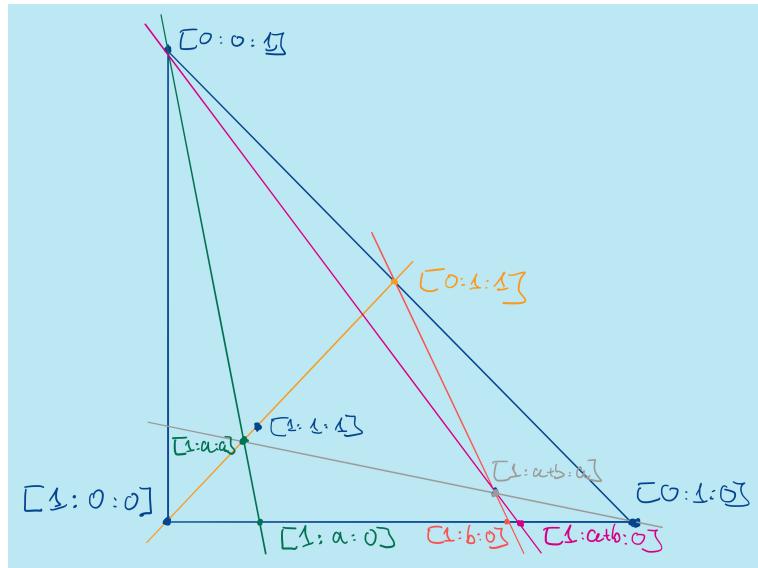
In den folgenden Berechnungen verwenden wir die Beschreibung von Geraden, die vor III.4.5 Satz besprochen wurde. Es sei  $\gamma_2 := \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid a_2 = 0\}$  die Gerade durch  $E_0$  und  $E_1$ . Unter der Einbettung  $k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2, (a, b) \mapsto [1 : a : b]$ , entspricht  $\gamma_2$  der  $x$ -Achse. Analog entspricht  $\gamma_1 := \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid a_1 = 0\}$  der  $y$ -Achse. Die Gerade  $\gamma_0 := \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid a_0 = 0\}$  durch  $E_1$  und  $E_2$  ist die unendlich ferne Gerade. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\eta: k &\rightarrow \gamma_2 \setminus \{E_1\} \\ \lambda &\mapsto [1 : \lambda : 0]\end{aligned}$$

ist eine Bijektion. Da  $E_0$  und  $E_1$  von  $\psi'$  fixiert werden und  $\psi'$  Geraden auf Geraden abbildet, wird  $\gamma_2$  auf  $\gamma_2$  abgebildet. Damit sind  $\chi_2: \gamma_2 \setminus \{E_1\} \rightarrow \gamma_2 \setminus \{E_1\}, P \mapsto \psi'(P)$ , und

$$\sigma := \eta^{-1} \circ \chi_2 \circ \eta: k \rightarrow k$$

Bijektionen. Wir werden zeigen, dass  $\sigma$  ein Körperautomorphismus ist. Wir weisen zunächst die Additivität nach. Dabei ist uns das folgende Bild behilflich.



Für  $E_0 = [1 : 0 : 0]$  und  $E_3 = [1 : 1 : 1]$  gilt

$$\overline{E_0 E_3} = \{[c : d : d] \in \mathbb{P}_k^2 \mid (c, d) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}\}.$$

Diese Gerade schneidet die Gerade  $\gamma_0$  im Punkt  $[0 : 1 : 1]$ . Da  $E_0, E_1$  und  $E_2$  unter  $\psi'$  festgehalten werden und Geraden auf Geraden gehen, wird auch der Punkt  $[0 : 1 : 1]$  fixiert.

Anhand dieser Beschreibungen berechnet man, dass  $[1 : a : a]$  der Schnittpunkt der Geraden durch  $[1 : a : 0]$  und  $[0 : 0 : 1]$  mit der Geraden  $\overline{E_0 E_3}$  ist. Die Gerade  $\overline{E_0 E_3}$  wird durch  $\psi'$  auf sich abgebildet und die Gerade durch  $[1 : a : 0]$  und  $[0 : 0 : 1]$  auf die Gerade durch  $[1 : \sigma(a) : 0]$  und  $[0 : 0 : 1]$ . Es folgt

$$\psi'([1 : a : a]) = [1 : \sigma(a) : \sigma(a)]. \quad (\text{III.2})$$

Nun ziehen wir die Gerade durch  $[1 : a : a]$  und  $E_1$  und schneiden sie mit der Geraden durch  $[1 : b : 0]$  und  $[0 : 1 : 1]$ . Man berechnet, dass  $[1 : a + b : a]$  der Schnittpunkt

ist. Die Gerade durch  $[1 : a : a]$  und  $E_1$  wird von  $\psi'$  auf die Gerade durch  $\psi'([1 : a : a])$  und  $E_1$ , also nach (III.2) auf die Gerade durch  $[1 : \sigma(a) : \sigma(a)]$  und  $E_1$  abgebildet. Auf der anderen Seite wird die Gerade durch  $[1 : b : 0]$  und  $[0 : 1 : 1]$  auf die Gerade durch  $[1 : \sigma(b) : 0]$  und  $[0 : 1 : 1]$  abgebildet. Es folgt

$$\psi'([1 : a + b : a]) = [1 : \sigma(a) + \sigma(b) : \sigma(a)]. \quad (\text{III.3})$$

Die Gerade durch  $E_2$  und  $[1 : a + b : a]$  schneidet die Gerade  $\gamma_2$  im Punkt  $[1 : a + b : 0]$ . Die Gerade durch  $E_2$  und  $[1 : a + b : a]$  wird nach (III.3) auf die Gerade durch  $E_2$  und  $[1 : \sigma(a) + \sigma(b) : \sigma(b)]$  abgebildet. Diese schneidet  $\gamma_2$  im Punkt  $[1 : \sigma(a) + \sigma(b) : 0]$ , d.h.

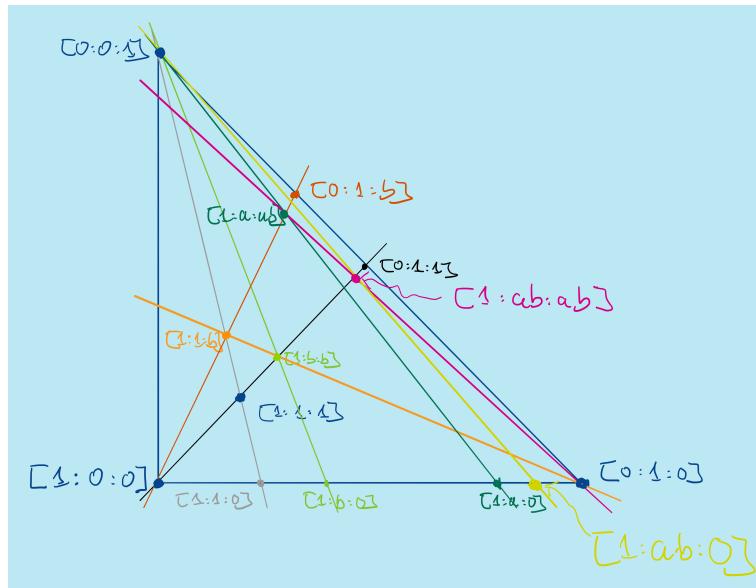
$$\psi'([1 : a + b : 0]) = [1 : \sigma(a) + \sigma(b) : 0]. \quad (\text{III.4})$$

Auf der anderen Seite gilt nach Definition  $\psi([1 : a + b : 0]) = [1 : \sigma(a + b) : 0]$ . Wir haben gezeigt, dass

$$\forall a, b \in k \setminus \{0\} : \quad \sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b).$$

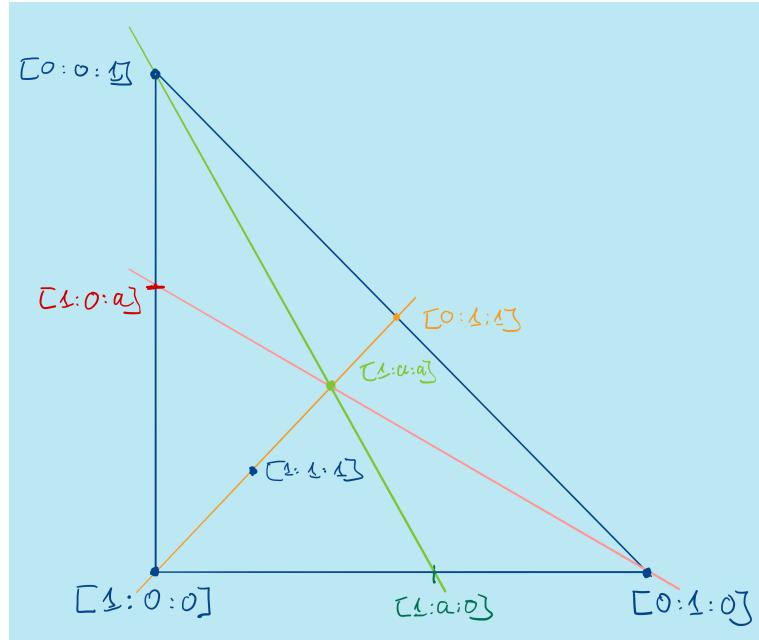
Es ist offensichtlich, dass die Formel auch gilt, wenn  $a$  oder  $b$  oder beide null sind.

Die Multiplikativität wird ähnlich bewiesen. Hier verwendet man das folgende Bild.



Es zeigt zunächst, dass auch Punkt  $[1 : 1 : 0]$  auf sich abgebildet wird. Die weiteren Details überlassen wir der Leserin bzw. dem Leser.

Wenn wir jetzt  $\tilde{\psi} := \psi_{\sigma^{-1}} \circ \psi'$  bilden, dann erhalten wir eine bijektive Selbstabbildung der projektiven Ebene, die Geraden auf Geraden abbildet und die Gerade  $\gamma_2 := \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid a_0 = 0\}$  punktweise festhält. Wir beweisen weiter, dass auch die Gerade  $\gamma_1$  punktweise festgehalten wird. Das nachstehende Bild zeigt, dass der Punkt  $[1 : a : a]$  für  $a \in k \setminus \{0\}$  von der Abbildung  $\tilde{\psi}$  festgehalten wird.



Dasselbe gilt für den Schnittpunkt der Geraden durch  $E_1$  und  $[1 : a : a]$  mit der Geraden  $\gamma_1$ , also für den Punkt  $[1 : 0 : a]$ . Da

$$\begin{aligned} k &\longrightarrow \gamma_1 \\ a &\longmapsto [1 : 0 : a] \end{aligned}$$

eine Bijektion ist, ist die Behauptung gezeigt. Analog kann man zeigen, dass die Gerade  $\gamma_0$  punktweise fixiert wird.

Es sei nun  $B = [b_0 : b_1 : b_2] \in \mathbb{P}_k^2$  ein Punkt. Wir können annehmen, dass  $B$  auf keiner der drei Geraden  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  liegt, d.h.,  $b_i \neq 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Die Gerade  $\ell_1$  durch  $B$  und  $E_1 = [0 : 1 : 0]$  schneidet die Gerade  $\gamma_1$  im Punkt  $P_1 = [b_0 : 0 : b_2]$ , und die Gerade  $\ell_2$  durch  $B$  und  $E_2 = [0 : 0 : 1]$  schneidet die Gerade  $\gamma_2$  im Punkt  $P_2 = [b_0 : b_1 : 0]$ . Man beachte, dass  $\ell_1$  und  $\ell_2$  wegen  $b_0 \neq 0$  verschieden sind. Da die Punkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $E_1$  und  $E_2$  alle von  $\tilde{\psi}$  fixiert werden, wird sowohl die Gerade  $\ell_1$  als auch die Gerade  $\ell_2$  auf sich abgebildet. Damit wird aber auch  $B$  als Schnittpunkt von  $\ell_1$  und  $\ell_2$  auf sich abgebildet. Insgesamt haben wir bewiesen, dass es sich bei  $\sigma$  um die Identität handelt.  $\square$

**III.4.9 Aufgabe.** Kommutieren die Elemente der Form  $\psi_\sigma$ ,  $\sigma: k \longrightarrow k$  ein Körperautomorphismus, mit den Elementen  $\varphi \in \mathrm{PGL}_3(k)$  der projektiven linearen Gruppe?

Um alle bijektiven Selbstabbildungen der projektiven Ebene  $\mathbb{P}_k^2$  zu klassifizieren, die Geraden auf Geraden abbilden, ist es erforderlich, alle Automorphismen des Grundkörpers  $k$  zu klassifizieren. Im Fall des Körpers  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen, der in dieser Vorlesung im Vordergrund steht, ist das Ergebnis glücklicherweise sehr einfach.

**III.4.10 Satz.** *Die Identität ist der einzige Automorphismus des Körpers der reellen Zahlen.*

**Beweis.** Es sei  $\sigma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  ein Körperautomorphismus. Da  $\sigma$  insbesondere ein Automorphismus der additiven Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  ist, folgt (vgl. [36], II.3.4 Lemma)

$$\star \quad \sigma(0) = 0,$$

$$\star \sigma(-\lambda) = -\sigma(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ferner ist  $\sigma|_{\mathbb{R}^*}$  ein Automorphismus der multiplikativen Gruppe  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  von  $\mathbb{R}$ , so dass

$$\star \sigma(1) = 1,$$

$$\star \sigma(\lambda^{-1}) = \sigma(\lambda)^{-1}, \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Zunächst beweisen wir durch vollständige Induktion, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sigma(n) = n.$$

Wie schon bemerkt, gilt  $\sigma(0) = 0$  und  $\sigma(1) = 1$ . Für den Induktionsschritt berechnen wir

$$\sigma(n+1) = \sigma(n) + \sigma(1) = \sigma(n) + 1 \stackrel{\text{IV.}}{=} n+1.$$

Da weiter

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sigma(-n) = -\sigma(n),$$

schließen wir

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \sigma(k) = k.$$

Es gilt auch

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \sigma\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\sigma(k)} = \frac{1}{k}$$

und daher

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \sigma\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\sigma(a)}{\sigma(b)} = \frac{a}{b}.$$

Folglich haben wir gezeigt, dass

$$\forall \lambda \in \mathbb{Q} : \sigma(\lambda) = \lambda. \quad (\text{III.5})$$

Nun erinnere man sich daran, dass eine reelle Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  genau dann positiv ist, wenn es eine Zahl  $\mu \in \mathbb{R}^*$  mit  $\lambda = \mu^2$  gibt (vgl. [37], 1.6.4 Eigenschaften, vi), und 2.5.2 Bemerkung, i). In diesem Fall gilt

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\mu^2) = \sigma(\mu)^2.$$

Da  $\sigma$  injektiv ist, gilt  $\sigma(\mu) \neq 0$ , und  $\sigma(\lambda)$  ist wieder positiv. Falls  $\lambda < \mu$ , dann  $\mu - \lambda > 0$  und  $\sigma(\mu) - \sigma(\lambda) = \sigma(\mu - \lambda) > 0$ , d.h.,  $\sigma(\lambda) < \sigma(\mu)$ .

Nun sei  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl mit  $\sigma(\lambda_0) \neq \lambda_0$ . Indem wir ggfs. zu  $-\lambda_0$  übergehen, können wir  $\lambda_0 < \sigma(\lambda_0)$  voraussetzen. Es gibt dann eine rationale Zahl  $\alpha \in \mathbb{Q}$  mit  $\lambda_0 < \alpha < \sigma(\lambda_0)$  ([37], 1.7.12 Satz). Mit (III.5) erhalten wir

$$\lambda_0 < \alpha = \sigma(\alpha) < \sigma(\lambda_0),$$

i.e.,  $\lambda_0 < \alpha$  und  $\sigma(\lambda_0) > \sigma(\alpha)$ , im Widerspruch zur vorangehenden Beobachtung.  $\square$

*III.4.11 Bemerkungen.* i) Der Beweis zeigt auch, dass die Identität der einzige Automorphismus des Körpers  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist.

ii) Die komplexe Konjugation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ , ist ein Körperautomorphismus (Abschnitt IV.1.2, [40], I.4.1 Definition, ii), und I.4.3 Eigenschaften). Allerdings hat  $\mathbb{C}$  viele weitere „wilde“ Automorphismen, zumindest, wenn man das Auswahlaxiom ([14], Kapitel 1, (M7), und Kapitel 9) voraussetzt ([21], [45]).

Mit III.4.8 Satz und III.4.10 Satz schließen wir.

**III.4.12 Folgerung.** Es sei  $\psi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  eine bijektive Selbstabbildung, die Geraden auf Geraden abbildet. Dann existiert ein Element  $[A] \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ , so dass

$$\forall [v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 : \quad \psi([v]) = [A \cdot v].$$

*III.4.13 Aufgabe.* Beweisen Sie, dass eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die Geraden auf Geraden abbildet, affin ist.

## III.5 Zentralkollinationen

Wir werden zunächst spezielle Selbstabbildungen der projektiven Ebene anschauen und dann erläutern, wie diese Abbildungen mit den perspektivischen Abbildungen aus Abschnitt III.1 zusammenhängen.

**III.5.1 Definition.** Eine projektive Transformation  $\varphi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  heißt *Zentralkollination*, wenn es eine Gerade  $\gamma \subset \mathbb{P}_k^2$  gibt, so dass

$$\forall P \in \gamma : \quad \varphi(P) = P$$

gilt.

**III.5.2 Lemma.** Es seien  $\varphi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  eine Zentralkollination. Dann ist  $\varphi$  die Identität, oder es gibt genau einen Punkt  $O \in \mathbb{P}_k^2$ , so dass jede Gerade durch  $O$  auf sich abgebildet wird.

*Beweis.* Es sei  $\gamma \subset \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  eine Gerade mit  $\varphi(P) = P$ ,  $P \in \gamma$ . Wenn es einen Fixpunkt  $O \in \mathbb{P}_k^2$  von  $\varphi$  gibt, der nicht auf  $\gamma$  liegt, dann schneidet jede Gerade  $\gamma'$  durch  $O$  die Gerade  $\gamma$  in genau einem Punkt  $R$ . Da  $O$  und  $R$  durch  $\varphi$  fixiert werden, wird  $\gamma'$  auf sich abgebildet.

Nun gebe es keinen Fixpunkt von  $\varphi$  in  $\mathbb{P}_k^2 \setminus \gamma$ . Für einen Punkt  $Q \in \mathbb{P}_k^2 \setminus \gamma$  gilt somit  $\varphi(Q) \neq Q$ . Es sei  $\gamma_Q$  die Gerade durch  $Q$  und  $\varphi(Q)$ . Diese Gerade schneidet  $\gamma$  in genau einem Punkt  $O_Q$ . Wegen  $\gamma_Q = \overline{O_Q Q} = \overline{O_Q \varphi(Q)} = \overline{\varphi(O_Q) \varphi(Q)}$  wird  $\gamma_Q$  unter  $\varphi$  auf sich abgebildet. Für  $Q_1 \in \mathbb{P}_k^2 \setminus \gamma$  und  $Q_2 \in \mathbb{P}_k^2 \setminus (\gamma \cup \gamma_{Q_1})$ , ist der Durchschnitt von  $\gamma_{Q_1} \cap \gamma_{Q_2}$  ein Fixpunkt von  $\varphi$ . Er muss also auf  $\gamma$  liegen, d.h.,  $O_{Q_1} = O_{Q_2}$ . Wir wählen also einen Punkt  $Q_0 \in \mathbb{P}_k^2 \setminus \gamma$  und definieren  $O := O_{Q_0}$ . Unsere Betrachtungen haben erwiesen, dass jede Gerade durch  $O$  auf sich abgebildet wird.

Es sei  $O' \neq O$  ein weiterer Punkt, so dass  $\varphi$  jede Gerade durch  $O'$  auf sich abbildet. Offenbar sind  $O$  und  $O'$  Fixpunkte von  $\varphi$ . Für  $A \in \mathbb{P}_k^2 \setminus \overline{OO'}$  sind  $\overline{AO}$  und  $\overline{AO'}$  zwei verschiedene Geraden, die sich in  $A$  schneiden. Da  $\overline{AO}$  und  $\overline{AO'}$  jeweils auf sich abgebildet werden, wird  $A$  fixiert. Für einen Punkt  $A \in \overline{OO'} \setminus \{O, O'\}$  können wir einen Punkt  $B \in \mathbb{P}_k^2 \setminus \overline{OO'}$  wählen. Die Gerade  $\overline{BA}$  enthält noch einen weiteren Punkt  $B' \in \mathbb{P}_k^2 \setminus \overline{OO'}$ .<sup>22</sup> Da  $\overline{BB'}$  und  $\overline{OO'}$  durch  $\varphi$  fixiert werden, wird auch  $A$  festgehalten. Wir haben damit nachgewiesen, dass  $\varphi$  die Identität ist.  $\square$

<sup>22</sup>Wir haben bereits im Anschluss an (III.1) beobachtet, dass es für jede Gerade in  $\mathbb{P}_k^2$  eine Bijektion zwischen  $\mathbb{P}_k^1$  und der Geraden gibt. Die projektive Gerade enthält die drei verschiedenen Punkte  $[1 : 0]$ ,  $[0 : 1]$  und  $[1 : 1]$ . Nur für  $k = \mathbb{F}_2$  sind das schon alle Punkte.

Die Gerade  $\gamma$  ist die *Achse* der Zentralkollineation und  $O$  ihr *Zentrum*.

*III.5.3 Beispiel.* Es sei  $\gamma_0 := \{[a_0 : a_1 : a_2] | a_0 = 0\}$ . Wir betrachten eine Matrix  $A \in \mathrm{PGL}_3(k)$ , die  $\gamma_0$  punktweise festhält.

**Fall A).** Das Zentrum liege außerhalb von  $\gamma_0$ . Wir können annehmen, dass  $O = [1 : 0 : 0]$  das Zentrum ist. Dann existiert ein Paar  $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , so dass

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Der Punkt  $[1 : 1 : 0] \in \gamma_2 = \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 | a_2 = 0\}$  wird von  $A$  auf  $[\lambda : \mu : 0]$  abgebildet. Zu jedem Punkt  $P \in \gamma_2 \setminus \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]\}$  können wir eine Zentralkollineation mit Achse  $\gamma_0$  und Zentrum  $[1 : 0 : 0]$  finden, die  $[1 : 1 : 0]$  auf  $P$  abbildet.

**Fall B).** Das Zentrum  $O$  liege auf  $\gamma_0$ . Hier können wir voraussetzen, dass  $O = [0 : 0 : 1]$ . Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ b & \mu & 0 \\ c & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Da  $\gamma_1 = \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 | a_1 = 0\}$  auf sich abgebildet werden muss, gilt  $b = 0$ . Da weiter die Gerade durch  $[1 : 1 : 0]$  und  $O$  auf sich selbst abgebildet wird, muss  $\lambda = \mu$  gelten. Wir können  $\lambda = \mu = 1$  wählen. Zu  $P \in \gamma_1 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$  können wir eine Zentralkollineation mit Achse  $\gamma_0$  und Zentrum  $[0 : 0 : 1]$  finden, die  $[1 : 0 : 1]$  auf  $P$  abbildet.

**III.5.4 Satz.** *Jede projektive Transformation lässt sich als Verknüpfung von höchstens drei Zentralkollineationen darstellen.*

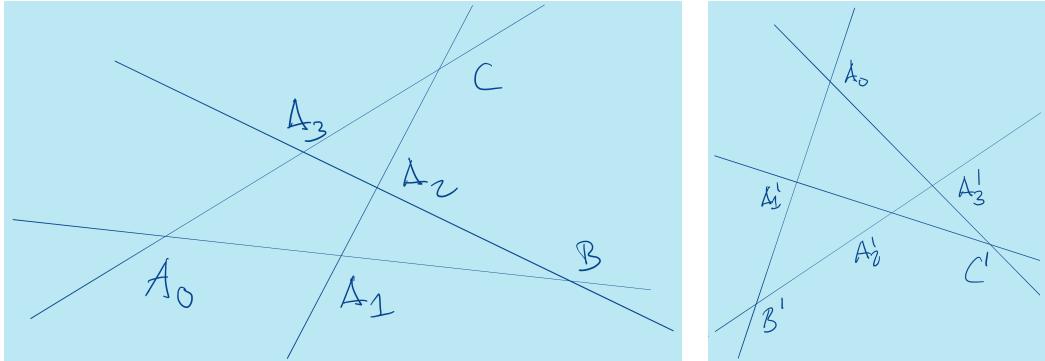
*Beweis.* Wir fixieren ein Viereck  $(S_0, S_1, S_2, S_3)$  und setzen  $A_i := \varphi(S_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Wenn  $A_0 = S_0$  gilt, setzen wir  $\varkappa_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{P}_k^2}$ . Andernfalls sei  $O \in \overline{S_0 A_0} \setminus \{S_0, A_0\}$ . Da  $A_0$ ,  $A_1$  und  $A_2$  nicht kollinear sind, können wir so nummerieren, dass  $A_1 \notin \overline{S_0 A_0}$  gilt.<sup>23</sup> Wir wählen eine Achse  $\gamma \neq \overline{S_0 A_0}$ , so dass  $O \in \gamma$  und  $A_1 \notin \gamma$ . Die Diskussion von Fall B) in III.5.3 Beispiel zeigt, dass wir eine Zentralkollineation  $\varkappa_1$  mit Achse  $\gamma$  und Zentrum  $O$  finden können, die  $S_0$  auf  $A_0$  abbildet.<sup>24</sup>

Es sei  $A'_i := \varkappa_1(S_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Falls  $A'_1 = A_1$ , setzen wir  $\varkappa_2 := \mathrm{id}_{\mathbb{P}_k^2}$  und übergehen den

<sup>23</sup>Dabei sind die Punkte  $S_0, S_1, S_2$  und  $S_3$  entsprechend zu nummerieren.

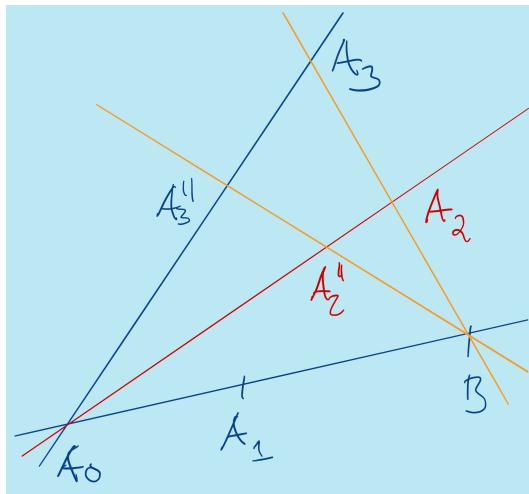
<sup>24</sup>In der Tat können wir nach III.4.3 Satz eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  mit  $\varphi(\gamma) = \gamma_0$ ,  $\varphi(O) = [0 : 0 : 1]$  und  $\varphi(S_0) = [1 : 0 : 1]$  finden. Es gibt eine Zentralkollineation  $\varkappa: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  mit Achse  $\gamma_0$  und Zentrum  $[0 : 0 : 1]$ , die  $[1 : 0 : 1]$  auf  $\varphi(A_0)$  abbildet. Dann leistet  $\varkappa_1 := \varphi^{-1} \circ \varkappa \circ \varphi$  das Verlangte.

folgenden Schritt. Ansonsten zeichnen wir folgende Bilder.



Es seien  $O$  der Schnittpunkt<sup>25</sup> von  $\overline{A'_1 A_1}$  und  $\overline{B' B}$  und  $\gamma = \overline{OA_0}$ . Wieder wenden wir Fall B) an und finden eine Zentralkollineation  $\kappa_2$  mit der Achse  $\gamma$  und dem Zentrum  $O$ , die  $A'_1$  auf  $A_1$  abbildet. Die Gerade  $\overline{B' B}$  wird von  $\kappa_2$  auf sich abgebildet. Da  $B'$  der Schnittpunkt von  $\overline{B' B}$  und  $\overline{A_0 A'_1}$  ist und  $B$  der Schnittpunkt von  $\kappa_2(\overline{A_0 A'_1}) = \overline{A_0 A_1}$  und  $\kappa_2(\overline{B' B}) = \overline{B' B}$ , folgt  $\kappa_2(B') = B$ .

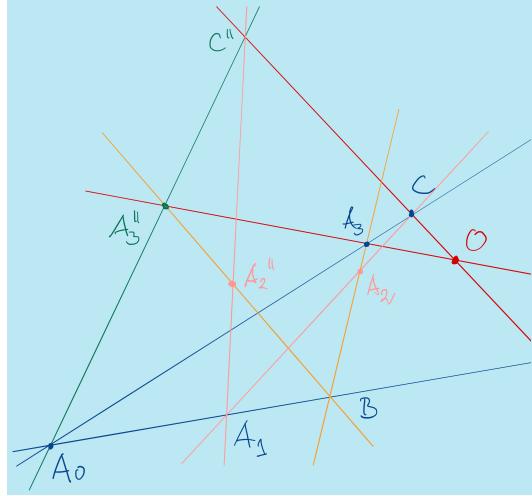
Es sei  $A''_i := \kappa_2(A'_i)$ ,  $i = 2, 3$ . Falls sowohl  $A_0, A_2$  und  $A''_2$  als auch  $A_0, A_3$  und  $A''_3$  auf einer Geraden liegen, dann wählen wir  $\overline{A_0 A_1}$  als Achse und  $A_0$  als Zentrum.



Wir finden dann eine Zentralkollineation  $\kappa_3$  zu dieser Achse und diesem Zentrum, die  $A''_2$  auf  $A_2$  abbildet. Wir haben  $\kappa_2(A_0) = A_0$ ,  $\kappa_2(A_1) = A_1$  und  $\kappa_2(A''_2) = A_2$ . Der Punkt  $A''_3$  ist der Punkt, in dem die Gerade  $\overline{BA''_2}$  die Gerade  $\overline{A_0 A''_3}$  schneidet. Der Punkt  $\kappa_2(A''_3)$  ist der Punkt, in dem die Gerade  $\kappa_2(\overline{BA''_2}) = \overline{BA_2}$  die Gerade  $\kappa_2(\overline{A_0 A''_3}) = \overline{A_0 A''_3} = \overline{A_0 A_3}$  schneidet. Dieser Punkt ist aber  $A_3$ , i.e.,  $\kappa_2(A''_3) = A_3$ . In dem verbleibenden Fall können wir annehmen, dass wir so nummeriert haben, dass  $A_0, A_3$  und  $A''_3$  nicht kollinear sind.<sup>26</sup> Es seien  $O$  der Schnittpunkt von  $\overline{A''_3 A_3}$  und  $\overline{C'' C}$  und  $\gamma = \overline{A_0 A_1}$ .

<sup>25</sup>Nach Konstruktion von  $\kappa_1$  sind  $O, A_1$  und  $A'_1$  kollinear und  $O, A_0$  und  $A_1$  nicht. Somit sind  $A_0, A_1$  und  $A'_1$  nicht kollinear. Das bedeutet  $\overline{A'_1 A_1} \neq \overline{B' B}$ .

<sup>26</sup>Die Vertauschung von 2 und 3 ändert die Punkte  $A_1, A'_1, B$  und  $B'$ , die zuvor verwendet wurden, nicht.



Es gibt dann eine Zentralkollination mit Achse  $\gamma$  und Zentrum  $O$ , die  $A_3''$  auf  $A_3$  abbildet. Wie vorhin können wir  $\kappa_3(C'') = C$  folgern. Der Punkt  $A_2''$  ist der Schnittpunkt der Geraden  $\overline{BA_3''}$  und  $\overline{A_1C''}$ . Damit ist  $\kappa_3(A_2'')$  der Schnittpunkt der Geraden  $\kappa_3(\overline{BA_3''}) = \overline{BA_3}$  und  $\kappa_3(\overline{A_1C''}) = \overline{A_1C}$ , d.h.,  $\kappa_3(A_2'') = A_2$ .

Die Abbildung  $\kappa := \kappa_3 \circ \kappa_2 \circ \kappa_1$  erfüllt  $\kappa(S_i) = A_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Nach III.4.3 Satz gilt  $\varphi = \kappa$ .  $\square$

*III.5.5 Aufgaben.* a) Es seien  $O \in \mathbb{P}_k^2$  und

$$U_O := \{ \varphi \in \mathrm{PGL}_3(k) \mid \varphi \text{ ist Zentralkollination mit Zentrum } O \}.$$

Überprüfen Sie, dass  $U_O$  eine Untergruppe von  $\mathrm{PGL}_3(k)$  ist.

b) Geben Sie eine Transformation  $\varphi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  der projektiven Ebene an, die keine Zentralkollination ist. Folgern Sie, dass die Verknüpfung von Zentralkollinationen i.A. keine Zentralkollination ist.

Jetzt kehren wir zu den perspektivischen Abbildungen aus Abschnitt III.1 zurück. Es seien  $E, E' \subset k^3$  zwei Ebenen, die sich entlang der Geraden  $\gamma$  schneiden, und  $O \in \mathbb{R}^3 \setminus (E \cup E' \cup \{(0, 0, 0)\})$ .<sup>27</sup> Nun verwenden wir die Einbettung

$$\begin{aligned} \iota: k^3 &\longrightarrow \mathbb{P}_k^3 \\ (b_1, b_2, b_3) &\longmapsto [1 : b_1 : b_2 : b_3]. \end{aligned}$$

Es gibt Tupel  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), (\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3) \in k^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ , so dass

$$\begin{aligned} E &= \{ (b_1, b_2, b_3) \in k^3 \mid \lambda_0 + \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 = 0 \}, \\ E' &= \{ (b_1, b_2, b_3) \in k^3 \mid \lambda'_0 + \lambda'_1 \cdot b_1 + \lambda'_2 \cdot b_2 + \lambda'_3 \cdot b_3 = 0 \}. \end{aligned} \tag{III.6}$$

Wir definieren weiter

$$\begin{aligned} U &= \{ (a_0, a_1, a_2, a_3) \in k^4 \mid \lambda_0 \cdot a_0 + \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 = 0 \}, \\ U' &= \{ (a_0, a_1, a_2, a_3) \in k^4 \mid \lambda'_0 \cdot a_0 + \lambda'_1 \cdot a_1 + \lambda'_2 \cdot a_2 + \lambda'_3 \cdot a_3 = 0 \}. \end{aligned}$$

<sup>27</sup>Um die perspektivische Abbildung  $f: E \rightarrow E'$  zu erklären, benötigen wir nur die affine Struktur von  $k^3$ . Laut II.2.2 Bemerkungen, ii), können wir den Ursprung frei wählen, um die Struktur eines  $k$ -Vektorraums zu definieren. Die Bedingung  $O \neq (0, 0, 0)$  bedeutet daher keine Einschränkung.

Dies sind dreidimensionale lineare Teilräume von  $k^4$ . Daher sind  $\overline{E} = \mathbb{P}(U)$  und  $\overline{E}' := \mathbb{P}(U')$  Ebenen im dreidimensionalen projektiven Raum  $\mathbb{P}_k^3$ . Offenbar gilt

$$\iota(E) = \overline{E} \cap \iota(k^3) \quad \text{und} \quad \iota(E') = \overline{E}' \cap \iota(k^3).$$

**III.5.6 Bemerkung.** Wir werden diese Art von Konstruktion in Abschnitt III.7.3 über den projektiven Abschluss genauer untersuchen.

Wir können nun die Vorschrift für die perspektivische Abbildung aus Abschnitt III.1 übernehmen. Wegen (III.6) liegt  $\iota(O)$  weder auf  $\overline{E}$  noch auf  $\overline{E}'$ . Nach III.2.4 Lemma gibt es daher für einen Punkt  $P \in \overline{E}$  genau eine Gerade durch  $\iota(O)$  und  $P$ , die wir wie üblich mit  $\overline{\iota(O)P}$  bezeichnen. Der Beweis von III.2.5 Satz lässt sich verallgemeinern und zeigt, dass die Gerade  $\overline{\iota(O)P}$  die Ebene  $\overline{E}'$  in genau einem Punkt schneidet, den wir mit  $\overline{f}(P)$  bezeichnen. Somit ist

$$\begin{aligned} \overline{f}: \overline{E} &\longrightarrow \overline{E}' \\ P &\longmapsto \overline{f}(P) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung mit folgenden Eigenschaften.

- Die Abbildung  $\overline{f}$  ist bijektiv.
- Für jeden Punkt  $P \in E$ , so dass  $\overline{\iota(O)P}$  nicht parallel zu  $\overline{E}'$  ist, gilt  $\iota(f(P)) = \overline{f}(\iota(p))$ .

Die zweite Eigenschaft besagt, dass  $\overline{f}$  die in Abschnitt III.1 eingeführte perspektivische Abbildung  $f: E \longrightarrow E'$  wie gewünscht fortsetzt.

Um die Abbildung  $\overline{f}$  weiter zu untersuchen, verwenden wir folgende Konstruktion. Es sei  $Q \in \mathbb{P}_k^3$ . Dieser Punkt entspricht einem eindimensionalen linearen Teilraum  $\ell_Q \subset k^4$ . Es seien  $W_Q := k^4/\ell_Q$  und  $\pi_Q: k^4 \longrightarrow W_Q$  die natürliche Quotientenabbildung (s. [41], Satz III.6.3). Wenn  $Q \notin \overline{E}$  und  $Q \notin \overline{E}'$ , dann gilt  $\ell_Q \cap U = \{0\}$  und  $\ell_Q \cap U' = \{0\}$ . Insbesondere sind  $\pi_{Q|U}: U \longrightarrow W_Q$  und  $\pi_{Q|U'}: U' \longrightarrow W_Q$  lineare Isomorphismen. Wir definieren in diesem Fall

$$\varphi_Q := (\pi_{Q|U'})^{-1} \circ \pi_{Q|U}: U \xrightarrow{\cong} U'.$$

Das folgende Resultat ist eine unmittelbare Konsequenz der getroffenen Definitionen.

**III.5.7 Lemma.** *Für jeden Vektor  $v \in U \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$  gilt*

$$\overline{f}([v]) = [\varphi_{\iota(O)}(v)].$$

Dieses Lemma besagt, dass  $\overline{f}$  durch einen linearen Isomorphismus der den Ebenen  $E$  und  $E'$  zugrundeliegenden Vektorräume  $U$  und  $U'$  induziert ist.

Jetzt benutzen wir den Punkt  $Q_0 := [1 : 0 : 0 : 0]$  als Zentrum der Projektion. Wir kürzen  $W_0 := W_{Q_0}$  und  $\pi_0 := \pi_{Q_0}$  ab und definieren

$$L := \pi_{0|U'} \circ \varphi_{\iota(O)} \circ (\pi_{0|U})^{-1}$$

sowie

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathbb{P}(W_0) &\longrightarrow \mathbb{P}(W_0) \\ [w] &\longmapsto [L(w)]. \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $\Lambda \in \mathrm{PGL}(W_0)$ . Diese projektive Transformation beschreibt die perspektivische Abbildung  $\bar{f}$  bzgl. der von  $\pi_0$  vermittelten Identifikation  $\mathbb{P}(U) \cong \mathbb{P}(W_0)$  und  $\mathbb{P}(U') \cong \mathbb{P}(W_0)$ . Es seien  $P = [u] \in \bar{E}$  und  $w = \pi_0(u)$ . Wir schreiben  $\bar{f}(P) = [u']$ . Die Gleichung  $\Lambda([w]) = [w]$  bedeutet, dass  $u, u'$  und  $\ell_{Q_0}$  in einer Ebene liegen, d.h., dass  $Q_0, P$  und  $\bar{f}(P)$  auf einer Geraden liegen. Da  $\iota(O), P$  und  $\bar{f}(P)$  auf einer Geraden liegen, kann das nur passieren, wenn  $P = \bar{f}(P)$ , d.h.,  $P \in \bar{E} \cap \bar{E}'$ , oder die fragliche Gerade  $\overline{Q_0\iota(O)}$  ist. Es seien  $\gamma^* := \mathbb{P}(\pi_0(U \cap U'))$  und  $O^* \in \mathbb{P}(W_0)$  der Punkt, der  $\iota(O)$  entspricht. Wie wir gerade erläutert haben, sind dies genau die Fixpunkte von  $\Lambda$ . Es folgt bereits, dass  $\Lambda$  eine Zentralkollineation mit Achse  $\gamma^*$  ist. Wenn  $O^* \notin \gamma^*$ , dann ist  $O^*$  das Zentrum der Zentralkollineation. Der Fall  $O^* \in \gamma^*$  tritt auf, wenn die Gerade  $\overline{Q_0\iota(O)}$  die Gerade  $\bar{E} \cap \bar{E}'$  schneidet. Auch in diesem Fall ist  $O^*$  das Zentrum von  $\Lambda$ . Wir können uns in beiden Fällen direkt davon überzeugen, dass jede Gerade durch  $O^*$  durch  $\Lambda$  auf sich selbst abgebildet wird. Eine Gerade  $g$  in  $\mathbb{P}(W_0)$  durch  $O^*$  entspricht einem zweidimensionalen Teilraum von  $W_0$  und dieser wiederum einem dreidimensionalen Teilraum  $G \subset k^4$ , so dass die Ebene  $\mathbb{P}(G)$  die Punkte  $Q_0$  und  $\iota(O)$  enthält. Nach dem Argument aus dem Beweis von III.2.5 Satz schneidet  $\mathbb{P}(G)$  die Ebene  $\bar{E}$  entlang einer Geraden  $\gamma_g$  und die Ebene  $\bar{E}'$  entlang einer Geraden  $\gamma'_g$ . Unsere Behauptung lautet  $\bar{f}(\gamma_g) \subset \gamma'_g$ . Es sei  $P \in \gamma_g$ . Wegen  $\iota(O) \in \mathbb{P}(G)$  und  $P \in \gamma_g \subset \mathbb{P}(G)$  gilt  $\overline{\iota(O)P} \subset \mathbb{P}(G)$ . Es folgt

$$\{\bar{f}(P)\} = \overline{\iota(O)P} \cap \bar{E}' \subset \mathbb{P}(G) \cap \bar{E}' = \gamma'_g,$$

i.e.,  $\bar{f}(P) \in \gamma'_g$ .

Das Fazit unserer Betrachtungen ist, dass die perspektivischen Abbildungen aus Abschnitt III.1 den Zentralkollinationen der projektiven Geometrie entsprechen. So ist z.B. im Satz von Desargues (III.4.5) die Situation, dass das Dreieck  $(A_1, B_1, C_1)$  auf das Dreieck  $(A_2, B_2, C_2)$  durch eine Zentralkollineation mit Zentrum  $O$  und Achse  $\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QR}$  abgebildet wird.

## III.6 Das Doppelverhältnis

Wie wir bereits gesehen haben, bedeutet Klassifikation in der Geometrie, die Kongruenzrelation, die durch die Wirkung der Symmetriegruppe induziert wird, auf gewissen Teilmengen des jeweiligen Raums zu untersuchen. In der projektiven Geometrie haben wir die entsprechende Kongruenz als projektive Äquivalenz bezeichnet. Wie zuvor beschränken wir uns im Weiteren auf den Fall der projektiven Ebene. Ein Hilfsmittel bei der Klassifikation sind sogenannte Invarianten. Dies sind mathematische Größen, z.B. Zahlen, die einer Teilmenge der projektiven Ebene zugeordnet werden und die sich unter projektiven Transformationen nicht ändern, d.h., für  $X$  und eine projektive Transformation  $\varphi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  nimmt die fragliche Invariante auf  $X$  und  $\varphi(X)$  denselben Wert an. Eine notwendige Bedingung dafür, dass  $X, Y \subset \mathbb{P}_k^2$  projektiv äquivalent sind, ist daher, dass die fragliche Invariante in  $X$  und  $Y$  denselben Wert annimmt. Im Idealfall existieren genügend Invarianten, um auch eine hinreichende Bedingung für projektive Äquivalenz zu gewinnen.

### III.6.1 Definition und einfache Eigenschaften

Das Doppelverhältnis ist eine Invariante für geordnete Viertupel von kollinearen Punkten in der Ebene. Es sei also  $(A, B, C, D)$  ein Tupel von vier verschiedenen kollinearen Punkten. Es seien weiter  $r, s, u, v \in k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  Vektoren, so dass

$$A = [r], \quad B = [s], \quad C = [u] \quad \text{und} \quad D = [v].$$

Da  $C, D$  auf der Geraden  $\overline{AB}$  liegen existieren eindeutig bestimmte Paare (vgl. (III.1))  $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , so dass

$$u = \alpha \cdot r + \beta \cdot s \quad \text{und} \quad v = \gamma \cdot r + \delta \cdot s.$$

Wir definieren<sup>28</sup>

$$(r \ s \ u \ v) := \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \in k^\star.$$

**III.6.1 Lemma.** Für Vektoren  $r', s', u', v' \in k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  mit

$$[r'] = [r], \quad [s'] = [s], \quad [u'] = [u] \quad \text{und} \quad [v'] = [v]$$

folgt

$$(r' \ s' \ u' \ v') = (r \ s \ u \ v).$$

*Beweis.* Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen  $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_u, \lambda_v \in k^\star$ , so dass

$$r = \lambda_r \cdot r', \quad s = \lambda_s \cdot s', \quad u = \lambda_u \cdot u' \quad \text{und} \quad v = \lambda_v \cdot v'.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{\lambda_u} \cdot u = \frac{\alpha}{\lambda_u} \cdot r + \frac{\beta}{\lambda_u} \cdot s = \frac{\lambda_r \cdot \alpha}{\lambda_u} \cdot r' + \frac{\lambda_s \cdot \beta}{\lambda_u} \cdot s', \\ v' &= \frac{1}{\lambda_v} \cdot v = \frac{\gamma}{\lambda_v} \cdot r + \frac{\delta}{\lambda_v} \cdot s = \frac{\lambda_r \cdot \gamma}{\lambda_v} \cdot r' + \frac{\lambda_s \cdot \delta}{\lambda_v} \cdot s'. \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$(r' \ s' \ u' \ v') = \frac{\lambda_u \cdot \lambda_s \cdot \beta}{\lambda_u \cdot \lambda_r \cdot \alpha} \cdot \frac{\lambda_v \cdot \lambda_r \cdot \gamma}{\lambda_v \cdot \lambda_s \cdot \delta} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$$

und erhalten das gewünschte Ergebnis.  $\square$

**III.6.2 Definition.** Es sei  $(A, B, C, D)$  ein Tupel von vier verschiedenen Punkten in der projektiven Ebene, die auf einer Geraden liegen. Man wähle Vektoren  $r, s, u, v \in k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  mit  $A = [r], B = [s], C = [u]$  und  $D = [v]$  und setze<sup>29</sup>

$$(A \ B \ C \ D) := (r \ s \ u \ v).$$

Diese Zahl nennen wir das *Doppelverhältnis* des Tupels  $(A, B, C, D)$ .

<sup>28</sup>Wegen  $[u] \neq [r]$  und  $[u] \neq [s]$  sind  $\alpha$  und  $\beta$  von null verschieden. Ebenso erkennt man  $\gamma \neq 0$  und  $\delta \neq 0$ .

<sup>29</sup>Das vorige Lemma besagt, dass  $(A \ B \ C \ D)$  nicht von der Auswahl von  $r, s, u$  und  $v$  abhängt.

Das nächste Resultat illustriert, dass das Doppelverhältnis von der Reihenfolge der Punkte abhängig ist und somit wirklich nur eine Invariante für geordnete Viertupel ist.

**III.6.3 Lemma.** *Für ein Tupel  $(A, B, C, D)$  von vier verschiedenen kollinearen Punkten in der projektiven Ebene  $\mathbb{P}_k^2$  gelten folgende Beziehungen:*

- i)  $(BACD) = 1/(ABCD) = (ABDC)$ .
- ii)  $(ACBD) = 1 - (ABCD) = (DBCA)$ .

*Beweis.* Wir wählen Vektoren  $r, s, u, v \in k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  mit  $A = [r]$ ,  $B = [s]$ ,  $C = [u]$  und  $D = [v]$  und schreiben

$$u = \alpha \cdot r + \beta \cdot s \quad \text{und} \quad v = \gamma \cdot r + \delta \cdot s. \quad (\text{III.7})$$

i) Wenn wir von  $(r, s, u, v)$  zu  $(s, r, u, v)$  übergehen, dann tauschen  $\alpha$  und  $\beta$  bzw.  $\gamma$  und  $\delta$  ihre Rollen. Wenn wir von  $(r, s, u, v)$  zu  $(r, s, v, u)$  übergehen, dann tauschen  $\alpha$  und  $\gamma$  bzw.  $\beta$  und  $\delta$  ihre Rollen. In beiden Fällen ergibt sich sofort die behauptete Formel.

ii) Wir müssen zunächst  $s$  als Linearkombination von  $r$  und  $u$  schreiben. Mit (III.7) finden wir

$$s = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot r + \frac{1}{\beta} \cdot u.$$

Weiter gilt

$$v = \gamma \cdot r - \delta \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot r + \frac{\delta}{\beta} \cdot u = \frac{\beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \delta}{\beta} \cdot r + \frac{\delta}{\beta} \cdot u.$$

Somit ergibt sich

$$(rusv) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \delta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = 1 - (rsuv).$$

Die zweite Identität kann man auf ähnliche Weise überprüfen oder mit den bisherigen Ergebnissen folgendermaßen ableiten:

$$(DBC A) = \frac{1}{(BDC A)} = (BDA C) = 1 - (BAD C) = 1 - \frac{1}{(ABDC)} = 1 - (ABCD).$$

Damit sind alle Behauptungen überprüft.  $\square$

## III.6.2 Invarianz unter projektiven Transformationen

Es seien  $M \in \mathrm{GL}_3(k)$  und

$$\begin{aligned} \varphi_M: \mathbb{P}_k^2 &\longrightarrow \mathbb{P}_k^2 \\ [v] &\longmapsto [M \cdot v] \end{aligned}$$

die induzierte projektive Transformation.

**III.6.4 Satz.** *Unter den geschilderten Umständen gilt*

$$(\varphi_M(A) \varphi_M(B) \varphi_M(C) \varphi_M(D)) = (ABCD)$$

*für jedes Tupel  $(A, B, C, D)$  von vier verschiedenen kollinearen Punkten.*

*Beweis.* Wir wählen Vektoren  $r, s, u, v \in k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  mit  $A = [r], B = [s], C = [u], D = [v]$  und benutzen die Darstellungen aus (III.7). Es gilt dann  $\varphi_M(A) = [M \cdot r], \varphi_M(B) = [M \cdot s], \varphi_M(C) = [M \cdot u]$  und  $\varphi_M(D) = [M \cdot v]$ . Ferner gilt

$$M \cdot u = M \cdot (\alpha \cdot r + \beta \cdot s) = \alpha \cdot (M \cdot r) + \beta \cdot (M \cdot s)$$

sowie

$$M \cdot v = M \cdot (\gamma \cdot r + \delta \cdot s) = \gamma \cdot (M \cdot r) + \delta \cdot (M \cdot s).$$

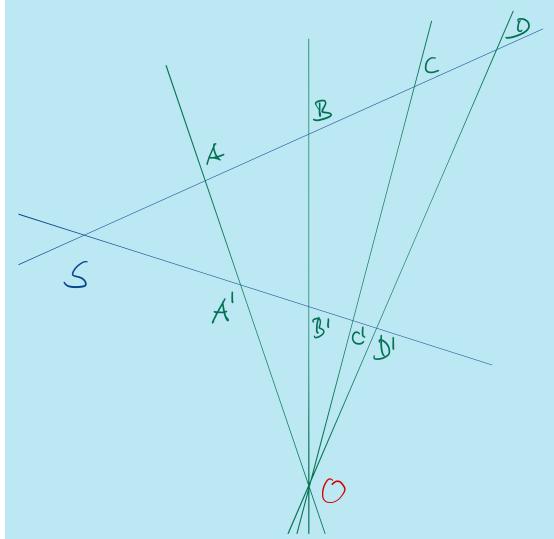
Die Gleichung

$$(\varphi_M(A) \varphi_M(B) \varphi_M(C) \varphi_M(D)) = ((M \cdot r)(M \cdot s)(M \cdot u)(M \cdot v)) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = (A B C D)$$

ist nun offensichtlich.  $\square$

**III.6.5 Beispiel.** Es seien  $\gamma, \gamma' \subset \mathbb{P}_k^2$  zwei verschiedene Geraden und  $S \in \mathbb{P}_k^2$  ihr Schnittpunkt. Es seien  $(A, B, C, D)$  bzw.  $(A', B', C', D')$  ein Tupel von vier verschiedenen Punkten auf  $\gamma \setminus \{S\}$  bzw.  $\gamma' \setminus \{S\}$ , so dass sich die Geraden  $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$  und  $\overline{DD'}$  in einem Punkt  $O$  schneiden. Es gibt gemäß Fall B) aus III.5.3 Beispiel eine Zentralkollination  $\pi$  mit Achse  $\overline{OS}$  und Zentrum  $O$ , so dass  $\pi(A) = A'$ . Unter  $\pi$  wird  $\gamma = \overline{SA}$  auf  $\pi(\gamma) = \overline{SA'} = \gamma'$  abgebildet. Es folgt  $\pi(B) = B', \pi(C) = C', \pi(D) = D'$  sowie

$$(A' B' C' D') = (\pi(A) \pi(B) \pi(C) \pi(D)) \stackrel{\text{III.6.4}}{=} (A B C D).$$



Es ist weiter interessant zu sehen, dass dieser Satz auch umgekehrt werden kann. Zur Vorbereitung benötigen wir das folgende Ergebnis.

**III.6.6 Hilfssatz.** Es seien  $\gamma \subset \mathbb{P}_k^2$  eine Gerade,  $A, B, C \in \gamma$  drei verschiedene Punkte auf dieser Geraden und  $X, Y \in \gamma \setminus \{A, B, C\}$ . Wenn

$$(A B C X) = (A B C Y),$$

dann  $X = Y$ .

*Beweis.* Wir wählen Vektoren  $r, s, u, v, w$ , so dass  $[A] = [r], B = [s], C = [u], X = [v], Y = [w]$  und schreiben

$$u = \alpha \cdot r + \beta \cdot s, \quad v = \gamma \cdot r + \delta \cdot s \quad \text{und} \quad w = \lambda \cdot r + \mu \cdot s.$$

Aus der angenommenen Gleichung

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = (A B C X) = (A B C Y) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\lambda}{\mu}$$

folgern wir  $\lambda/\mu = \gamma/\delta$ , so dass

$$\frac{\gamma}{\lambda} \cdot w = \gamma \cdot r + \frac{\gamma}{\lambda} \cdot \mu \cdot s = \gamma \cdot r + \frac{\delta}{\mu} \cdot \mu \cdot s = v$$

und  $Y = [w] = [(\gamma/\lambda) \cdot w] = [v] = X$ .  $\square$

**III.6.7 Satz.** Es seien  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  und  $(A_2, B_2, C_2, D_2)$  zwei Tupel von jeweils vier verschiedenen kollinearen Punkten, so dass

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2).$$

Dann existiert eine projektive Transformation  $\varphi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ , so dass

$$A_2 = \varphi(A_1), \quad B_2 = \varphi(B_1), \quad C_2 = \varphi(C_1) \quad \text{und} \quad D_2 = \varphi(D_1).$$

*Beweis.* Wir beginnen mit einer projektiven Transformation  $\psi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  mit  $\psi(A_1) = A_2$  und  $\psi(B_1) = B_2$ . Dann wird die Gerade  $\overline{A_1 B_1}$  auf die Gerade  $\overline{A_2 B_2}$  abgebildet. Wenn  $\psi(C_1) = C_2$ , setzen wir  $\varkappa = \text{id}_{\mathbb{P}_k^2}$ . Ansonsten wählen wir eine Gerade  $\gamma \neq \overline{A_2 B_2}$ , die  $\overline{A_2 B_2}$  im Punkt  $A_2$  schneidet, und finden mit Fall A) aus III.5.3 Beispiel eine Zentralkollineation  $\varkappa: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  mit Achse  $\gamma$  und Zentrum  $B_2$ , die  $\psi(C_1)$  auf  $C_2$  abbildet. Für  $\varphi := \varkappa \circ \psi$  gilt nun  $\varphi(A_1) = A_2$ ,  $\varphi(B_1) = B_2$  und  $\varphi(C_1) = C_2$ . Weiter haben wir nach Voraussetzung und III.6.4 Satz

$$(A_2 B_2 C_2 D_2) = (A_1 B_1 C_1 D_1) = (\varphi(A_1) \varphi(B_1) \varphi(C_1) \varphi(D_1)) = (A_2 B_2 C_2 \varphi(D_1)).$$

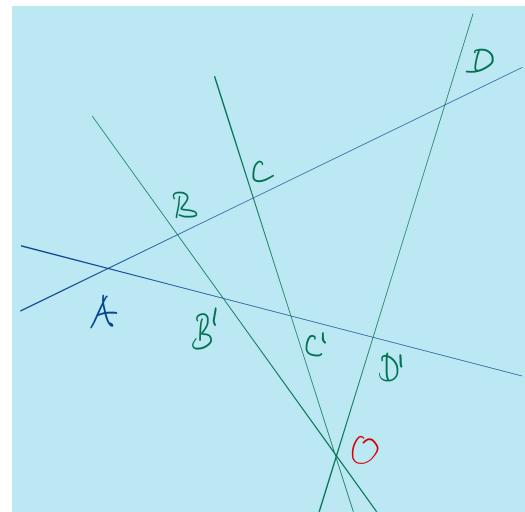
Der vorige Hilfssatz zeigt nun, dass auch  $\varphi(D_1) = D_2$ .  $\square$

**III.6.8 Beispiel.** Es seien  $\gamma, \gamma' \subset \mathbb{P}_k^2$  zwei verschiedene Geraden und  $A \in \mathbb{P}_k^2$  ihr Schnittpunkt. Weiter seien  $(B, C, D)$  bzw.  $(B', C', D')$  jeweils drei verschiedene Punkte aus  $\gamma \setminus \{A\}$  bzw.  $\gamma' \setminus \{A\}$ . Wir setzen voraus, dass

$$(A B C D) = (A B' C' D').$$

Es sei  $O$  der Schnittpunkt von  $\overline{BB'}$  und  $\overline{CC'}$ . Wir können wieder nach Fall B) in III.5.3 Beispiel eine Zentralkollineation  $\varkappa: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  mit Achse  $\overline{OA}$  und Zentrum  $O$  finden, die  $B$  auf  $B'$  abbildet. Dann wird  $\gamma = \overline{AB}$  auf  $\varkappa(A)\varkappa(B) = \overline{AB'}$  abgebildet, und es folgt  $\varkappa(C) = C'$ . Außerdem liegt  $\varkappa(D)$  auf  $\gamma'$ . Wir haben

$$\begin{aligned} (A B' C' D') &= (A B C D) \\ &\stackrel{\text{III.6.4}}{=} (\varkappa(A) \varkappa(B) \varkappa(C) \varkappa(D)) \\ &= (A B' C' \varkappa(D)). \end{aligned}$$

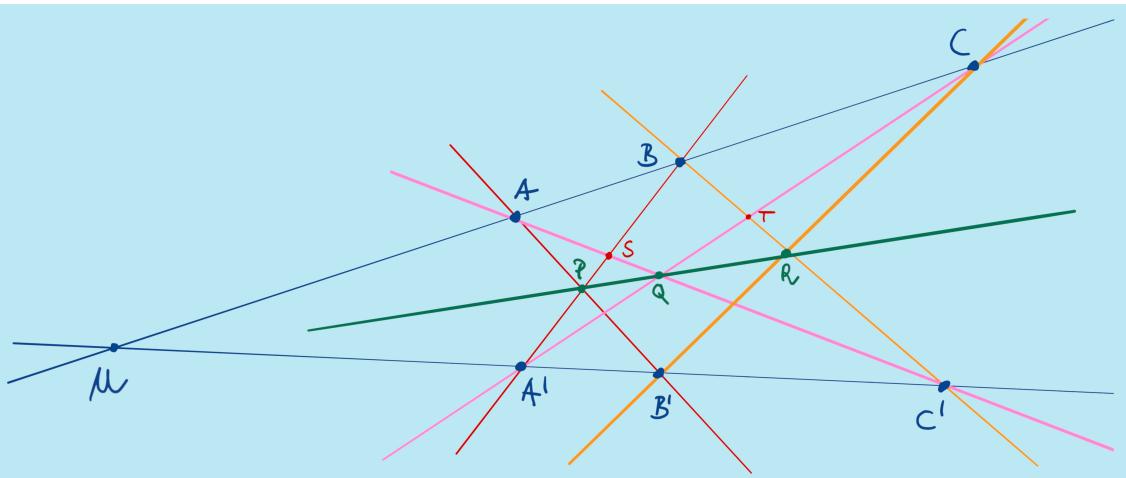


Aus III.6.6 Hilfssatz folgt  $D' = \varkappa(D)$ . Da  $\varkappa(D)$  auf Grund der Eigenschaften von  $\varkappa$  auf der Geraden  $\overline{DO}$  liegt, bedeutet dies, dass  $\overline{DD'}$  ebenfalls durch  $O$  geht.

### III.6.3 Der Satz von Pappos

Das Ergebnis aus diesem Abschnitt gehört zum klassischen Repertoire der Geometrie. Es ist im Werk des griechischen Mathematikers und Astronoms Pappos von Alexandria<sup>30</sup> enthalten ([31], (207) (Prop. 139), S. 272).

**III.6.9 Der Satz von Pappos.** *Es seien  $\gamma, \gamma' \subset \mathbb{P}_k^2$  zwei verschiedene Geraden und  $U$  ihr Schnittpunkt. Weiter seien  $(A, B, C)$  drei verschiedene Punkte aus  $\gamma \setminus \{U\}$  und  $(A', B', C')$  drei verschiedene Punkte aus  $\gamma' \setminus \{U\}$ . Dann sind der Schnittpunkt  $P$  der Geraden  $\overline{AB}, \overline{A'B}$ , der Schnittpunkt  $Q$  der Geraden  $\overline{AC}, \overline{A'C}$  und der Schnittpunkt  $R$  der Geraden  $\overline{BC}, \overline{B'C}$  kollinear.*



*Beweis.* Es sei zunächst  $S$  der Schnittpunkt der Geraden  $\overline{AC}$  und  $\overline{A'B}$ . Es gibt eine Zentralkollination mit Achse  $\overline{AA'}$  und Zentrum  $A$ , die  $P$  auf  $B'$  abbildet (Fall B) in III.5.3 Beispiel). Es gilt dann  $\varkappa_1(S) = C'$  und  $\varkappa_1(B) = U$ . Aus III.6.4 Satz folgt

$$(UA' B' C') = (\varkappa_1(B) \varkappa_1(A') \varkappa_1(P) \varkappa_1(S)) = (BA' PS).$$

Mit  $T$  bezeichnen wir den Schnittpunkt von  $\overline{A'C}$  und  $\overline{BC}$ . Es existiert eine Zentral-Kollination  $\varkappa_2$  mit Achse  $\overline{CC'}$  und Zentrum  $C$ , die  $R$  auf  $B'$  abbildet. Wir haben dann  $\varkappa_2(T) = A'$  und  $\varkappa_2(B) = U$ , so dass

$$(UA' B' C') = (\varkappa_2(B) \varkappa_2(T) \varkappa_2(R) \varkappa_2(C')) = (BT RC').$$

Wir schließen

$$(BA' PS) = (BT RC').$$

Aus III.6.8 Beispiel folgern wir, dass sich die Geraden  $\overline{AT}$ ,  $\overline{PR}$  und  $\overline{SC'}$  in einem Punkt schneiden. Es gilt  $\overline{AT} = \overline{A'C}$  und  $\overline{SC'} = \overline{AC'}$ . Der Schnittpunkt von  $\overline{AT}$  und  $\overline{SC'}$  ist also  $Q$ . Da  $\overline{PR}$  laut unserer Beobachtung auch durch  $Q$  geht, ist der Satz bewiesen.  $\square$

**III.6.10 Bemerkung.** Der Satz von Pappos spielt ebenfalls eine wichtige Rolle in der axiomatischen Geometrie (vgl. III.4.6 Bemerkung). Ein als Satz von Hessenberg<sup>31</sup> bekanntes

<sup>30</sup>Er lebte vermutlich im vierten Jahrhundert u.Z..

<sup>31</sup>Gerhard Hessenberg (1874 - 1925), deutscher Mathematiker.

Resultat ([26], 1.10. Satz) besagt, dass in jeder projektiven Ebene  $\mathbb{P}$  (wie in III.4.6 Bemerkung definiert), in der der Satz von Pappos gilt, auch der Satz von Desargues wahr ist. Die projektiven Ebenen, in denen der Satz von Pappos gilt, sind gerade diejenigen Ebenen, die isomorph zu  $\mathbb{P}_k^2$  für einen geeigneten Körper  $k$  (im herkömmlichen Sinne) sind ([26], 1.2. Satz). Die Klassifikation der papposchen und desargueschen Ebenen zeigt, dass es projektive Ebenen gibt, in denen der Satz von Desargues gilt, nicht aber der Satz von Pappos.

*III.6.11 Aufgaben.* a) Formulieren Sie wie in der Bemerkung zu Aufgabe III.2.7 vorgeschlagen die duale Version des Satzes von Pappos.

b) Erklären Sie genau, wie der duale Satz von Pappos aus III.6.9 Satz und der in III.2.7 Aufgaben eingeführten Dualität folgt.

### III.6.4 Eine Anwendung des Doppelverhältnisses

Projektive Geometrie im Allgemeinen und das Doppelverhältnis im Besonderen spielen auf Grund der perspektivischen Abbildungen eine wichtige Rolle bei der Auswertung von Fotografien. Eine Internetrecherche wird Ihnen eine Unzahl an Forschungsartikeln zu diesem Thema liefern. Ein zufällig ausgewählter Artikel neueren Datums ist [6]. In dem amüsanten Artikel [15] wird das Doppelverhältnis dazu verwendet, um die Akkuratesse der perspektiven Darstellung alter Meister zu bewerten. Der Artikel [28] untersucht gewisse Aspekte der Architektur mit Hilfe des Doppelverhältnisses.

Da wir den euklidischen Abstand verwenden werden, arbeiten wir über dem Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen. Es sei  $E \subset \mathbb{R}^3$  eine Ebene mit  $(0, 0, 0) \notin E$ . Dann ist

$$\iota_E: E \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

eine injektive Abbildung. Es seien  $\lambda_3 \in \mathbb{R}^*$  und  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  reelle Zahlen, so dass

$$E = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_0 \cdot a_0 + \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 = 0\}.$$

Weiter ist

$$L_E = \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_0 \cdot a_0 + \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 = 0\}$$

ein zweidimensionaler Teilraum. Die Gerade  $\ell_E := \mathbb{P}(L_E)$  ist die unendlich ferne Gerade für  $E$ , i.e.,

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \iota_E(E) \cup \mathbb{P}(L_E).$$

Es seien  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  vier verschiedene kollineare Punkte in der Ebene. Der Vektor  $\beta - \alpha$  ist ein Richtungsvektor für die Gerade  $\ell$  durch  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$ . Für  $\sigma, \varrho \in \ell$  existiert eine Zahl  $\eta \in \mathbb{R}$  mit

$$\sigma - \varrho = \eta \cdot (\beta - \alpha),$$

und wir schreiben

$$\varrho < \sigma, \quad \text{falls } \eta > 0.$$

Wir setzen

$$\alpha < \beta < \gamma < \delta \tag{III.8}$$

voraus. Weiter ist  $\alpha$  ein Aufpunkt. Zu  $\xi \in \ell$  existiert also eine reelle Zahl  $\lambda$  mit

$$\xi = \lambda \cdot (\beta - \alpha) + \alpha = (1 - \lambda) \cdot \alpha + \lambda \cdot \beta.$$

Dementsprechend schreiben wir

$$\gamma = (1 - \mu) \cdot \alpha + \mu \cdot \beta \quad \text{und} \quad \delta = (1 - \nu) \cdot \alpha + \nu \cdot \beta.$$

Gemäß III.6.2 Definition gilt für das Doppelverhältnis von  $A := \iota_E(\alpha)$ ,  $B := \iota_E(\beta)$ ,  $C := \iota_E(\gamma)$  und  $D = \iota_E(\delta)$  die Formel

$$(A B C D) = \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot \frac{1 - \nu}{\nu}.$$

Nun beachte man, dass

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma &= \mu \cdot \alpha - \mu \cdot \beta = -\mu \cdot (\beta - \alpha), \\ \beta - \gamma &= (1 - \mu) \cdot (\beta - \alpha), \\ \alpha - \delta &= -\nu \cdot (\beta - \alpha), \\ \beta - \delta &= (1 - \nu) \cdot (\beta - \alpha).\end{aligned}$$

Gemäß der Annahme (III.8) über die Anordnung der Punkte gilt  $\mu > 1$  und  $\nu > 1$ , so dass

$$\begin{aligned}d(\alpha, \gamma) &= \mu \cdot \|\beta - \alpha\|, \\ d(\beta, \gamma) &= (\mu - 1) \cdot \|\beta - \alpha\|, \\ d(\alpha, \delta) &= \nu \cdot \|\beta - \alpha\|, \\ d(\beta, \delta) &= (\nu - 1) \cdot \|\beta - \alpha\|.\end{aligned}$$

Demnach erhalten wir

$$(A B C D) = \frac{d(\alpha, \gamma)}{d(\beta, \gamma)} \cdot \frac{d(\beta, \delta)}{d(\alpha, \delta)}. \quad (\text{III.9})$$

Für andere Anordnungen der Punkte verwenden wir die Vertauschungsformeln aus III.6.3 Lemma.

*III.6.12 Beispiele.* i) In der Abbildung



wurden (in einer entsprechenden Vergößerung) folgende Abstände gemessen:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= 8,5 \text{ cm}, & d(B, C) &= 5,5 \text{ cm}, \\ d(C, D) &= 2 \text{ cm}, & d(D, F) &= 8,5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Ferner ist bekannt, dass das rechte Haus die Breite 9m hat und das zweite Haus von rechts die Breite 7m. Gesucht ist die Breite  $w$  (inkl. Bürgersteig) der Straße zwischen den beiden Häusern.

Die „Fotografie“ oder das Bild entsteht (von Fehlern des Künstlers oder optischen Verzerrungen abgesehen) durch eine perspektivische Abbildung zwischen zwei Ebenen in  $\mathbb{R}^3$ . In Abschnitt III.5 wurde erklärt, wie eine perspektivische Abbildung als projektive Transformation interpretiert werden kann. Auf Basis dieser Überlegungen und der Invarianz des Doppelverhältnisses unter projektiven Transformationen (III.6.4 Satz) schließen wir, dass ein Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten auf der Abbildung mit dem Doppelverhältnis der entsprechenden Punkte im Vorbild übereinstimmt. Mit der obigen Messung und (III.9) berechnen wir

$$(A B C D) = \frac{d(A, C) \cdot d(B, D)}{d(B, C) \cdot d(A, D)} = \frac{14 \cdot 7,5}{5,5 \cdot 16} \approx 1,2.$$

Das entsprechende Doppelverhältnis in der „realen Welt“ ist

$$\frac{(9 + w) \cdot (w + 7)}{w \cdot (w + 16)}.$$

Dies ergibt die quadratische Gleichung

$$0,2 \cdot w^2 + 3,2 \cdot w - 63 = 0$$

für  $w$ , deren positive Lösung ungefähr 11,5 ist. Die gesuchte Breite ist also 11,5m.

ii) Nun möchten wir eine Aufnahme aus der Luft auswerten. Genauer möchten wir herausfinden, wie weit der Bus von der Kreuzung entfernt ist. Die Vorderkante des Busses befindet sich an Position  $A$ , das 1km-Schild an Position  $B$ , das 250m-Schild an Position  $C$  und der Beginn der Kreuzung an Position  $D$ . Die Messungen am Bild ergeben:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= 3,5 \text{ cm}, \\ d(B, C) &= 4,5 \text{ cm}, \\ d(C, D) &= 2 \text{ cm}, \end{aligned}$$

so dass

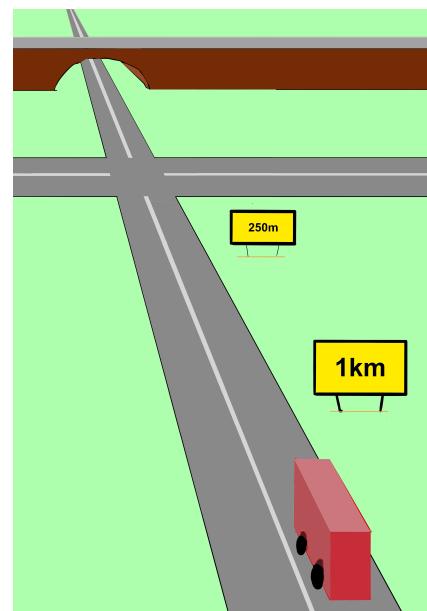
$$(A B C D) = \frac{d(A, C) \cdot d(B, D)}{d(B, C) \cdot d(A, D)} = \frac{8 \cdot 6,5}{4,5 \cdot 10} \approx 1,16.$$

Für den gesuchten Wert  $\ell$  (in km) haben wir

$$\frac{\ell - 0,25}{0,75 \cdot \ell}.$$

Es folgt

$$\ell - 0,25 = 0,87 \cdot \ell, \quad \text{d.h.,} \quad 0,13 \cdot \ell = 0,25.$$



Die Antwort ist also, dass der Bus noch etwa 1,9km von der Kreuzung entfernt ist.<sup>32</sup>

*III.6.13 Aufgabe.* In III.6.12 Beispiele, ii), befindet sich die Brücke auf dem Foto in Position  $X$ . Auf dem Foto wurde  $d(D, X) = 2,5\text{cm}$  gemessen. Bestimmen Sie den Abstand der Brücke von der Kreuzung.

Jetzt nehmen wir an, dass drei verschiedene kollineare Punkte  $\beta, \gamma$  und  $\delta$  in  $E$  gegeben sind. Es seien  $\ell$  die durch diese Punkte bestimmte Gerade und  $\alpha$  ein Richtungsvektor der euklidischen Länge eins für  $\ell$ . Für  $\sigma, \varrho \in \ell$  existiert eine Zahl  $\eta \in \mathbb{R}$  mit

$$\sigma - \varrho = \eta \cdot \alpha,$$

und wir schreiben

$$\varrho < \sigma, \quad \text{falls } \eta > 0.$$

Hier nehmen wir

$$\beta < \gamma < \delta$$

an. Es gilt nun

$$\gamma = d(\beta, \gamma) \cdot \alpha + \beta \quad \text{und} \quad \delta = d(\beta, \delta) \cdot \alpha + \beta.$$

Die vier Punkte  $A = [\alpha]$ ,  $B := \iota_E(\beta)$ ,  $C := \iota_E(\gamma)$  und  $D := \iota_E(\delta)$  sind kollinear, und wir finden nun

$$(A B C D) = \frac{d(\beta, \delta)}{d(\beta, \gamma)}. \tag{III.10}$$

Für andere Anordnungen der Punkte bemühen wir wieder III.6.3 Lemma.

*III.6.14 Beispiel.* In III.6.12 Beispiel, i), gilt

$$(F C B A) = \frac{d(A, C) \cdot d(B, F)}{d(B, C) \cdot d(A, F)} = \frac{15 \cdot 16}{5,5 \cdot 24,5} \approx 1,78.$$

Der Punkt im Original, der  $F$  entspricht, ist unendlich fern. Nach Formel (III.10) finden wir für das Doppelverhältnis

$$\frac{d(A, C)}{d(B, C)} = \frac{w+9}{w},$$

d.h.,

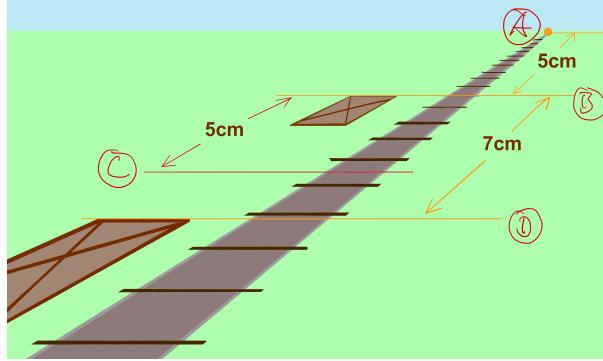
$$0,78 \cdot w = 9.$$

Die ergibt wie zuvor den Wert 11,5m.

*III.6.15 Aufgabe.* Das nachfolgende Bild zeigt eine Bahnstrecke mit zwei Bahnhöfen. Ein Zug fahrt vom Bahnhof, der sich auf der Abbildung links befindet, zum zweiten Bahnhof. Die Spitze eines Zugs befindet sich an Position  $C$ , und  $A$  sei der Fluchtpunkt der Abbildung. Die in der Abbildung angegebenen Entfernungswerte wurden auf der Abbildung in der Mitte der Schienen gemessen. Es ist bekannt, dass die beiden Bahnhöfe 60km voneinander entfernt sind. Wie weit ist der Zug vom zweiten Bahnhof entfernt?

---

<sup>32</sup>Die Abweichung vom Eindruck ist darin begründet, dass die Entfernungswerte auf den Schildern frei erfunden sind.



## III.7 Quadriken im projektiven Raum

In Abschnitt III.1 über perspektivische Abbildungen haben wir spekuliert, dass in der projektiven Geometrie Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln zusammenfallen. Jetzt möchten wir die formalen Grundlagen legen, um dies als präzise Aussage zu formulieren. Dazu definieren wir Quadriken in projektiven Räumen beliebiger Dimension. Mit den Techniken aus Abschnitt II.2.3 können wir projektive Quadriken bis auf projektive Äquivalenz klassifizieren. Schließlich müssen wir beschreiben, wie affine und projektive Quadriken zusammenhängen.

Wir arbeiten jetzt wieder über dem Körper der reellen Zahlen.<sup>33</sup> Es seien  $n \geq 1$  und

$$q(x_0, \dots, x_n) := \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

ein homogenes Polynom vom Grad zwei (s. Abschnitt II.2.3). Man beachte

$$\forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad q(\lambda \cdot a_0, \dots, \lambda \cdot a_n) = \lambda^2 \cdot q(a_0, \dots, a_n). \quad (\text{III.11})$$

Das Polynom  $q$  nimmt also in der Regel auf verschiedenen Repräsentanten eines Punkts  $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  verschiedene Wert an. Wegen (III.11) gilt jedoch:

$$\begin{aligned} \forall (a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n : \quad & [a_0 : \dots : a_n] = [b_0 : \dots : b_n] \\ \implies & (q(a_0, \dots, a_n) = 0 \iff q(b_0, \dots, b_n) = 0). \end{aligned}$$

Deswegen ist

$$\overline{V}(q) := \{ [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid q(a_0, \dots, a_n) = 0 \}$$

wohldefiniert.

**III.7.1 Definition.** Eine Teilmenge  $Q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  heißt *Quadrik*, wenn es ein homogenes Polynom  $q$  vom Grad zwei gibt, so dass

$$Q = \overline{V}(q).$$

Eine Quadrik in der projektiven Ebene  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  nennen wir auch *Konik*.

---

<sup>33</sup>In diesem und im nächsten Abschnitt benötigen wir nur einen Körper  $k$ , in dem  $1 + 1 \neq 0$  gilt. Die Resultate in Abschnitt III.7.2 hängen von II.2.27 Spektralsatz ab und erfordern die Voraussetzung  $k = \mathbb{R}$ .

*III.7.2 Bemerkung.* Es sei  $q(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei. Wir können

$$V(q) = \{ (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(a_0, \dots, a_n) = 0 \}$$

und

$$\bar{V}(q) = \{ [a_0 : \dots : a_n] \mid q(a_0, \dots, a_n) = 0 \}$$

betrachten. Wie in Abschnitt III.2 sei

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \\ (a_0, \dots, a_n) &\longmapsto [a_0 : \dots : a_n]. \end{aligned}$$

Es gilt

$$V(q) = \pi^{-1}(\bar{V}(q)) \cup \{0\},$$

d.h.,  $V(q)$  ist der affine Kegel über  $\bar{V}(q)$ .

### III.7.1 Tangentialräume

Tangenten an parametrisierte Kurven haben wir in Abschnitt I.4.1 eingeführt und in den Sätzen I.4.2, I.4.5 und I.4.8 explizite Gleichungen von Tangenten an Koniken hergeleitet. In II.2.22 Bemerkungen, iv), haben wir Tangentialräume an Quadriken besprochen. Wir nehmen die Beschreibung aus dieser Bemerkung als Ausgangspunkt für die Definition von Tangentialräumen an projektive Quadriken.

**III.7.3 Definition.** Es sei  $q(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei. Ein Punkt  $P = [a_0 : \dots : a_n] \in \bar{V}(q)$  ist ein *glatter Punkt*, wenn es einen Index  $i_0 \in \{0, \dots, n\}$  gibt, so dass<sup>34</sup>

$$\frac{\partial q}{\partial x_{i_0}}(a_0, \dots, a_n) \neq 0.$$

In diesem Fall ist

$$T_P(\bar{V}(q)) = \left\{ [b_0 : \dots : b_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid \sum_{i=0}^n b_i \cdot \frac{\partial q}{\partial x_i}(a_0, \dots, a_n) = 0 \right\}$$

der *Tangentialraum* an  $\bar{V}(q)$  in  $P$ . Wenn  $(\partial q)/(\partial x_{i_0})(a_0, \dots, a_n) = 0$ ,  $i = 0, \dots, n$ , nennt man  $P$  einen *singulären Punkt* von  $\bar{V}(q)$ .

*III.7.4 Aufgabe.* Es sei  $q(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei. Beweisen Sie die *Euler*<sup>35</sup>-Formel

$$\sum_{i=0}^n x_i \cdot \frac{\partial q}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_n) = 2 \cdot q(x_0, \dots, x_n). \quad (\text{III.12})$$

<sup>34</sup>Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  ist  $(\partial q)/(\partial x_i)(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes lineares Polynom. Wie zuvor erkennt man, dass die angegebene Bedingung unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten für  $P$  ist.

<sup>35</sup>Leonhard Euler (1707 - 1783), schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom, Geograph, Logiker und Ingenieur.

*III.7.5 Bemerkungen.* i) Wenn  $q(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei ist und  $i_0 \in \{0, \dots, n\}$ , dann ist  $(\partial q)/(\partial x_{i_0})(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes lineares Polynom. Die Bedingung, ein glatter bzw. singulärer Punkt zu sein, und die Definition des Tangentialraums an  $\bar{V}(q)$  in  $P$  hängen also nicht von der Auswahl des Repräsentanten von  $P$  ab.

ii) Es seien  $q(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei und  $(a_0, \dots, a_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . Es gilt genau dann  $(a_0, \dots, a_n) \in V(q)$ , wenn  $[a_0 : \dots : a_n] \in \bar{V}(q)$ . In diesem Fall ist  $V(q)$  genau dann glatt in  $(a_0, \dots, a_n)$ , wenn  $\bar{V}(q)$  glatt in  $[a_0 : \dots : a_n]$  ist. Dies folgt aus II.2.22 Bemerkungen, iv). Schließlich beachte man, dass  $(0, \dots, 0)$  immer ein singulärer Punkt von  $V(q)$  ist.

iii) Es seien  $q(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei und  $P = [a_0 : \dots : a_n]$  ein glatter Punkt von  $\bar{V}(q)$ . Auf Grund von (III.12) gilt

$$P \in T_P(\bar{V}(q)). \quad (\text{III.13})$$

Wir setzen

$$\ell(x_0, \dots, x_n) := \sum_{i=0}^n x_i \cdot \frac{\partial q}{\partial x_i}(a_0, \dots, a_n).$$

Es gilt dann

$$T_P(\bar{V}(q)) = \bar{V}(\ell) = \{[b_0 : \dots : b_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid \ell(b_0, \dots, b_n) = 0\}.$$

Man wähle  $\lambda \in k^\star$  und definiere  $v_\lambda := (\lambda \cdot a_0, \dots, \lambda \cdot a_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . Nach II.2.22 Bemerkungen, iv), ist  $T_{v_\lambda}(V(q)) = V(\ell(x_0 - \lambda \cdot a_0, \dots, x_n - \lambda \cdot a_n))$  der Tangentialraum an  $V(q)$  in  $v_\lambda$ . Dies ist die Translation des linearen Teilraums  $V(\ell)$  um den Vektor  $v_\lambda$ . Nun gilt aber nach der Eulerformel (III.12)  $v_\lambda \in V(\ell)$ . Die Translation eines linearen Teilraums um einen Vektor in diesem Teilraum überführt diesen linearen Teilraum in sich, so dass

$$V(\ell(x_0 - \lambda \cdot a_0, \dots, x_n - \lambda \cdot a_n)) = V(\ell).$$

Damit ist der Tangentialraum an  $V(q)$  in jedem Punkt der Geraden  $\{(\lambda \cdot a_0, \dots, \lambda \cdot a_n) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  außer dem Ursprung derselbe, nämlich  $V(\ell)$ ,<sup>36</sup> und dies ist der affine Kegel über dem Tangentialraum  $T_P(\bar{V}(q))$ , i.e.,

$$T_{v_\lambda}(V(q)) = \pi^{-1}(T_P(\bar{V}(q))) \cup \{(0, \dots, 0)\}, \quad \lambda \in k^\star.$$

iv) Es seien  $q(x_0, \dots, x_n)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei und  $(a_0, \dots, a_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . Falls  $(\partial q)/(\partial x_i)(a_0, \dots, a_n) = 0$ ,  $i = 0, \dots, n$ , dann gilt  $[a_0 : \dots : a_n] \in \bar{V}(q)$  nach (III.12).

**III.7.6 Lemma.** *Es seien  $q_1(x_0, \dots, x_n)$  und  $q_2(x_0, \dots, x_n)$  zwei homogene Polynome vom Grad zwei, so dass*

★  $\bar{V}(q_1) = \bar{V}(q_2)$  und

★ es einen glatten Punkt  $P \in \bar{V}(q_1)$  gibt.

Dann existiert eine reelle Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}^\star$  mit  $q_2 = \lambda \cdot q_1$ .

---

<sup>36</sup>Dies sollte man sich mit Hilfe des Kegels aus Abschnitt I.1.2 veranschaulichen.

*Beweis.* Nach III.7.2 Bemerkung gilt auch

$$V(q_1) = V(q_2) \subset k^{n+1}.$$

Wie in III.7.5 Bemerkungen, iii), erklärt gibt es auch einen glatten Punkt  $v \in V(q_1) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . Daher gibt es nach II.2.23 Satz eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  mit  $q_2 = \lambda \cdot q_1$ .  $\square$

*III.7.7 Bemerkung.* Für jedes homogene Polynom  $q$  vom Grad zwei und jede Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  gilt

$$V(q) = V(\lambda \cdot q).$$

Es sei

$$\mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_2 := \{ q(x_0, \dots, x_n) \mid q \text{ ist ein homogenes Polynom vom Grad zwei} \} \cup \{0\}.$$

Dies ist ein reeller Vektorraum der Dimension

$$n + 1 + \frac{(n + 1) \cdot n}{2} = \frac{(n + 2) \cdot (n + 1)}{2}.$$

Die Projektivierung

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_2)$$

dieses Vektorraums können wir als Parameterraum für Quadriken in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  ansehen. Es gibt in diesem Raum eine offene Teilmenge  $U$ , die diejenigen Quadriken parametrisiert, die keine singulären Punkte haben (s. III.7.12 Bemerkungen, i)).

## III.7.2 Die Klassifikation von Quadriken bis auf projektive Äquivalenz

Es sei

$$q(x_0, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

ein homogenes Polynom vom Grad zwei. Wir definieren die symmetrische  $((n + 1) \times (n + 1))$ -Matrix  $C_q = (\gamma_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$  über

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= d_{ii}, \quad i = 0, \dots, n, \\ \gamma_{ji} &:= \gamma_{ij} := \frac{1}{2} \cdot d_{ij}, \quad 0 \leq i \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Damit gilt für Spaltenvektoren

$$\forall v = (a_0, \dots, a_n)^t \in k^{n+1} : \quad q(a_0, \dots, a_n) = v^t \cdot C_q \cdot v.$$

Es seien nun  $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$  und

$$A \cdot V(q) = \{ A \cdot v \mid v \in V(q) \}.$$

Weiter sei  $A \star q$  das homogene Polynom vom Grad zwei, das die Gleichung

$$C_{A \star q} = (A^{-1})^t \cdot C_q \cdot A^{-1}$$

erfüllt. Damit haben wir

$$A \cdot V(q) = V(A \star q). \quad (\text{III.14})$$

Entsprechend gilt für die Quadrik  $\bar{V}(q)$  im projektiven Raum und die projektive Transformation  $[A] \in \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$[A] \cdot \bar{V}(q) := \left\{ \left[ A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right] \mid [a_0 : \cdots : a_n] \in \bar{V}(q) \right\} = \bar{V}(A \star q).$$

**III.7.8 Satz.** Es sei  $Q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  eine Quadrik. Dann gibt es eine projektive Transformation  $[A] \in \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$  und natürliche Zahlen  $s \geq t$  mit  $1 \leq s+t \leq n+1$ , so dass

$$[A] \cdot Q = V(x_0^2 + \cdots + x_{s-1}^2 - x_s^2 - \cdots - x_{s+t-1}^2).$$

*Beweis.* Dies folgt mit den Argumenten, die wir im Beweis von II.2.32 Satz verwendet haben. Wir überlassen es der Leserin bzw. dem Leser, den Beweis anzupassen.  $\square$

**III.7.9 Aufgabe.** Es sei  $n \geq 1$ . Wie sieht die Klassifikation von Quadriken im komplex projektiven Raum  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  aus? Erläutern Sie Ihr Ergebnis möglichst genau.

**III.7.10 Beispiel.** Es sei  $n = 2$ . Für  $s = 1$  und  $t = 0$  haben wir  $\bar{V}(x_0^2)$ . Dies ist eine (doppelt zu zählende) Gerade. Die Werte  $s = 1 = t$  ergeben  $\bar{V}(x_0^2 - x_1^2)$ . Da  $x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1) \cdot (x_0 + x_1)$  ist dies die Vereinigung zweier verschiedener Geraden, die sich im Punkt  $[0 : 0 : 1]$  schneiden. Mit  $s = 2$  und  $t = 0$  erhalten wir  $\bar{V}(x_0^2 + x_1^2) = \{[0 : 0 : 1]\}$ , also einen einzigen Punkt. Für  $s = 2$  und  $t = 1$  finden wir  $Q = \bar{V}(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2)$ . Dies ist eine Konik ohne singuläre Punkte. Diese Konik enthält keinen Punkt der Form  $[a : b : 0]$ . In der Notation von Abschnitt III.3.1 liegt sie im Bild der Einbettung  $\iota_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ,  $(a, b) \mapsto [a : b : 1]$ . Offenbar ist  $Q$  das Bild des Einheitskreises unter der Einbettung  $\iota_2$ . Schließlich gilt für  $s = 3$  und  $t = 0$ , dass

$$\bar{V}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) = \emptyset.$$

Man beachte, dass die Diskriminante (s. III.7.12 Bemerkungen, i) für  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  ungleich Null ist.

**III.7.11 Aufgabe.** Es seien  $s, t \in \mathbb{N}$  mit  $s \geq t$  und  $1 \leq s+t \leq n+1$ . Bestimmen Sie die singulären Punkte von

$$\bar{V}(x_0^2 + \cdots + x_{s-1}^2 - x_s^2 - \cdots - x_{s+t-1}^2) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2.$$

Haben Sie eine Interpretation für Ihr Ergebnis?

**III.7.12 Bemerkungen.** i) Für  $n, d \geq 1$  sei

$$K_{n,d}^h := \{\underline{k} = (k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^{\times(n+1)} \mid k_0 + \cdots + k_n = d\}.$$

Ein *homogenes Polynom* vom *Grad*  $d$  ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{\underline{k}=(k_0,\dots,k_n)\in K_{n,d}^h} c_{\underline{k}} \cdot x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n}$$

<sup>37</sup>Dieses Ergebnis ist damit verbunden, dass wir über den reellen Zahlen arbeiten. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ([41], Definition V.2.13) gibt es diesen Fall z.B. nicht.

mit reellen Zahlen  $c_{\underline{k}}, \underline{k} \in K_{n,d}^h$ , die nicht sämtlich null sind. Für festes  $n, d \geq 1$  wird die Menge der homogenen Polynome vom Grad  $d$  zusammen mit dem Nullpolynom mit  $\mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d$  bezeichnet. Für Polynome  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_d$  sei die *Nullstellenmenge*

$$\bar{V}(f_1, \dots, f_s) := \{ [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid f_i(a_0, \dots, a_n) = 0, i = 1, \dots, s \}.$$

Man erkennt wie in (III.11), dass dies wohldefiniert ist.

Für  $q \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_2$  sei die *Diskriminante*

$$\text{Disk}(q) := \det(C_q).$$

Die Leibnizformel<sup>38</sup> ([41], Satz IV.4.6) impliziert, dass  $\text{Disk}$  ein homogenes Polynom vom Grad  $n + 1$  in den Koeffizienten von  $q$  ist, d.h., es gibt ein homogenes Polynom

$$\varDelta \in \mathbb{R}[y_{ij}, 0 \leq i \leq j \leq n]_{n+1},$$

so dass

$$\text{Disk}(q) = \varDelta(d_{ij}, 0 \leq i \leq j \leq n)$$

für

$$q(x_0, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

gilt. Die offene Menge

$$\overline{\mathcal{Q}}^* = \mathbb{P}(\mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_2) \setminus \bar{V}(\text{Disk})$$

parametrisiert diejenigen homogenen Polynome vom Grad zwei, für die  $s + t = n + 1$  in III.7.8 Satz gilt. Falls  $s = n + 1$  und  $t = 0$  gilt, ist

$$\bar{V}(x_0^2 + \dots + x_n^2) = \emptyset.$$

Für die anderen Werte von  $s, t$  mit  $s \geq t$  und  $s + t = n + 1$  ist die entsprechende Quadrik nicht leer und enthält nur glatte Punkte.

ii) Es sei

$$\begin{aligned} \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_2 &\longrightarrow \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_2 \\ (A, q) &\longmapsto A \star q \end{aligned}$$

die Linkswirkung, die wir oben betrachtet haben. Die Menge  $\mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_2$  zerfällt in endlich viele Bahnen. Die offene Teilmenge  $\mathcal{Q}^* := \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_2 \setminus V(\text{Disk})$  zerfällt z.B. in  $n + 1$  Bahnen, entsprechend den möglichen Werten von  $s$ .<sup>39</sup>

<sup>38</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), deutscher Philosoph, Mathematiker, Jurist, Historiker und politischer Berater der frühen Aufklärung.

<sup>39</sup>Die Annahme, dass  $s \geq t$ , erreichen wir dadurch, dass wir  $q$  mit  $-1$  multiplizieren. Diese Operation wird aber nicht durch die Gruppenwirkung realisiert. Die Gruppenwirkung ändert die Vorzeichen der Eigenwerte nicht.

Eine symmetrische Matrix  $C$  hat nach II.2.27 Spektralsatz  $n + 1$  reelle Eigenwerte  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ .<sup>40</sup> Diese sind aber nur bis auf die Anordnung wohlbestimmt. Daher setzen wir

$$\begin{aligned} s_1(\lambda_0, \dots, \lambda_n) &:= \lambda_0 + \dots + \lambda_n, \\ s_2(\lambda_0, \dots, \lambda_n) &:= \sum_{0 \leq i < j \leq n} \lambda_i \cdot \lambda_j = \lambda_0 \cdot \lambda_1 + \lambda_0 \cdot \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n, \\ &\vdots \\ s_{n+1}(\lambda_0, \dots, \lambda_n) &:= \lambda_0 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind offenbar invariant unter Permutationen von  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ . Ein klassischer Satz der Algebra ([13], Kapitel III, 4.6.3 Satz) besagt, dass für zwei  $(n + 1)$ -Tupel reeller Zahlen  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  und  $(\mu_0, \dots, \mu_n)$  genau dann

$$s_i(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = s_i(\mu_0, \dots, \mu_n), \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

gilt, wenn eine Permutation  $\sigma: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  existiert, so dass

$$\mu_i = \lambda_{\sigma(i)}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Die Zahlen  $s_0(\lambda_0, \dots, \lambda_n), \dots, s_n(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  sind bis auf ein Vorzeichen die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von  $C$ .<sup>41</sup> Insbesondere sind sie Polynome in den Koeffizienten der Matrix  $C$ . Für eine symmetrische Matrix  $C$  mit reellen Eigenwerten  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  definieren wir  $s_i(C) := s_i(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$ .

Es sei nun

$$\begin{aligned} \chi: \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ q &\longmapsto (s_1(C_q), \dots, s_{n+1}(C_q)). \end{aligned}$$

Man beachte, dass

$$\mathcal{Q}^\star = \chi^{-1}\left(\{(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid b_n \neq 0\}\right).$$

Nun sei  $p(x) = x^{n+1} + c_1 \cdot x^n + \dots + c_n \cdot x + c_{n+1} \in \mathbb{R}[x]$  ein reelles Polynom in einer Veränderlichen mit  $c_{n+1} \neq 0$ . Wir nehmen an, dass alle Nullstellen von  $p$  reell sind. Die Zahl  $\text{Var}(1, c_1, \dots, c_{n+1})$  ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel in dem Tupel, das aus  $(1, c_1, \dots, c_{n+1})$  nach Streichen der Nullen entsteht, und heißt die *Variation* des Tupels  $(1, c_1, \dots, c_{n+1})$ .

*Descartes*<sup>42</sup> Lemma. In der obigen Situation ist  $\text{Var}(1, c_1, \dots, c_{n+1})$  die Anzahl der mit Vielfachheiten gezählten positiven Nullstellen von  $p$  und  $\text{Var}(1, -c_1, c_2, \dots, (-1)^{n+1} \cdot c_{n+1})$  die Anzahl der mit Vielfachheiten gezählten negativen Nullstellen von  $p$ .

---

<sup>40</sup>Zu einem gegebenen  $(n + 1)$ -Tupel  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  ist  $\text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  eine symmetrische  $((n + 1) \times (n + 1))$ -Matrix mit diesen Eigenwerten.

<sup>41</sup>Dazu beachte man

$$(x - \lambda_0) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n) = x^{n+1} - s_1(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \cdot x^n + s_2(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \cdot x^{n-1} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot s_{n+1}(\lambda_0, \dots, \lambda_n).$$

<sup>42</sup>René Descartes (1596 - 1650), französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler.

Für einen Beweis verweisen wir auf [24], Kapitel I, §10, Korollar, 2, b).

Mit dem Lemma von Descartes und den zuvor gemachten Bemerkungen erhalten wir eine Beschreibung der einzelnen Bahnen der obigen Gruppenwirkung als Vereinigung von Teilmengen, die durch explizite polynomiale Gleichungen und Ungleichungen charakterisiert sind.

Wir betrachten z.B. den Fall  $n = 3, s = 1$  und  $t = 2$ . Es  $q(x_0, x_1, x_2, x_3)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei in diesem Fall. Da genau einer der Eigenwerte von  $C_q$  null ist, gilt  $s_4(C_q) = 0$  und  $s_3(C_q) \neq 0$ ,<sup>43</sup> und das charakteristische Polynom von  $C_q$  ist  $x \cdot (x^3 - s_1(C_q) \cdot x^2 + s_2(C_q) \cdot x - s_3(C_q))$ . Wir können das Lemma von Descartes auf das Polynom in den Klammern anwenden. Die Bedingung, dass es (mit Vielfachheiten gezählt genau) zwei negative Nullstellen hat, velangt  $\text{Var}(1, s_1(C_q), s_2(C_q), s_3(C_q)) = 2$ . Dies liefert die folgenden Systeme von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) > 0 \wedge s_2(C_q) > 0 \wedge s_1(C_q) < 0, \\ s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) > 0 \wedge s_2(C_q) < 0 \wedge s_1(C_q) > 0, \\ s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) > 0 \wedge s_2(C_q) < 0 \wedge s_1(C_q) < 0, \\ s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) > 0 \wedge s_2(C_q) = 0 \wedge s_1(C_q) < 0, \\ s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) > 0 \wedge s_2(C_q) < 0 \wedge s_1(C_q) = 0. \end{aligned}$$

Analog erhält man für den Fall  $n = 3, s = 2$  und  $t = 1$  die Bedingung  $\text{Var}(1, -s_1(C_q), s_2(C_q), -s_3(C_q)) = 2$ . Dies liefert die folgenden Systeme von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) < 0 \wedge s_2(C_q) > 0 \wedge s_1(C_q) > 0, \\ s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) < 0 \wedge s_2(C_q) < 0 \wedge s_1(C_q) < 0, \\ s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) < 0 \wedge s_2(C_q) < 0 \wedge s_1(C_q) > 0, \\ s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) < 0 \wedge s_2(C_q) = 0 \wedge s_1(C_q) > 0, \\ s_4(C_q) &= 0 \wedge s_3(C_q) < 0 \wedge s_2(C_q) < 0 \wedge s_1(C_q) = 0. \end{aligned}$$

Eine Teilmenge von  $k^N$ , die Vereinigung von Teilmengen ist, die durch ein System von polynomialen Gleichungen und Ungleichungen definiert sind, nennt man eine *semi-algebraische Menge* ([3], 2.1.1 Definition).

**III.7.13 Aufgaben.** a) Überprüfen Sie Descartes Lemma für  $n = 1$  und  $n = 2$ .

b) Es sei  $n = 2$ . Beschreiben Sie die Ausdrücke  $s_1(C_q), s_2(C_q)$  und  $s_3(C_q)$  als Polynome in den Koeffizienten des Polynoms  $\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]_2$  und geben Sie die Gleichungen und Ungleichungen für die verschiedenen Bahnen gemäß Teil ii) der obigen Bemerkungen an.

### III.7.3 Der projektive Abschluss

Das letzte Beispiel bestätigt die Beobachtung, die wir bereits in Abschnitt III.1 gemacht haben, nämlich, dass Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln in der projektiven Ebene zusammenfallen. Bisher haben wir gezeigt, dass es genau eine projektive Äquivalenzklasse von Koniken gibt, die nicht leer sind und keine singulären Punkte enthalten. Zum Abschluss müssen wir noch klären, wie affine und projektive Koniken zusammenhängen.

<sup>43</sup>Da  $s_1(C_q), s_2(C_q), s_3(C_q)$  und  $s_4(C_q)$  nicht von der Reihenfolge der Eigenwerte abhängen, können wir  $\lambda_3 = 0$  annehmen. Dann gilt  $s_3(C_q) = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2$ .

Es sei

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n e_k \cdot x_k + f$$

ein Polynom vom Grad zwei wie in Abschnitt II.2.3. Die *Homogenisierung* von  $q$  ist das homogene Polynom

$$q^h(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n e_k \cdot x_0 \cdot x_k + f \cdot x_0^2.$$

Wir benutzen wieder die Einbettung

$$\begin{aligned} \iota_0: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \\ (b_1, \dots, b_n) &\longmapsto [1 : b_1 : \dots : b_n]. \end{aligned}$$

**III.7.14 Definition.** In der obigen Situation ist  $\overline{V}(q^h)$  der *projektive Abschluss* von  $V(q)$ .

**III.7.15 Bemerkungen.** i) Die analoge Konstruktion für lineare Polynome haben wir bereits in Abschnitt III.5 nach (III.6) verwendet. Sie lässt sich auch auf beliebige Polynome (s. II.2.25 Aufgabe) ausdehnen.

ii) Für die zugeordneten  $((n+1) \times (n+1))$ -Matrizen aus (II.12) und Abschnitt III.7.2 gilt

$$B_q = C_{q^h}.$$

Für eine affine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  haben wir in Abschnitt II.2.1 eine Matrix  $B_f$  definiert. Die projektive Transformation  $[B_f] \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$  setzt  $f$  fort, genauer gilt

$$\forall P \in \mathbb{R}^n: \quad \iota_0(f(P)) = [B_f] \cdot \iota_0(P).$$

Wegen

$$(B_f^{-1})^t \cdot B_q \cdot (B_f^{-1}) = (B_f^{-1})^t \cdot C_{q^h} \cdot (B_f^{-1})$$

ist  $\overline{V}(B_f \star q^h)$  der projektive Abschluss von  $f(V(q))$ .

**III.7.16 Beispiele.** i) Da wir über den reellen und nicht den komplexen Zahlen arbeiten, hat der projektive Abschluss eine Besonderheit. So gilt für  $1 \leq k < n$  und

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^1 + \dots + x_k^2 + 1,$$

dass

$$q^h(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_k^2.$$

Es gilt  $V(q) = \emptyset$ . Dagegen ist  $\overline{V}(q^h)$  ein linearer Unterraum der Dimension  $n - k - 1$ . Er ist in  $\{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid a_0 = 0\}$ , dem Komplement von  $\iota_0(\mathbb{R}^n)$ , enthalten.

ii) Es seien  $q_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ ,  $q_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$  und  $q_3(x_1, x_2) = x_1^1 - x_2^2 - 1$  die Standardgleichungen für Koniken in der Ebene II.2.34 Beispiel. Für die Parabel gilt  $q_1^h(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_0 \cdot x_2$ , und wir erkennen

$$Q_1 := \overline{V}(q_1^h) = \iota_0(V(q_1)) \cup \{[0 : 0 : 1]\}.$$

Für den Kreis gilt  $q_2^h(x_0, x_1, x_2) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$  und

$$Q_2 := \overline{V}(q_2^h) = \iota_0(V(q_2)).$$

Schließlich gilt  $q_3^h(x_0, x_1, x_2) = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$  sowie

$$Q_3 := \overline{V}(q_3^h) = \iota_0(V(q_3)) \cup \{[0 : -1 : 1], [0 : 1 : 1]\}.$$

Die zu  $q_1^h$  gehörige Matrix ist

$$C_{q_1^h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei  $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$  mit

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$(A^{-1})^t \cdot C_{q_1^h} \cdot A^{-1} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1).$$

Das bedeutet nach (III.14)  $[A] \cdot Q_1 = Q_2$ . Das bestätigt unsere Beobachtung aus Abschnitt III.1, dass eine Parabel durch Hinzufügen eines Punkts zu einer Ellipse wird. Die zu  $q_3^h$  gehörige Matrix ist

$$C_{q_3^h} = \mathrm{diag}(-1, 1, -1).$$

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $A = A^t = A^{-1}$  und

$$(A^{-1})^t \cdot C_{q_3^h} \cdot A^{-1} = \mathrm{diag}(1, -1, -1).$$

Dies bedeutet laut (III.14)  $[A] \cdot Q_3 = Q_2$  und bestätigt unsere Beobachtung aus Abschnitt III.1, nach der durch Hinzufügen zweier Punkte eine Hyperbel zu einer Ellipse wird.

### Die Topologie des projektiven Raums

Der Raum  $\mathbb{R}^{n+1}$  trägt die euklidische Topologie ([38], 1.4.2 Beispiele, iii). Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist *offen*, wenn es zu jedem Punkt  $P \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass

$$B(P, \varepsilon) := \{Q \in \mathbb{R}^{n+1} \mid d(P, Q) < \varepsilon\} \subset U.$$

Die Teilmenge  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist offen. Sie trägt die Teilraumtopologie, d.h.,  $U \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  ist genau dann offen, wenn es eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  gibt, so dass  $V \cap (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) = U$ . Man beachte, dass dies im vorliegenden Fall äquivalent dazu ist, dass  $U$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  offen ist.

Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  setzen wir

$$\begin{aligned}\varkappa_i: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (b_0, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n) &\longmapsto (b_0, \dots, b_{i-1}, 1, b_{i+1}, \dots, b_n).\end{aligned}$$

Die Teilmenge  $\varkappa_i(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  ist nicht offen. Sie erhält ebenfalls eine Teilraumtopologie. Dabei ist eine Teilmenge  $U \subset \varkappa_i(\mathbb{R}^n)$  genau dann offen in der Teilraumtopologie, wenn  $\varkappa_i^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$  offen in der euklidischen Topologie ist,  $i = 0, \dots, n$ .

**III.7.17 Aufgabe.** Es seien  $i_0 \in \{0, \dots, n\}$  und  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{K}_U := \{\lambda \cdot \varkappa_{i_0}(u) \mid u \in U, \lambda \in \mathbb{R}^\star\}$$

eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  ist.

Für das Folgende arbeiten wir wieder mit der Projektion

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \\ (a_0, \dots, a_n) &\longmapsto [a_0 : \dots : a_n].\end{aligned}$$

Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  ist *offen*, wenn  $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  offen ist.<sup>44</sup>

Es sei

$$\begin{aligned}\iota_i: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \\ (b_0, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n) &\longmapsto [b_0 : \dots : b_{i-1} : 1 : b_{i+1} : \dots : b_n], \quad i = 0, \dots, n.\end{aligned}$$

**III.7.18 Lemma.** Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  ist genau dann offen, wenn

$$\iota_i^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$$

für  $i = 0, \dots, n$  offen ist.

*Beweis.* Wenn  $U \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  offen ist, dann ist  $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  offen. Weiter ist dann  $\varkappa_i^{-1}(\pi^{-1}(U))$  offen,  $i = 0, \dots, n$ . Da  $\iota_i = \pi \circ \varkappa_i$ , bedeutet dies, dass  $\iota_i^{-1}(U)$  offen ist,  $i = 0, \dots, n$ .

Wenn  $\iota_i^{-1}(U)$  offen ist, dann ist  $\mathcal{K}_{\iota_i^{-1}(U)}$  nach III.7.17 Aufgabe offen. Nun gilt weiter

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{K}_{\iota_i^{-1}(U)}.$$

Da eine Vereinigung von offenen Mengen offen ist ([38], 1.4.1 Definition, a), iii), zeigt die Gleichung, dass  $\pi^{-1}(U)$  offen ist. Nach Definition heißt dies, dass  $U$  offen ist. □

**III.7.19 Bemerkung.** Die Teilmenge  $\iota_i(\mathbb{R}^n)$  ist offen,  $i = 0, \dots, n$ .

Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  ist *abgeschlossen*, wenn das Komplement  $U := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \setminus X$  offen ist. Es sei  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  eine Teilmenge. Ihr *Abschluss*, ist

$$\overline{X} := \bigcap_{\substack{Z \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n: \\ Z \text{ abgeschlossen, } X \subset Z}} Z.$$

Dies ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ , die  $X$  enthält.

<sup>44</sup>Dies ist die sogenannte *Quotiententopologie*.

**III.7.20 Bemerkung.** Für  $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$  ist

$$\begin{aligned}\varphi_A: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \\ ([A], [v]) &\longmapsto [A \cdot v]\end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ([38], 10.1.1 Definition). Das bedeutet, dass  $U \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  genau dann offen ist, wenn  $\varphi_A^{-1}(U)$  offen ist. Für eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  ist  $\varphi_A(\overline{X})$  der Abschluss von  $\varphi_A(X)$ ; in Formeln

$$\overline{\varphi_A(X)} = \varphi_A(\overline{X}).$$

Es seien  $(P_v)_{v \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  und  $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ . Wir sagen, dass die Folge  $(P_v)_{v \in \mathbb{N}}$  gegen  $Q$  konvergiert und schreiben

$$Q = \lim_{v \rightarrow \infty} P_v,$$

wenn es für jede offene Menge  $U \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  mit  $Q \in U$  einen Index  $v_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\forall v \geq v_0 : P_v \in U.$$

**III.7.21 Bemerkung.** Es sei  $i_0 \in \{0, \dots, n\}$  ein Index mit  $Q \in \iota_{i_0}(\mathbb{R}^n)$ . Wenn  $(P_v)_{v \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  mit  $\lim_{v \rightarrow \infty} P_v = Q$  ist, dann gibt es auf Grund von III.7.19 Bemerkung und der Definition von Konvergenz einen Index  $v_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $P_v \in \iota_{i_0}(\mathbb{R}^n)$  für  $v \geq v_0$  gilt. Es seien  $P_v = \iota_{i_0}(v_v)$ ,  $v \geq v_0$ , und  $Q = \iota_{i_0}(w)$ . Weiter setzen wir  $v_v := (0, \dots, 0)$ ,  $v = 0, \dots, v_0 - 1$ . Dann gilt

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v_v = w$$

im Sinne von [38], 2.1.1 Definition. Wenn umgekehrt  $(v_v)_{v \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$  ist,  $w \in \mathbb{R}^n$  und  $i_0 \in \{0, \dots, n\}$ , so dass

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v_v = w,$$

dann überprüft man leicht, dass

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \iota_{i_0}(v_v) = \iota_{i_0}(w).$$

**III.7.22 Lemma.** Es seien  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  eine Teilmenge,  $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  und  $(P_v)_{v \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $P_v \in X$ ,  $v \in \mathbb{N}$ , die gegen  $Q$  konvergiert. Dann gilt

$$Q \in \overline{X}.$$

**Beweis.** Wir nehmen  $Q \notin \overline{X}$  an. Da  $U := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \setminus \overline{X}$  offen ist, gibt es einen Index  $v_0 \in \mathbb{N}$  mit  $P_v \in U$ ,  $v \geq v_0$ . Es gilt  $X \subset \overline{X}$  und somit  $X \cap U = \emptyset$ . Wir schließen  $P_v \notin X$ ,  $v \geq v_0$ . Das ist offenbar ein Widerspruch.  $\square$

**III.7.23 Satz.** Es sei  $q$  ein Polynom vom Grad zwei, so dass  $V(q) \neq \emptyset$ . Dann ist der projektive Abschluss  $\overline{V}(q^h)$  von  $\iota_0(V(q))$  gleichzeitig auch der topologische Abschluss.

**Beweis.** Es seien

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n e_k \cdot x_k + f$$

ein Polynom vom Grad zwei und

$$q^h(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n e_k \cdot x_0 \cdot x_k + f \cdot x_0^2$$

seine Homogenisierung.

Da sowohl der projektive Abschluss als auch topologische Abschluss mit durch affine Transformationen induzierten projektiven Transformationen vertauscht (III.7.15 Bemerkung, ii), und III.7.20 Bemerkung), können wir annehmen, dass sich  $q$  in Normalform gemäß III.7.8 Satz befindet. Weiter folgt aus der Stetigkeit von polynomialen Funktionen ([38], 3.2.4 Beispiele, ii), dass  $\bar{V}(q^h)$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  ist. Wir wenden III.7.22 Lemma an. Demnach müssen wir nachweisen, dass es zu einem Punkt  $Q \in \bar{V}(q^h)$  eine Folge  $(P_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  mit  $P_\nu \in \iota_0(V(q))$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , und  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu = Q$  gibt.

**Fall IB).** Hier seien  $s \geq t$ ,  $1 \leq s+t \leq n$  und

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Dies ist bereits ein homogenes Polynom, so dass  $q^h(x_0, x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n)$ . Es seien  $Q = [0 : a_1 : \dots : a_n] \in \bar{V}(q^h)$  und  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  ein Index mit  $a_{i_0} \neq 0$ . Für  $\nu \in \mathbb{N}$  sei

$$\nu_\nu := \left( (\nu+1) \cdot \frac{a_1}{a_{i_0}}, \dots, (\nu+1) \cdot \frac{a_n}{a_{i_0}} \right), \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Es gilt dann  $\nu_\nu \in V(q)$  und

$$P_\nu := \iota_0(\nu_\nu) = \left[ 1 : (\nu+1) \cdot \frac{a_1}{a_{i_0}}, \dots, (\nu+1) \cdot \frac{a_n}{a_{i_0}} \right] = \left[ \frac{1}{\nu+1} : \frac{a_1}{a_{i_0}} : \dots : \frac{a_n}{a_{i_0}} \right], \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Man erkennt mit III.7.21 Bemerkung,<sup>45</sup> dass

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu = \left[ 0 : \frac{a_1}{a_{i_0}} : \dots : \frac{a_n}{a_{i_0}} \right] = [0 : a_1 : \dots : a_n] = Q.$$

**Fall IA).** In diesem Fall betrachten wir  $s, t \in \mathbb{N}$  mit  $s+t \leq n$  und

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2 - 1.$$

Da wir  $V(q) \neq \emptyset$  voraussetzen, folgt  $s \geq 1$ . Weiter haben wir

$$q^h(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2 - x_0^2.$$

Es sei  $Q = [0 : a_1 : \dots : a_n] \in \bar{V}(q^h)$ . Falls  $s+t < n$  und  $a_1 = \dots = a_{s+t}$ , dann kann man wie in Fall IB) arbeiten.<sup>46</sup> Ansonsten gibt es Indizes  $i_0 \in \{1, \dots, s\}$  und  $j_0 \in \{s+1, \dots, s+t\}$

<sup>45</sup>Damit man diese Bemerkung anwenden kann, müssen alle Folgenglieder die Eins als  $i_0$ -te Koordinate haben.

<sup>46</sup>Man betrachtet gewissermaßen  $V(x_{s+t+1}^2 + \dots + x_n^2)$ .

mit  $a_{i_0} \neq 0$  und  $a_{j_0} \neq 0$ . Weiter finden wir (man vgl. den Beweis von II.2.29 Satz)  $S_1 \in \mathrm{SO}_s(\mathbb{R})$ ,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^\star$ ,  $S_2 \in \mathrm{SO}_t(\mathbb{R})$  und  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^\star$ , so dass

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_{s+t+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A := \left( \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{E}_{n-s-t} \end{array} \right).^{47} \quad (\text{III.15})$$

Weil  $[A] \cdot \overline{V}(q^h) = \overline{V}(q^h)$ , gilt  $\lambda_1 = \lambda_2$ , i.e.,  $[A] \cdot Q = [0 : 1 : 0 : \dots : 0 : 1 : \lambda'_{s+t+1} : \dots : \lambda'_n]$ . Für  $v \in \mathbb{N}$  kürzen wir  $\eta_v := v + 1 + 1/(4 \cdot (v + 1))$  und  $\zeta_v := v + 1 - 1/(4 \cdot (v + 1))$  ab und definieren

$$v_v := (\eta_v, 0, \dots, 0, \zeta_v, \eta_v \cdot \lambda'_{s+t+1}, \dots, \eta_v \cdot \lambda'_n).$$

Es gilt  $v_v \in V(q)$  und

$$\begin{aligned} P_v &:= \iota_0(v_v) = [1 : \eta_v : 0 : \dots : 0 : \zeta_v : \eta_v \cdot \lambda'_{s+t+1} : \dots : \eta_v \cdot \lambda'_n] \\ &= \left[ \frac{1}{\eta_v} : 1 : 0 : \dots : 0 : \frac{\zeta_v}{\eta_v}, \lambda'_{s+t+1} : \dots : \lambda'_n \right], \quad v \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Offensichtlich folgt mit III.7.21 Bemerkung (für  $i_0 = 2$ ), dass

$$\lim_{v \rightarrow \infty} P_v = [A] \cdot Q$$

und somit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} [A^{-1}] \cdot P_v = Q.$$

**Fall II).** Es ist nun eine Gleichung der Form

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2 - x_{s+t+1}$$

mit  $s \geq t$  und  $s + t < n$  zu betrachten. Offenbar gilt

$$q^h(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2 - x_0 \cdot x_{s+t+1}.$$

Es sei  $Q = [0 : a_1 : \dots : a_n] \in \overline{V}(q^h)$ . Wenn  $a_{s+t+1} = 0$  gilt, dann können wir wie in Fall IB) argumentieren. Für den Rest des Arguments können wir also  $a_{s+t+1} = 1$  voraussetzen. Man setze

$$p(x_1, \dots, x_n) := x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Wir haben  $p(a_1, \dots, a_n) = 0$  und, wegen  $s \geq 1$ ,  $p(1, 0, \dots, 0, a_{s+t+1}, \dots, a_n) = 1$ . Nun sei

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \lambda &\longmapsto (\lambda + (1 - \lambda) \cdot a_1, (1 - \lambda) \cdot a_2, \dots, (1 - \lambda) \cdot a_{s+t}, a_{s+t+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

---

<sup>47</sup>Das Symbol 0 steht hier jeweils für die Nullmatrix vom entsprechenden Format.

Die Spur von  $\gamma$  ist die Verbindungsstrecke zwischen  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $(1, 0, \dots, 0, a_{s+t+1}, \dots, a_n)$ . Die Verknüpfung  $p \circ \gamma$  ist die Einschränkung einer nicht-konstanten polynomialem Funktion vom Grad zwei auf das Intervall  $[0, 1]$ . Diese Funktion hat höchstens zwei Nullstellen, eine davon ist  $\lambda = 0$ . Falls es eine zweite Nullstelle gibt, nennen wir sie  $\lambda_+$ . Daher können wir eine Folge  $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  mit  $\lambda_\nu \in (0, 1] \setminus \{\lambda_+\}$  wählen, so dass  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_\nu = 0$ . Für die Folge  $(\varepsilon_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  mit  $\varepsilon_\nu := (p \circ \gamma)(\lambda_\nu)$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , gilt  $\varepsilon_\nu \neq 0$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , und  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu = 0$  auf Grund der Stetigkeit von  $\gamma$  und  $p$ . Für  $\nu \in \mathbb{N}$  sei

$$v_\nu := \frac{1}{\varepsilon_\nu} \cdot \gamma(\lambda_\nu) = \left( \frac{\lambda_\nu + (1 - \lambda_\nu) \cdot a_1}{\varepsilon_\nu}, \frac{(1 - \lambda_\nu) \cdot a_2}{\varepsilon_\nu}, \dots, \frac{(1 - \lambda_\nu) \cdot a_{s+1}}{\varepsilon_\nu}, \frac{1}{\varepsilon_\nu}, \frac{a_{s+t+2}}{\varepsilon_\nu}, \dots, \frac{a_n}{\varepsilon_\nu} \right).$$

Wegen  $p((1/\varepsilon) \cdot \gamma(\lambda)) = (1/\varepsilon^2) \cdot p(\gamma(\lambda))$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^\star$ , folgt  $v_\nu \in V(q)$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} P_\nu &:= \iota_0(v_\nu) \\ &= \left[ 1 : \frac{\lambda_\nu + (1 - \lambda_\nu) \cdot a_1}{\varepsilon_\nu} : \frac{(1 - \lambda_\nu) \cdot a_2}{\varepsilon_\nu} : \dots : \frac{(1 - \lambda_\nu) \cdot a_{s+1}}{\varepsilon_\nu} : \frac{1}{\varepsilon_\nu} : \frac{a_{s+t+2}}{\varepsilon_\nu} : \dots : \frac{a_n}{\varepsilon_\nu} \right] \\ &= [\varepsilon_\nu : \lambda_\nu + (1 - \lambda_\nu) \cdot a_1 : (1 - \lambda_\nu) \cdot a_2 : \dots : (1 - \lambda_\nu) \cdot a_{s+1} : 1 : a_{s+t+2} : \dots : a_n], \quad \nu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mit dieser Beschreibung und III.7.21 (für  $i_0 = s + t + 1$ ) folgt nun leicht

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu = Q,$$

und alles ist gezeigt.  $\square$

*III.7.24 Bemerkung.* Für ein Polynom

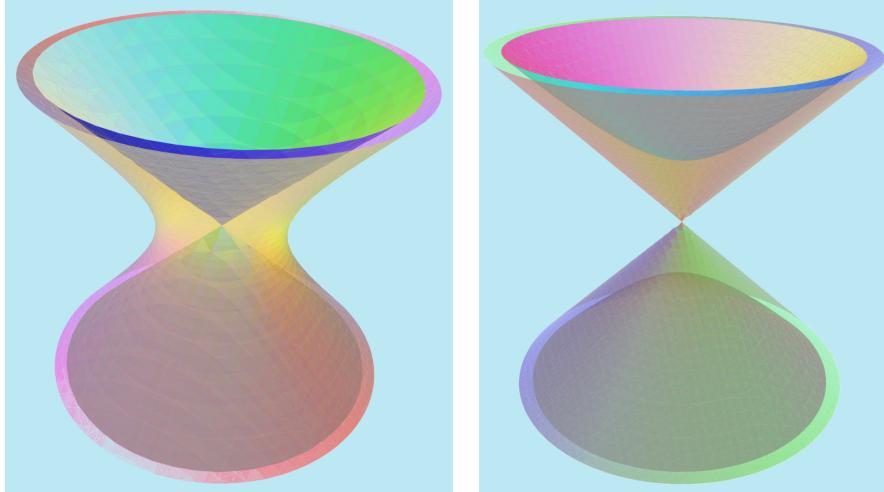
$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n e_k \cdot x_k + f.$$

vom Grad zwei sei

$$p(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j.$$

Gemäß unserer Konventionen ist dies ein nicht-triviales homogenes Polynom vom Grad zwei. In Fall IIA) nennt man den Kegel  $V(p)$  den *Asymptotenkegel* der Quadrik  $Q$ . Der Beweis des Satzes erklärt die Bedeutung Dies verallgemeinert die Asymptoten einer Hyperbel aus I.2.15 Aufgabe. Die folgenden Illustrationen zeigen die Asymptotenkegel des

ein- und des zweischaligen Rotationsparaboloids (Abschnitt II.2.4, Fall IA).



Der Fall der Parabel zeigt, dass wir in Fall II) nicht so eine schöne geometrische Interpretation für  $V(q)$  haben.

### III.7.4 Über Koniken in der projektiven Ebene

Zum Abschluss des Kapitels über projektive Geometrie besprechen wir drei interessante Resultate zur Geometrie der glatten Koniken in der projektiven Ebene. Das erste Resultat betrifft Automorphismen glatter Koniken, das zweite Resultat erklärt, wie man eine glatte Konik spezifizieren kann und das dritte Resultat ist eine interessante Übertragung des Satzes von Pappos auf glatte Koniken.

#### Parametrisierungen von Koniken

Für eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{P}_k^n$  kann man die Gruppe der *Automorphismen* von  $X$  als

$$\text{Aut}(X) := \{ [A] \in \text{PGL}_{n+1}(k) \mid [A] \cdot X = X \}$$

definieren.<sup>48</sup> Nichtleere glatte Koniken in der Ebene lassen sich durch die projektive Gerade  $\mathbb{P}_k^1$  parametrisieren. Wir werden erklären, wie für eine glatte Konik  $Q \subset \mathbb{P}_k^2$  die Gruppe  $\text{PGL}_2(k)$  und  $\text{Aut}(Q)$  zusammenhängen. Wir erklären die vollen Details für  $k = \mathbb{R}$  und skizzieren am Ende, wie das Argument für andere Körper funktioniert.

Es sei  $n \geq 2$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} v_n: \mathbb{P}_k^1 &\longrightarrow \mathbb{P}_k^n \\ [a_0 : a_1] &\longmapsto [a_0^n : a_0^{n-1} \cdot a_1 : \dots : a_0 \cdot a_1^{n-1} : a_1^n] \end{aligned}$$

ist die  $n$ -te Veronese<sup>49</sup>-Einbettung.

*III.7.25 Aufgabe.* Überprüfen Sie, dass  $v_n$  injektiv ist,  $n \in \mathbb{N}$ .

<sup>48</sup>In der Behandlung von Fall IA) im Beweis von III.7.23 Satz haben wir in (III.15) Automorphismen der entsprechenden Quadrik gesehen. Dies sind Verallgemeinerungen von Rotationssymmetrien.

<sup>49</sup>Giuseppe Veronese (1854 - 1917), italienischer Mathematiker.

Wir konzentrieren uns nun auf den Fall  $n = 2$ . Es sei

$$C := \overline{V}(x_0 \cdot x_2 - x_1^2).$$

Offensichtlich gilt

$$v_2(\mathbb{P}_k^1) \subset C.$$

Es sei  $P := [a_0 : a_1 : a_2] \in C$ . Falls  $a_0 = 0$  gilt, dann erzwingt die Gleichung  $P = [0 : 0 : 1] = v_2([0 : 1])$ . Für  $a_0 \neq 0$  schreiben wir  $P = [1 : b_1 : b_2]$ ,  $b_1 := a_1/a_0$ ,  $b_2 := a_2/a_0$ . Es gilt dann  $P = v_2([1 : b_1])$ . Also induziert  $v_2$  eine Bijektion zwischen  $\mathbb{P}_k^1$  und  $C$ .

*III.7.26 Bemerkung.* Wir nehmen  $k = \mathbb{R}$  an. Es sei  $Q \subset \mathbb{P}_k^2$  eine Konik, die nicht leer ist und nur glatte Punkte enthält. Dann existiert nach III.7.10 Beispiel eine projektive Transformation  $[A] \in \mathrm{PGL}_3(k)$  mit  $[A] \cdot C = Q$ , und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 &\longrightarrow Q \\ P &\longmapsto [A] \cdot v_2(P) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

Nun seien  $A \in \mathrm{GL}_2(k)$  und  $\varphi_A: \mathbb{P}_k^1 \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$ ,  $[u] \mapsto [A \cdot u]$ , die zugehörige projektive Transformation. Wir möchten nun zeigen, dass sich  $\varphi_A$  zu einer projektiven Transformation der Ebene fortsetzen lässt, d.h., dass es ein Element  $B \in \mathrm{GL}_3(k)$  gibt, so dass

$$\forall [u] \in \mathbb{P}_k^1 : \quad v_2([A \cdot u]) = \psi_B(v_2([u])) \quad (\text{III.16})$$

für die zugehörige projektive Transformation  $\psi_B: \mathbb{P}_k^2 \longrightarrow \mathbb{P}_k^2$ ,  $[w] \mapsto [B \cdot w]$ , gilt. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

und  $u = (b_0, b_1)^t \in k^2$ . Offenbar haben wir

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} \alpha \cdot b_0 + \beta \cdot b_1 \\ \gamma \cdot b_0 + \delta \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

und

$$v_2([A \cdot u]) = \begin{bmatrix} \alpha^2 \cdot b_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot b_0 \cdot b_1 + \beta^2 \cdot b_1^2 \\ (\alpha \cdot \gamma) \cdot b_0^2 + (\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma) \cdot b_0 \cdot b_1 + \beta \cdot \delta \cdot b_1^2 \\ \gamma^2 \cdot b_0^2 + 2 \cdot \gamma \cdot \delta \cdot b_0 \cdot b_1 + \delta^2 \cdot b_1^2 \end{bmatrix}.$$

Man erkennt schnell, dass die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2 \cdot \alpha \cdot \beta & \beta^2 \\ \alpha \cdot \gamma & \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma & \beta \cdot \delta \\ \gamma^2 & 2 \cdot \gamma \cdot \delta & \delta^2 \end{pmatrix}$$

das Verlangte leistet. Genauer erkennt man, dass jede andere Matrix  $B' \in \mathrm{GL}_3(k)$ , die ebenfalls (III.16) realisiert, proportional zu  $B$  ist, i.e.,  $[B] = [B'] \in \mathrm{PGL}_3(k)$ .

**III.7.27 Aufgabe.** Beweisen Sie, dass

$$s_2: \mathrm{GL}_2(k) \longrightarrow \mathrm{GL}_3(k)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2 \cdot \alpha \cdot \beta & \beta^2 \\ \alpha \cdot \gamma & \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma & \beta \cdot \delta \\ \gamma^2 & 2 \cdot \gamma \cdot \delta & \delta^2 \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

**III.7.28 Satz.** Es seien  $Q, Q' \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  zwei Koniken, die nicht leer sind und keine singulären Punkte enthalten,  $R, S, T \in Q$  und  $R', S', T' \in Q'$  jeweils drei verschiedene Punkte. Dann existiert eine projektive Transformation  $\varphi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , die die Bedingungen

$$\varphi(Q) = Q', \quad \varphi(R) = R', \quad \varphi(S) = S' \quad \text{und} \quad \varphi(T) = T'$$

erfüllt.

*Beweis.* Nach III.7.10 Beispiel gibt es projektive Transformationen  $\varphi_Q$  und  $\varphi_{Q'}$  der Ebene mit  $\varphi_Q(Q) = C$  und  $\varphi_{Q'}(Q') = C$ . Wir setzen  $D := \varphi_Q(R)$ ,  $E := \varphi_Q(S)$ ,  $F := \varphi_Q(T)$ ,  $D' := \varphi_{Q'}(R')$ ,  $E' := \varphi_{Q'}(S')$  und  $F' := \varphi_{Q'}(T')$ .

Die zu III.4.3 Satz analoge Aussage für  $\mathbb{P}_k^1$  besagt, dass es zu zwei Tupeln  $(G, H, K)$  und  $(G', H', K')$  auf  $\mathbb{P}_k^1$  eine projektive Transformation  $\psi_{(G, H, K; G', H', K')}: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  mit  $\psi_{(G, H, K; G', H', K')}(G) = G'$ ,  $\psi_{(G, H, K; G', H', K')}(H) = H'$  und  $\psi_{(G, H, K; G', H', K')}(K) = K'$  gibt. Wir verwenden die Bijektion  $v_2: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ . Es gibt eine projektive Transformation  $\chi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  mit

$$v_2 \circ \psi_{(v_2^{-1}(D), v_2^{-1}(E), v_2^{-1}(F); v_2^{-1}(D'), v_2^{-1}(E'), v_2^{-1}(F'))} = \chi \circ v_2.$$

Unter diesen Umständen gilt

$$\chi(D) = D', \quad \chi(E) = E' \quad \text{und} \quad \chi(F) = F'.$$

Die projektive Transformation

$$\varphi := (\varphi_{Q'})^{-1} \circ \chi \circ \varphi_Q$$

hat die behauptete Eigenschaft. □

**III.7.29 Bemerkung.** Es seien  $k$  ein beliebiger Körper und  $q(x_0, x_1, x_2)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei, so dass  $\overline{V}(q) \neq \emptyset$  und alle Punkte in  $\overline{V}(q)$  glatt sind. Es seien  $P = [a_0 : a_1 : a_2] \in \overline{V}(q)$  und  $\ell \subset \mathbb{P}_k^2$  eine Gerade, die  $P$  nicht enthält. Für  $B := [b_0 : b_1 : b_2] \in \ell$  parametrisiert

$$h: \mathbb{P}_k^1 \longrightarrow \mathbb{P}_k^2$$

$$[\lambda : \mu] \longmapsto [(\lambda \cdot a_0 + \mu \cdot b_0) : (\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1) : (\lambda \cdot a_2 + \mu \cdot b_2)]$$

die Gerade  $\overline{PB}$ . Wir erhalten das homogene Polynom

$$\beta_B(\lambda, \mu) = q(\lambda \cdot a_0 + \mu \cdot b_0, \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1, \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot b_2)$$

vom Grad zwei. Die Nullstellen von  $\beta_B$  entsprechen den Schnittpunkten von  $\overline{PB}$  mit  $\overline{V}(q)$ . Wegen  $P \in \ell \cap \overline{V}(q)$  ist  $[1 : 0]$  eine Nullstelle von  $\beta_B$ . Wir können also

$$\beta_B(\lambda, \mu) = \mu \cdot (\eta_B \cdot \lambda - \kappa_B \cdot \mu)$$

schreiben. Damit ist

$$\begin{aligned} v: \ell &\longrightarrow \mathbb{P}_k^2 \\ B &\longmapsto h([\kappa_B : \eta_B]) \end{aligned}$$

eine Parametrisierung. Weiter sei  $l: \mathbb{P}_k^1 \longrightarrow \mathbb{P}_k^2$  eine Parametrisierung von  $\ell$ . Es gibt drei linear unabhängige homogene Polynome  $r_0(x_0, x_1)$ ,  $r_1(x_0, x_1)$  und  $r_2(x_0, x_1)$  vom Grad zwei, so dass

$$\forall [c_0 : c_1] \in \mathbb{P}_k^1 : \quad (v \circ l)([c_0 : c_1]) = [r_0(c_0, c_1) : r_1(c_0, c_1) : r_2(c_0, c_1)].$$

Da der Vektorraum, der aus den homogenen Polynomen vom Grad zwei in  $x_0$  und  $x_1$  und dem Nullpolynom besteht, dreidimensional ist, können wir  $r_0(x_0, x_1)$ ,  $r_1(x_0, x_1)$  und  $r_2(x_0, x_1)$  als Linearkombination von  $x_0^2$ ,  $x_0 \cdot x_1$  und  $x_1^2$  schreiben. Dies liefert eine Matrix  $A \in \mathrm{GL}_3(k)$  mit  $[A] \cdot \overline{V}(q) = C$ . Somit gilt III.7.28 Satz auch für  $k$ .

### Linearsysteme von Quadriken

Eine Gerade wird durch zwei verschiedene Punkte festgelegt. Wir wollen jetzt klären, durch welche Daten eine glatte Konik in  $\mathbb{P}_k^2$  bestimmt ist.

Wie zuvor sei  $\mathbb{V}_{n,2} := k[x_0, \dots, x_n]_2$  der Vektorraum, der aus allen homogenen Polynomen vom Grad zwei in den Variablen  $x_0, \dots, x_n$  und dem Nullpolynom besteht. Wir setzen  $\overline{\mathbb{V}}_{n,2} := \mathbb{P}(\mathbb{V}_{n,2})$ .

**III.7.30 Definition.** i) Ein linearer Unterraum  $\overline{\mathbb{L}} = \mathbb{P}(\mathbb{L}) \subset \overline{\mathbb{V}}_{n,2}$  ist ein *Linearsystem* (von Quadriken).

ii) Es seien  $\overline{\mathbb{L}} \subset \overline{\mathbb{V}}_{n,2}$  ein Linearsystem und  $P \in \mathbb{P}_k^n$ . Dann setzen wir

$$\overline{\mathbb{L}}(-P) := \{ [q] \in \overline{\mathbb{V}}_{n,2} \mid P \in \overline{V}(q) \}.$$

**III.7.31 Lemma.** Es sei  $\overline{\mathbb{L}} \subset \overline{\mathbb{V}}_{n,2}$  ein Linearsystem. Dann ist  $\overline{\mathbb{L}}(-P)$  ein Linearsystem, und es gilt entweder

$$\overline{\mathbb{L}}(-P) = \overline{\mathbb{L}}$$

oder

$$\dim(\overline{\mathbb{L}}(-P)) = \dim(\overline{\mathbb{L}}) - 1.$$

**Beweis.** Wir schreiben  $P = [a_0 : \dots : a_n]$ . Für homogene Polynome  $q(x_0, \dots, x_n)$ ,  $q'(x_0, \dots, x_n)$  vom Grad zwei und  $\lambda \in k$  gilt

$$\begin{aligned} (q + q')(a_0, \dots, a_n) &= q(a_0, \dots, a_n) + q'(a_0, \dots, a_n), \\ (\lambda \cdot q)(a_0, \dots, a_n) &= \lambda \cdot q(a_0, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{n,2}(-P) &:= \{ q(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{V}_{n,2} \mid q(a_0, \dots, a_n) = 0 \} \\ &= \{ q(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{V}_{n,2} \mid P \in \overline{V}(q) \}\end{aligned}$$

ein linearer Teilraum der Kodimension eins<sup>50</sup> von  $\mathbb{V}_{n,2}$ , und  $\overline{\mathbb{L}}(-P)$  ist die Projektivierung von

$$\mathbb{L}(-P) := \mathbb{L} \cap \mathbb{V}_{n,2}(-P).$$

Nach der Dimensionsformel ([41], Aufgabe III.5.49) gilt

$$\dim_k(\mathbb{L}(-P)) = \dim_k(\mathbb{L}) + \dim_k(\mathbb{V}_{n,2}) - 1 - \dim_k(\mathbb{L} + \mathbb{V}_{n,2}(-P)).$$

Falls  $\mathbb{L} \subset \mathbb{V}_{n,2}(-P)$ , dann folgt  $\mathbb{L}(-P) = \mathbb{L}$ . Ansonsten gilt  $\mathbb{L} + \mathbb{V}_{n,2}(-P) = \mathbb{V}_{n,2}$  und die obige Formel liefert  $\dim_k(\mathbb{L}(-P)) = \dim_k(\mathbb{L}) - 1$ .  $\square$

Aus diesem Satz ergibt sich ein wichtiges klassisches Resultat über Koniken in  $\mathbb{P}_k^2$ .

**III.7.32 Definition.** Fünf Punkte  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{P}_k^2$  befinden sich in *allgemeiner Lage*, wenn keine drei dieser Punkte kollinear sind.

**III.7.33 Bemerkung.** Wir schreiben  $A_j = [a_{0j} : a_{1j} : a_{2j}]$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ , und definieren die  $(3 \times 5)$ -Matrix  $A = (a_{ij})_{i=0,1,2, j=0,1,2,3,4}$ . Die Bedingung, dass sich die gegebenen Punkte in allgemeiner Lage befinden, ist äquivalent dazu, dass je drei verschiedene Spalten der Matrix  $A$  linear unabhängig sind. Seien also  $0 \leq j_0 < j_1 < j_2 \leq 4$  und  $A_{j_0 j_1 j_2}$  die  $(3 \times 3)$ -Matrix, die aus den entsprechenden Spalten von  $A$  besteht. Dann muss

$$\det((a_{ij_v})_{i,v=0,1,2}) \neq 0$$

gelten. Der Parameterraum für Fünftupel in der projektiven Ebene ist  $(\mathbb{P}_k^2)^{\times 5} = \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^2$ . Da die Determinantenfunktion linear in jeder Spalte ist ([41], Definitionen IV.4.1, i), ist für  $0 \leq j_0 < j_1 < j_2 \leq 2$  die Menge

$$U_{(j_0, j_1, j_2)} := \{ (B_0, B_1, B_2, B_3, B_4) \in (\mathbb{P}_k^2)^{\times 5} \mid \det((b_{ij_v})_{i,v=0,1,2}) \neq 0 \}$$

definiert. Dabei schreiben wir wieder  $B_j = [b_{0j} : b_{1j} : b_{2j}]$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ . Damit ist

$$\mathcal{A} := \bigcap_{\substack{(j_0, j_1, j_2): \\ 0 \leq j_0 < j_1 < j_2 \leq 4}} U_{(j_0, j_1, j_2)}$$

die Menge der Fünftupel in allgemeiner Lage.

Wir nehmen jetzt  $k = \mathbb{R}$  an. Da die Determinante nach der Leibnizformel eine polynomiale Funktion ist und damit stetig, folgt, dass  $U_{(j_0, j_1, j_2)}$  eine offene Teilmenge von  $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)^{\times 5}$  ist, wenn man  $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)^{\times 5}$  mit der Produkttopologie ([20], Abschnitt 1.3, [43], Introduction,

<sup>50</sup>Wenn man die Koordinaten von  $P$  einsetzt, dann erhält man eine nichttriviale lineare Gleichung in den Koeffizienten des Polynoms. Das wird z.B. im Beweis von III.7.34 Satz deutlich. Für ein quadratisches Polynom

$$q(x_0, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} d_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

gilt z.B. genau dann  $q(1, 0, \dots, 0) = 0$ , wenn  $d_{00} = 0$ .

§2, 1) ausstattet,  $0 \leq j_0 < j_1 < j_2 \leq 4$ . Da Durchschnitte endlich vieler offener Mengen offen sind ([38], 1.4.1 Definition, a), Eigenschaft ii), ist damit auch  $\mathcal{A}$  offen. Diese Menge ist sogar dicht, d.h., der Abschluss  $\overline{\mathcal{A}}$  ist der ganze Raum  $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)^{\times 5}$ . In der Sprache der Maßtheorie ([39], 1.5.1 Definition) würde man sagen, dass sich alle Fünftupel außerhalb einer Nullmenge in allgemeiner Lage befinden. Das erklärt die Terminologie.

Wenn  $k$  ein beliebiger Körper ist, dann kann man  $(\mathbb{P}_k^2)^{\times 5}$  mit der sogenannten Zariski<sup>51</sup>-Topologie ([19], Abschnitt 2.3.5, [16], Chapter I, Exercise 2.14) versehen. Die obigen Aussagen stimmen dann in dieser Topologie, außer, dass man nicht von Nullmengen spricht.

**III.7.34 Satz.** *Es seien  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{P}_k^2$  fünf Punkte in allgemeiner Lage. Dann existiert ein homogenes Polynom  $q(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{V}_{n,2} \setminus \{0\}$  vom Grad zwei mit*

$$A_i \in \overline{V}(q), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

*Wenn  $q'(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{V}_{n,2} \setminus \{0\}$  ein weiteres homogenes Polynom vom Grad zwei mit  $A_i \in \overline{V}(q')$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , ist, dann existiert eine Zahl  $\lambda \in k^*$  mit*

$$q'(x_0, \dots, x_n) = \lambda \cdot q(x_0, \dots, x_n).$$

*Beweis.* Bereits in III.7.7 Bemerkung haben wir beobachtet, dass  $\dim_k(\mathbb{V}_{2,2}) = 6$  gilt. Aus III.7.31 Lemma schließen wir, dass es zu fünf beliebigen Punkten in der projektiven Ebene eine Konik gibt, die diese fünf Punkte enthält. Das genannte Lemma macht auch plausibel, dass der Satz stimmen sollte.

Es seien  $A \in \mathrm{GL}_3(k)$  und  $\varphi_A: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  die zugehörige projektive Transformation. Für ein homogenes Polynom  $q(x_0, x_1, x_2)$  gilt genau dann  $A_i \in \overline{V}(q)$ , wenn  $\varphi_A(A_i) \in \varphi_A(\overline{V}(q)) = \overline{V}(A \star q)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Die Abbildung  $\mathbb{V}_{2,2} \rightarrow \mathbb{V}_{2,2}$ ,  $q \mapsto A \star q$ , ist linear.

Laut Voraussetzung ist  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$  ein Viereck im Sinne von Abschnitt III.4.1. Nach III.4.3 Satz existiert eine projektive Transformation  $\varphi: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  mit  $\varphi(A_0) = E_0 = [1 : 0 : 0]$ ,  $\varphi(A_1) = E_1 = [0 : 1 : 0]$ ,  $\varphi(A_2) = E_2 = [0 : 0 : 1]$  und  $\varphi(A_3) = E_3 = [1 : 1 : 1]$ . Weiter sei  $E_4 := [a : b : c] := \varphi(A_4)$ . Auf Grund des letzten Abschnitts genügt es, die Aussage für  $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4$  zu beweisen. Es sei

$$q(x_0, x_1, x_2) = \alpha_0 \cdot x_0^2 + \alpha_1 \cdot x_1^2 + \alpha_2 \cdot x_2^2 + \beta_0 \cdot x_1 \cdot x_2 + \beta_1 \cdot x_0 \cdot x_2 + \beta_2 \cdot x_0 \cdot x_1$$

ein homogenes Polynom vom Grad zwei mit  $E_i \in \overline{V}(q)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Aus  $E_i \in \overline{V}(q)$  folgt  $\alpha_i = 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Die Bedingung  $E_3 \in \overline{V}(q)$  ist dann äquivalent zu

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0. \tag{III.17}$$

Man beachte, dass  $a \neq 0$ , weil  $E_4$  nicht auf  $\overline{E_0 E_1}$  liegt. Analog sieht man  $b \neq 0$  und  $c \neq 0$  ein. Weiter gilt  $b \neq c$ , weil  $E_4$  nicht in der Gerade  $\overline{E_0 E_3}$  enthalten ist. Entsprechend schließt man  $a \neq b$  und  $a \neq c$ . Es ist nun noch die Bedingung

$$\beta_0 \cdot b \cdot c + \beta_1 \cdot a \cdot c + \beta_2 \cdot a \cdot b = 0 \tag{III.18}$$

zu erfüllen. Wir subtrahieren  $(b \cdot c)$ -mal Gleichung (III.17) von dieser Gleichung und erhalten

$$\beta_1 \cdot (a \cdot c - b \cdot c) + \beta_2 \cdot (a \cdot b - b \cdot c) = 0.$$

<sup>51</sup>Oscar Zariski (1899 - 1986), US-amerikanischer Mathematiker.

Wir wählen  $\mu \in k^*$  und setzen  $\beta_2 := \mu$ . Es muss dann

$$\beta_1 = \frac{b \cdot c - a \cdot b}{a \cdot c - b \cdot c} \cdot \mu$$

gelten. Es folgt

$$\beta_0 = \mu \cdot \left( \frac{a \cdot b - b \cdot c}{a \cdot c - b \cdot c} - 1 \right) = \mu \cdot \frac{a \cdot b - a \cdot c}{a \cdot c - b \cdot c}.$$

Das Polynom  $q(x_0, x_1, x_2)$  ist somit von der Form

$$\mu \cdot \left( \frac{a \cdot b - a \cdot c}{a \cdot c - b \cdot c} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{b \cdot c - a \cdot b}{a \cdot c - b \cdot c} \cdot x_0 \cdot x_2 + x_0 \cdot x_1 \right).$$

Schreiben wir  $\mu = \lambda \cdot (a \cdot c - b \cdot c)$ , dann nimmt es die Gestalt

$$q_\lambda(x_0, x_1, x_2) := \lambda \cdot (a \cdot (b - c) \cdot x_1 \cdot x_2 + b \cdot (c - a) \cdot x_0 \cdot x_2 + c \cdot (a - b) \cdot x_0 \cdot x_1)$$

an. Dies zeigt die behauptete Eindeutigkeit.

Wir verifizieren nun, dass  $\overline{V}(q_\lambda)$  keine singulären Punkte besitzt. Dazu betrachten wir allgemeiner

$$p(x_0, x_1, x_2) = \lambda_0 \cdot x_1 \cdot x_2 + \lambda_1 \cdot x_0 \cdot x_2 + \lambda_2 \cdot x_0 \cdot x_1$$

mit  $\lambda_i \in k^*$ ,  $i = 0, 1, 2$ , und wenden das Kriterium aus III.7.3 Definition für  $k$  statt  $\mathbb{R}$  an. Für einen Punkt  $F = [f_0 : f_1 : f_2] \in \mathbb{P}_k^2$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_0}(f_0, f_1, f_2) &= \lambda_2 \cdot f_1 + \lambda_1 \cdot f_2, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1}(f_0, f_1, f_2) &= \lambda_2 \cdot f_0 + \lambda_0 \cdot f_2, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2}(f_0, f_1, f_2) &= \lambda_1 \cdot f_0 + \lambda_0 \cdot f_1. \end{aligned}$$

Falls alle partiellen Ableitungen in  $F$  verschwinden, dann muss sicher  $f_i \neq 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ , gelten. Wir können also  $f_0 = 1$  annehmen. Mit der zweiten Gleichung erhalten wir  $f_2 = -\lambda_2/\lambda_0$  und mit der dritten  $f_1 = -\lambda_1/\lambda_0$ . Die erste partielle Ableitung nimmt an der Stelle  $[1 : -\lambda_1/\lambda_0 : -\lambda_2/\lambda_0]$  den Wert  $-2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2/\lambda_0$  an. Falls in  $1 + 1 \neq 0$  gilt, ist dieser Wert ungleich null, und wir sehen, dass es keinen singulären Punkt auf  $\overline{V}(p)$  gibt. Im Falle  $1 + 1 = 0$  ist dieser Wert null. Allerdings stimmt über solch einem Körper die Eulerformel (III.12) nicht (vgl. III.7.5 Bemerkungen, iv), und wir müssen überprüfen, ob  $[1 : -\lambda_1/\lambda_0 : -\lambda_2/\lambda_0]$  auf  $\overline{V}(q)$  liegt. In der Tat gilt<sup>52</sup>

$$p\left(1, -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, -\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right) = -\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_0} \neq 0.$$

Somit ist  $[1 : -\lambda_1/\lambda_0 : -\lambda_2/\lambda_0]$  kein singulärer Punkt von  $\overline{V}(q)$ . □

<sup>52</sup>Man beachte, dass aus  $1 + 1 = 0$  folgt, dass  $\varkappa = -\varkappa$  für alle  $\varkappa \in k$  gilt.

**III.7.35 Bemerkungen.** i) Man kann für jeden Grad  $d \geq 2$  die Dimension des Vektorraums  $k[x_0, x_1, x_2]_d$ , der aus den homogenen Polynomen vom Grad  $d$  in  $x_0, x_1, x_2$  und dem Nullpolynom besteht, leicht ausrechnen und dementsprechend voraussagen, wieviele Punkte in allgemeiner Lage man benötigt, um eine entsprechende Kurve vom Grad  $d$  festzulegen. Allerdings ist es dann unter Umständen schwierig, die Eigenschaft, sich in allgemeiner Lage zu befinden, adäquat zu charakterisieren. So benötigt man für eine Kurve vom Grad drei neun Punkte. Davon sollten gemäß III.7.34 Satz keine sechs auf einer Konik liegen. Allerdings schneiden sich zwei Kurven vom Grad drei typischerweise in neun verschiedenen Punkten. Tupel von neun Punkten, die als Durchschnitt von zwei verschiedenen kubischen Kurven entstehen, bestimmen also nicht auf eindeutige Weise eine kubische Kurve. Es gibt vielmehr eine (projektiv gezählt) eindimensionale Familie von kubischen Kurven durch diese neun Punkte.

ii) Es gelte  $1 + 1 = 0$  in  $k$ . Die Berechnung am Ende des Beweises von III.7.34 Satz zeigt, dass der Punkt

$$F = [1 : -\lambda_1/\lambda_0 : -\lambda_2/\lambda_0] = [\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2]$$

auf jeder Tangente in einem Punkt an  $\bar{V}(p)$  liegt. Auf Grund dieses intuitiv schwer greifbaren Phänomens nennt man  $\bar{V}(p)$  eine *seltsame Kurve* ([16], Chapter IV, §3, S. 311).<sup>53</sup> Dieses Beispiel illustriert, dass unsere Anschauung bei gewissen Formen der Geometrie versagen kann.

## Der Satz von Pascal

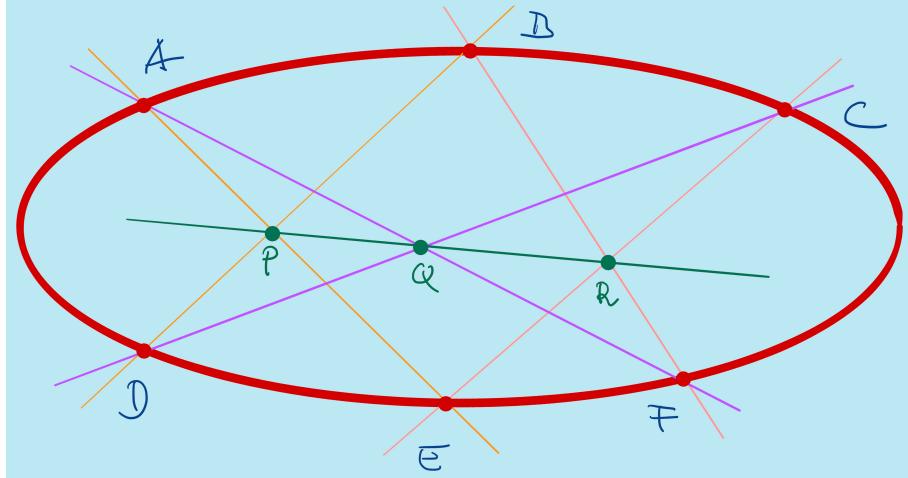
Der Satz von Pappos (III.6.9) betrifft sechs Punkte auf der Vereinigung zweier verschiedener Geraden. Eine solche Vereinigung können wir als singuläre Konik ansehen (vgl. III.7.10 Beispiel). Pascal<sup>54</sup> hat beobachtet, dass die analoge Aussage auch für Koniken ohne Singularitäten wahr ist.

**III.7.36 Der Satz von Pascal.** *Es seien  $q(x_0, x_1, x_2)$  ein homogenes Polynom vom Grad zwei, so dass  $\bar{V}(q) \subset \mathbb{P}_k^2$  eine glatte Konik ist, und  $A, B, C, D, E, F$  sechs verschiedene Punkte auf  $\bar{V}(q)$ . Dann sind der Schnittpunkt  $P$  der Geraden  $\overline{AE}, \overline{BD}$ , der Schnittpunkt  $Q$  der Geraden  $\overline{AF}, \overline{CD}$  und der Schnittpunkt  $R$  der Geraden  $\overline{BF}, \overline{CE}$  kollinear.*

Wir haben in III.7.10 erklärt, dass eine glatte Konik in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  projektiv äquivalent zu einem Einheitskreis in der Karte  $\iota_0(\mathbb{R}^2)$  aus Abschnitt III.3.1 ist. In III.7.35 Bemerkungen, ii), haben wir skizziert, warum dasselbe Resultat auch über anderen Körpern gilt. Daher können wir die Aussage des Satzes von Pascal mit Hilfe eines Kreises oder einer Ellipse veranschaulichen.

<sup>53</sup>Glücklicherweise gibt es nicht allzuviiele seltsame Kurven dieser Art ([16], Chapter IV, Theorem 3.9).

<sup>54</sup>Blaise Pascal (1623 - 1662), französischer Mathematiker, Physiker, Literat und christlicher Philosoph.



*Beweis.* Für ein homogenes lineares Polynom  $l(x_0, x_1, x_2)$  setzen wir wieder

$$\overline{V}(l) := \{ [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_k^2 \mid l(a_0, a_1, a_2) = 0 \}.$$

Da eine glatte Konik keine Gerade enthält, sind keine drei der Punkte  $A, B, C, D, E, F$  kollinear. Damit ist  $Q$  gemäß III.7.34 Satz die einzige Konik durch die Punkte  $A, B, C, D, E$ . Aus III.7.31 Lemma folgt, dass

$$\mathbb{V}_{2,2}(-A - C - D - E) := \left( \left( (\mathbb{V}_{2,2}(-A))(-C) \right)(-D) \right)(-E)$$

zweidimensional ist. Zu zwei verschiedenen Punkten  $G, H \in \mathbb{P}_k^2$  sei  $l_{G,H}$  ein homogenes lineares Polynom mit  $\overline{V}(l_{G,H}) = \overline{GH}$ . Nun sind  $l_{A,E} \cdot l_{C,D}$  und  $l_{A,D} \cdot l_{C,E}$  zwei linear unabhängige Elemente aus  $\mathbb{V}_{2,2}(-A - C - D - E)$  und somit eine Basis für diesen Vektorraum. Ebenso sind  $l_{A,F} \cdot l_{B,D}$  und  $l_{A,D} \cdot l_{B,F}$  eine Basis für  $\mathbb{V}_{2,2}(-A - B - D - F)$ . Wir finden also  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  mit

$$\lambda_1 \cdot l_{A,E} \cdot l_{C,D} + \lambda_2 \cdot l_{A,D} \cdot l_{C,E} = q = \mu_1 \cdot l_{A,F} \cdot l_{B,D} + \mu_2 \cdot l_{A,D} \cdot l_{B,F}.$$

Insbesondere haben wir

$$l_{A,D} \cdot (\lambda_2 \cdot l_{C,E} - \mu_2 \cdot l_{B,F}) = \lambda_2 \cdot l_{A,D} \cdot l_{C,E} - \mu_2 \cdot l_{A,D} \cdot l_{B,F} = \mu_1 \cdot l_{A,F} \cdot l_{B,D} - \lambda_1 \cdot l_{A,E} \cdot l_{C,D}. \quad (\text{III.19})$$

Wir behaupten, dass  $P$ ,  $Q$  und  $R$  in der Geraden  $\overline{V}(\lambda_2 \cdot l_{C,E} - \mu_2 \cdot l_{B,F})$  enthalten sind. Wir haben  $\{P\} = \overline{AE} \cap \overline{BD}$ , d.h.,  $P \in \overline{V}(l_{A,E})$  und  $P \in \overline{V}(l_{B,D})$ . Damit muss auch der Ausdruck auf der linken Seite von (III.19) in  $P$  verschwinden. Da  $P \notin \overline{V}(l_{A,D})$ , muss  $P \in \overline{V}(\lambda_2 \cdot l_{C,E} - \mu_2 \cdot l_{B,F})$  gelten. Weiter gilt  $\{Q\} = \overline{AF} \cap \overline{CD}$ , so dass  $Q \in \overline{V}(l_{A,F})$  und  $Q \in \overline{V}(l_{C,D})$ . Wieder muss die linke Seite von (III.19) in  $Q$  null sein. Wegen  $Q \notin \overline{V}(l_{A,D})$  bedeutet dies  $Q \in \overline{V}(\lambda_2 \cdot l_{C,E} - \mu_2 \cdot l_{B,F})$ . Schließlich gilt auf Grund von  $\{R\} = \overline{BF} \cap \overline{CE}$  offenbar  $R \in \overline{V}(\lambda_2 \cdot l_{C,E} - \mu_2 \cdot l_{B,F})$ .  $\square$

# IV

## Hyperbolische Geometrie

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist die hyperbolische Ebene wie die euklidische Ebene ein mathematisches Objekt, in dem wir von Punkten, Geraden, Abständen, Winkeln usw. reden können, und diese Konzepte den Regeln der euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenaxioms folgen. An die Stelle des euklidischen Parallelenaxioms tritt das hyperbolische Parallelenaxiom. In diesem Kapitel möchten wir Poincarés Modell der hyperbolischen Ebene präsentieren. Nach einigen Vorbereitungen stellen wir die hyperbolische Ebene, ihre Geraden und ihre Transformationen vor. Anschließend werden wir die Abstands- und Winkelmessung einführen und anhand einiger ausgewählter Sätze die Unterschiede zwischen euklidischer und hyperbolischer Geometrie herausarbeiten.

### IV.1 Über Kreise

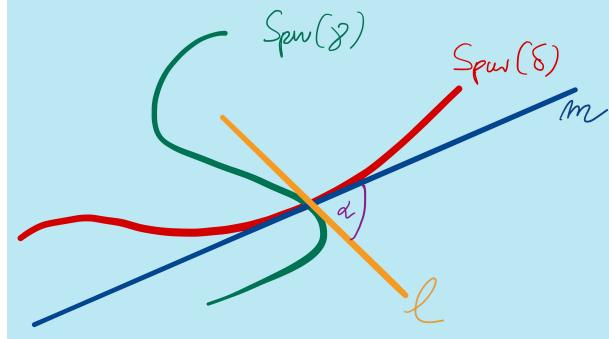
Die Menge, die dem Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene zugrunde liegt, ist die offene Einheitskreisscheibe. Geraden in diesem Modell sind Durchschnitte dieser Scheibe mit gewissen Kreisen. Wie in der euklidischen Geometrie kann man alle Transformationen aus Spiegelungen an Geraden aufbauen. Die Spiegelungen, die wir hier benötigen, sind Inversionen an Kreisen. Diese lassen sich mit komplexen Zahlen zweckmäßig beschreiben. Daher führen wir die benötigten Konzepte in diesem vorbereitenden Abschnitt ein.

#### IV.1.1 Orthogonale Kreise

Es seien  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\delta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$  zwei injektive und differenzierbare Abbildungen sowie  $t_0 \in I$ ,  $u_0 \in J$  zwei Werte, so dass

- ★  $\gamma(t_0) = \delta(u_0) =: P$ ,
- ★  $\gamma'(t_0) \neq 0$ ,  $\delta'(u_0) \neq 0$ .

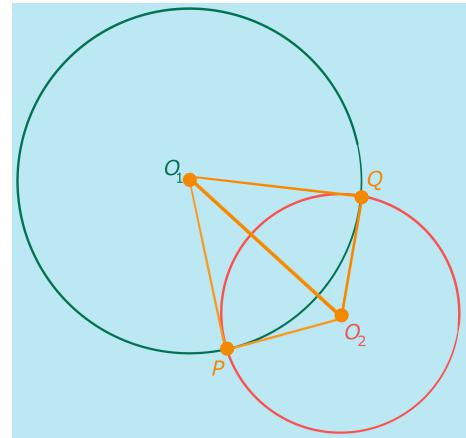
Unter diesen Umständen sind die Tangenten  $\ell$  an  $\text{Spur}(\gamma)$  in  $P$  und  $m$  an  $\text{Spur}(\delta)$  in  $P$  definiert (s. Beginn von Abschnitt I.4.1). Der *Schnittwinkel* der Kurven  $\text{Spur}(\gamma)$  und  $\text{Spur}(\delta)$  in  $P$  ist dann erklärt als der Schnittwinkel der Geraden  $\ell$  und  $m$  in  $P$ .<sup>1</sup>



Es seien  $\kappa \subset \mathbb{R}^2$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und  $P \in \kappa$ . Die *Tangente*  $T_P(\kappa)$  an  $\kappa$  ist definiert als die Gerade, die  $P$  enthält und senkrecht auf  $\overline{OP}$  steht. Die Formel in I.4.8 Satz stimmt mit dieser Definition überein. Wenn nun zwei Kreise  $\kappa_1, \kappa_2 \subset \mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkten  $O_1$  und  $O_2$  gegeben sind und  $P \in \kappa_1 \cap \kappa_2$  ein Schnittpunkt dieser Kreise ist, so stehen die beiden Kreise in  $P$  gemäß unserer vorherigen Definition<sup>2</sup> genau dann senkrecht aufeinander, wenn  $T_P(\kappa_1)$  und  $T_P(\kappa_2)$  senkrecht aufeinander stehen. Das bedeutet allerdings, dass  $T_P(\kappa_1) = \overline{O_2P}$  und  $T_P(\kappa_2) = \overline{O_1P}$ . Wir können also genauso gut fordern, dass die Geraden  $\overline{O_1P}$  und  $\overline{O_2P}$  senkrecht aufeinander stehen.

*IV.1.1 Bemerkung.* Wenn sich zwei Kreise  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  senkrecht in einem Punkt  $P$  schneiden, dann müssen sie sich in einem weiteren Punkt  $Q$  schneiden, denn die Spiegelung an der Geraden  $\overline{O_1O_2}$  bildet die beiden Kreise auf sich ab. Das Dreieck  $\triangle O_1PO_2$  wird unter dieser Spiegelung auf das Dreieck  $\triangle O_1QO_2$  abgebildet, so dass  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  auch in  $Q$  senkrecht aufeinander stehen.

Auf Grund dieser Bemerkung sagen wir, dass  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  *senkrecht* aufeinander stehen, wenn sie sich schneiden und in einem Schnittpunkt senkrecht aufeinander stehen.



<sup>1</sup>Sind die Geraden gleich, dann ist der Schnittwinkel null. Andernfalls entstehen am Schnittpunkt vier Winkel, die nach dem Satz über Scheitelwinkel zwei verschiedene Werte annehmen. Sind die beiden Werte  $\pi/2$ , ist das der Schnittwinkel. Ansonsten ist es der kleinere der beiden Werte. Der Schnittwinkel liegt also im Intervall  $[0, \pi/2]$ . Wenn sich die Geraden nicht in einem rechten Winkel schneiden und  $l$  bzw.  $m$  die Steigungen von  $\ell$  bzw.  $m$  bezeichnen, ist

$$\arctan\left(\left|\frac{l-m}{1+l \cdot m}\right|\right).$$

der Schnittwinkel ([9], Abschnitt 2.1.2).

<sup>2</sup>Um den Schnittwinkel für Kreise zu definieren, genügt es, die beiden Kreise in der Nähe des Schnittpunkts zu parametrisieren (vgl. Kapitel I, Fußnote<sup>17</sup>).

Es seien  $O = (o_1, o_2) \in \mathbb{R}^2$  und  $r > 0$ . Der Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r$  ist dann gegeben als

$$K(O, r) := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (a_1 - o_1)^2 + (a_2 - o_2)^2 = r^2\}.$$

Damit gehört dieser Kreis zu dem Polynom

$$x_1^2 + x_2^2 - 2 \cdot o_1 \cdot x_1 - 2 \cdot o_2 \cdot x_2 + o_1^2 + o_2^2 - r^2.$$

Wenn nun umgekehrt ein Polynom

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + f \cdot x_1 + g \cdot x_2 + h$$

gegeben ist, dann schreiben wir

$$q(x_1, x_2) = \left(x_1 + \frac{f}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{g}{2}\right)^2 - \left(\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} - h\right).$$

Folglich ist  $V(q)$  genau dann ein Kreis, wenn

$$\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} - h > 0.$$

In diesem Fall ist

$$F := \left(-\frac{f}{2}, -\frac{g}{2}\right)$$

der Mittelpunkt und

$$\sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} - h}$$

der Radius.

**IV.1.2 Satz.** Es seien  $\kappa_1 = V(q_1)$  und  $\kappa_2 = V(q_2)$  Kreise in der Ebene mit

$$q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + f_1 \cdot x_1 + g_1 \cdot x_2 + h_1$$

und

$$q_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + f_2 \cdot x_1 + g_2 \cdot x_2 + h_2.$$

Dann ist die Identität

$$f_1 \cdot f_2 + g_1 \cdot g_2 = 2 \cdot (h_1 + h_2).$$

äquivalent dazu, dass die Kreise  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  senkrecht aufeinander stehen.

*Beweis.* Es seien  $F_1$  bzw.  $F_2$  der Mittelpunkt und  $r_1$  bzw.  $r_2$  der Radius von  $\kappa_1$  bzw.  $\kappa_2$ . Wir nehmen zunächst an, dass die beiden Kreise senkrecht aufeinander stehen. Es sei  $P$  ein Schnittpunkt. Das Dreieck  $\triangle F_1 P F_2$  hat einen rechten Winkel am Punkt  $P$ . Nach dem Satz von Pythagoras<sup>3</sup> ([12], Abschnitt 0.3.2) gilt

$$r_1^2 + r_2^2 = d(F_1, P)^2 + d(F_2, P)^2 = d(F_1, F_2)^2. \quad (\text{IV.1})$$

---

<sup>3</sup>Benannt nach Pythagoras von Samos (ca. 570 - 510 v.u.Z.), antiker griechischer Philosoph und Gründer einer religiös-philosophischen Bewegung.

Wenn umgekehrt Gleichung (IV.1) erfüllt ist, dann gilt  $d(F_1, F_2) < r_1 + r_2$ , so dass sich die Kreise  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  in zwei Punkten schneiden, und für einen Schnittpunkt  $P$  ist das Dreieck  $\Delta F_1PF_2$  rechtwinklig, d.h.,  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  stehen senkrecht aufeinander.

Wir müssen also die Gültigkeit von Gleichung (IV.1) prüfen. Es gilt

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{f_1^2}{4} + \frac{g_1^2}{4} + \frac{f_2^2}{4} + \frac{g_2^2}{4} - h_1 - h_2$$

und

$$d(F_1, F_2) = \left(\frac{f_1}{2} - \frac{f_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{g_1}{2} - \frac{g_2}{2}\right)^2 = \frac{f_1^2}{4} + \frac{g_1^2}{4} + \frac{f_2^2}{4} + \frac{g_2^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot (f_1 \cdot f_2 + g_1 \cdot g_2).$$

Somit ist Gleichung (IV.1) äquivalent zu der Gleichung

$$f_1 \cdot f_2 + g_1 \cdot g_2 = 2 \cdot (h_1 + h_2)$$

wie behauptet. □

## IV.1.2 Der Körper der komplexen Zahlen

Wir fassen kurz die wichtigsten Eigenschaften des Körpers  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen zusammen. (Mehr Details gibt es in [40], Kapitel I.) Die Verwendung der komplexen Zahlen vereinfacht die Abhandlung der hyperbolischen Geometrie.

Im Körper  $\mathbb{C}$  existiert eine Zahl  $i$ , so dass

- ★  $i^2 = -1$ ,
- ★ zu jeder komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  eindeutig bestimmte reelle Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $z = a + b \cdot i$  existieren.

Man setzt  $\text{Re}(z) := a$  und nennt dies den *Realteil* von  $z$  sowie  $\text{Im}(z) := b$ . Die letzte Größe wird als *Imaginärteil* von  $z$  bezeichnet. Mit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil lassen sich die Rechenoperationen in  $\mathbb{C}$  folgendermaßen beschreiben:

- ★  $\forall z = a + b \cdot i, z' = a' + b' \cdot i \in \mathbb{C}: z + z' = (a + a') + (b + b') \cdot i$ .
- ★  $\forall z = a + b \cdot i, z' = a' + b' \cdot i \in \mathbb{C}: z \cdot z' = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b) \cdot i$ .

Für eine komplexe Zahl  $z = a + b \cdot i$  ist ihre *konjugiert komplexe Zahl* durch  $\bar{z} = a - b \cdot i$  gegeben. Man beachte, dass  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ , so dass man (mit der reellen Wurzelfunktion [37], 3.3.12 Beispiel, ii)  $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}$  definieren kann. Diese Zahl ist der *Absolutbetrag* von  $z$ . Man hat folgende Formeln:

- ★  $\forall z, z' \in \mathbb{C}: \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$ . (Die komplexe Konjugation  $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$ , ist also ein Körperautomorphismus (s. Abschnitt III.4.3).)
- ★  $\forall z, z' \in \mathbb{C}: |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ .

*IV.1.3 Bemerkung.* Durch  $\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \mapsto a + 0 \cdot i$  ist ein Körperhomomorphismus gegeben. Wir können somit den Körper der reellen Zahlen als Teilkörper des Körpers der komplexen Zahlen auffassen. Dadurch wird  $\mathbb{C}$  zum  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\psi: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto a + b \cdot i\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen. Unter dieser Identifikation entspricht der Absolutbetrag  $|\cdot|$  auf  $\mathbb{C}$  der euklidischen Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^2$ , genauer  $\|(a, b)\| = |\psi(a, b)| = |a + b \cdot i|$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Weiter entspricht die komplexe Konjugation in  $\mathbb{C}$  der Spiegelung an der  $x$ -Achse in  $\mathbb{R}^2$ .

### IV.1.3 Die Inversion an einem Kreis

Für zwei verschiedene Punkte  $O, A \in \mathbb{R}^2$  definieren wir die *Halbgerade*

$$[OA := \{O + \lambda \cdot (A - O) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}].$$

Die folgende Konstruktion sollten Sie sich als Verallgemeinerung der Spiegelung an einer Geraden  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  vorstellen.

**IV.1.4 Definition.** Es sei

$$\varkappa := K(O, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(O, P) = r\}$$

der Kreis mit Mittelpunkt  $O \in \mathbb{R}^2$  und Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Für einen Punkt  $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$  sei  $\iota_\varkappa(A) \in \mathbb{R}^2$  durch folgende Bedingungen charakterisiert:

- ★  $\iota_\varkappa(A) \in [OA]$ ,
- ★  $d(O, A) \cdot d(O, \iota_\varkappa(A)) = r^2$ .

Die Abbildung

$$\begin{aligned}\iota_\varkappa: \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \\ A &\longmapsto \iota_\varkappa(A)\end{aligned}$$

ist die *Inversion am Kreis*  $\varkappa$ .

*IV.1.5 Bemerkungen.* i) Offenbar gilt

- ★  $\forall A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}: \iota_\varkappa(\iota_\varkappa(A)) = A$ .
- ★  $\forall A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}: (\iota_\varkappa(A) = A \iff A \in \varkappa)$ .

Es folgt sofort, dass  $\iota_\varkappa$  eine bijektive Abbildung mit  $\iota_\varkappa^{-1} = \iota_\varkappa$  ist. Die Analogie zu Spiegelungen an Geraden wird durch diese Formeln ausgedrückt.

ii) Intuitiv sollte der Punkt  $O$  ins Unendliche abgebildet werden und umgekehrt. Dies kann man mittels der Einbettung  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto [z:1]} \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$  präzise machen (vgl. IV.2.12 Bemerkung, IV.2.14 Beispiele, i), und IV.2.17 Bemerkungen, iv).

Es seien  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ,

$$\begin{aligned}\zeta_r: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\longmapsto (r \cdot a, r \cdot b)\end{aligned}$$

die zentrische Streckung um den Faktor  $r$  mit Zentrum  $(0, 0)$  und  $O = (o_1, o_2) \in \mathbb{R}^2$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi := \tau_O \circ \zeta_r: \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\longmapsto (o_1 + r \cdot a, o_2 + r \cdot b)\end{aligned}$$

bildet den Einheitskreis  $\varkappa_0 := K((0, 0), 1)$  auf den Kreis  $\varkappa = K(O, r)$  ab. Um wichtige Eigenschaften von Inversionen zu verstehen, genügt es daher, die Inversion am Einheitskreis zu analysieren.

**IV.1.6 Lemma.** *Es sei  $\varkappa_0 := K((0, 0), 1)$  der Einheitskreis. Dann gilt*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}: \quad \iota_{\varkappa_0}(a, b) = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

*Beweis.* Es seien  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  und  $(a', b') := (a/(a^2 + b^2), b/(a^2 + b^2))$ . Nach Definition des euklidischen Abstands und der euklidischen Norm gilt  $d((0, 0), (a, b)) = \|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Somit haben wir

$$(a', b') = \frac{1}{\|(a, b)\|^2} \cdot (a, b) \quad \text{und} \quad d((0, 0), (a', b')) = \|(a', b')\| = \frac{\|(a, b)\|}{\|(a, b)\|^2} = \frac{1}{\|(a, b)\|}.$$

Damit ergibt sich sofort die Behauptung.  $\square$

Im Folgenden diskutieren wir die wichtigsten Eigenschaften von Inversionen an Kreisen.

**IV.1.7 Satz.** *Es seien  $\varkappa \subset \mathbb{R}^2$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  eine Gerade.*

- i) Wenn  $O \in \ell$ , dann gilt  $\iota_{\varkappa}(\ell \setminus \{O\}) = \ell \setminus \{O\}$ .
- ii) Wenn  $O \notin \ell$ , dann existiert ein Kreis  $\varkappa'$ , der  $O$  enthält, so dass

$$\iota_{\varkappa}(\ell) = \varkappa' \setminus \{O\}.$$

*Beweis.* Die erste Aussage ist trivial. Für jeden Punkt  $A \in \ell \setminus \{O\}$  gilt  $\ell = \overline{OA}$  und somit  $[OA \subset \ell$  sowie  $\iota_{\varkappa}(A) \in [OA \setminus \{O\}]$ .

Da Translationen und zentrische Streckungen Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreise abbilden,<sup>4</sup> können wir nach den Betrachtungen vor IV.1.6 Lemma voraussetzen, dass  $\varkappa$  der Einheitskreis ist. Es gibt dann Zahlen  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  und  $\beta \in \mathbb{R}^*$ , so dass

$$\ell = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \beta = 0\}.$$

Für  $(a_1, a_2) \in \ell$  gilt für  $(a'_1, a'_2) := \iota_{\varkappa}(a_1, a_2)$  gemäß IV.1.6 Lemma, dass

$$\alpha_1 \cdot a'_1 + \alpha_2 \cdot a'_2 + \beta \cdot (a'_1)^2 + (a'_2)^2 = 0,$$

<sup>4</sup>Die zentrische Steckung  $\zeta_{\lambda}$  bildet etwa den Kreis mit Mittelpunkt  $M = (m_1, m_2)$  und Radius  $r$  auf den Kreis mit Mittelpunkt  $(\lambda \cdot m_1, \lambda \cdot m_2)$  und Radius  $\lambda \cdot r$  ab,  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ .

d.h.,

$$\left(a'_1 + \frac{\alpha_1}{2 \cdot \beta}\right)^2 + \left(a'_2 + \frac{\alpha_2}{2 \cdot \beta}\right)^2 - \frac{1}{4 \cdot \beta^2} \cdot (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 0.$$

Damit liegt  $\iota_{\kappa}$  auf dem Kreis  $\kappa'$  mit Mittelpunkt  $(-\alpha_1/(2 \cdot \beta), -\alpha_2/(2 \cdot \beta))$  vom Radius  $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}/(2 \cdot |\beta|)$ . Die erste Version der Gleichung zeigt sofort, dass  $(0, 0) \in \kappa'$ .

Wenn man mit einem Punkt  $(a'_1, a'_2) \in \kappa' \setminus \{(0, 0)\}$  startet, dann lässt sich die obige Rechnung umkehren und zeigt, dass es einen Punkt  $(a_1, a_2) \in \ell$  mit  $\iota_{\kappa}(a_1, a_2) = (a'_1, a'_2)$  gibt (vgl. Beweis von IV.1.8 Satz).  $\square$

**IV.1.8 Satz.** Es seien  $\kappa \subset \mathbb{R}^2$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und  $\kappa' \subset \mathbb{R}^2$  ein weiterer Kreis.

- i) Wenn  $O \in \kappa'$ , dann existiert eine Gerade  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  mit  $\iota_{\kappa}(\kappa' \setminus \{O\}) = \ell$ .
- ii) Wenn  $O \notin \kappa'$ , dann ist  $\iota_{\kappa}(\kappa')$  ebenfalls ein Kreis.

*Beweis.* Wir können wieder voraussetzen, dass  $\kappa$  der Einheitskreis ist. Es gibt  $\beta_1, \beta_2, \gamma \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\kappa' = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1^2 + b_2^2 + \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2 + \gamma = 0\}.$$

Für  $(a_1, a_2) \in \kappa' \setminus \{(0, 0)\}$  gilt also

$$\frac{\gamma}{a_1^2 + a_2^2} + \beta_1 \cdot \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \beta_2 \cdot \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} + 1 = 0.$$

Für  $(a'_1, a'_2) := \iota_{\kappa}(a_1, a_2)$  heißt das gerade

$$\gamma \cdot (a'_1)^2 + a'_2)^2 + \beta_1 \cdot a'_1 + \beta_2 \cdot a'_2 + 1 = 0. \quad (\text{IV.2})$$

- i) Hier haben wir  $\gamma = 0$ , so dass

$$\iota_{\kappa}(a_1, a_2) \in \ell := \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2 + 1 = 0\}.$$

Wieder kann man die Rechnung umdrehen (vgl. Beweis von IV.1.7 Satz), um zu verifizieren, dass  $\ell = \iota_{\kappa}(\kappa' \setminus \{(0, 0)\})$  ist.

- ii) Hier gilt  $\gamma \neq 0$  und wir können (IV.2) umschreiben zu<sup>5</sup>

$$\left(a'_1)^2 + \frac{\beta_1}{2 \cdot \gamma}\right)^2 + \left(a'_2)^2 + \frac{\beta_2}{2 \cdot \gamma}\right)^2 - \frac{1}{4 \cdot \gamma^2} \cdot (\beta_1^2 + \beta_2^2 - 4 \cdot \gamma) = 0.$$

Dies beschreibt wieder ein Kreis  $\kappa''$ . Wir haben  $\iota_{\kappa}(\kappa') \subset \kappa''$  gezeigt. Das Umkehren der Rechnungen zeigt  $\iota_{\kappa}(\kappa') = \kappa''$ .  $\square$

**IV.1.9 Beobachtung.** In der Situation von IV.1.7 Satz ii) und IV.1.8 Satz i) ist die Tangente an den Kreis  $\kappa'$  in  $O$  parallel zu der Geraden  $\ell$ .

---

<sup>5</sup>Da  $\kappa'$  ein Kreis ist, gilt  $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 4 \cdot \gamma$ .

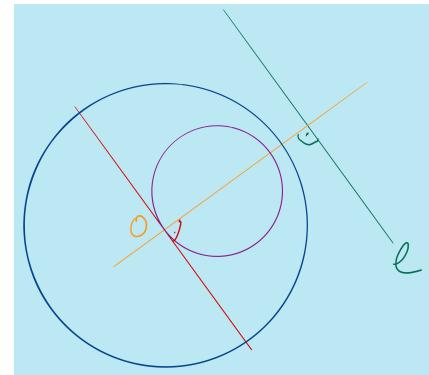
*Beweis.* Man fälle das Lot  $\rho$  von  $O$  auf die Gerade  $\ell$ . Da die Spiegelung  $\sigma_\rho$  an  $\rho$  eine Isometrie ist, die den Punkt  $O$  fixiert, folgt aus IV.1.4 Definition leicht, dass  $\iota_\kappa$  und  $\sigma_\rho$  vertauschen, i.e.,

$$\iota_\kappa \circ \sigma_\rho = \sigma_\rho \circ \iota_\kappa.$$

Das impliziert aber

$$\sigma_\rho(\kappa' \setminus \{O\}) = \kappa' \setminus \{O\}.$$

Mit  $\sigma_\rho(O) = O$  zeigt dies  $\sigma_\rho(\kappa') = \kappa'$ . Die Gerade  $\rho$  verläuft also durch den Mittelpunkt von  $\kappa'$ . Da sowohl die Tangente an  $\kappa'$  in  $O$  als auch  $\ell$  auf  $\rho$  senkrecht stehen, folgt, dass diese beiden Geraden parallel sind.  $\square$



**IV.1.10 Aufgabe.** Bestätigen Sie die Beobachtung mit den Formeln aus dem Beweis von IV.1.7 Satz und der Formel für die Tangente aus I.4.8 Satz.

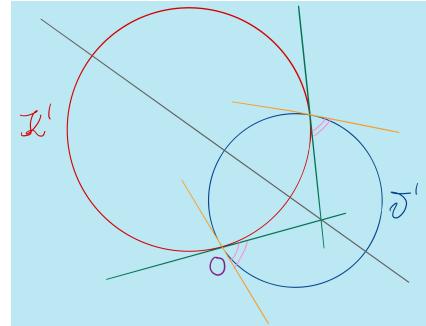
Es sei  $\kappa = K(O, r)$  ein Kreis. Wir betrachten nun wie zu Beginn des Kapitels zwei (injektive) Kurven  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\delta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , so dass

$$O \notin \text{Spur}(\gamma) \cup \text{Spur}(\delta).$$

Da  $\iota_\kappa$  laut der Beschreibung vor und in IV.1.6 Lemma eine differenzierbare Abbildung ist und zudem injektiv, sind auch  $\iota_\kappa \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\iota_\kappa \circ \delta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$  injektive Kurven. Es seien  $t_0 \in I$  und  $u_0 \in J$ , so dass  $\gamma(t_0) = \delta(u_0) =: P$ . Es sei nun  $\ell$  bzw.  $m$  die Tangente an  $\text{Spur}(\gamma)$  bzw.  $\text{Spur}(\delta)$  in  $P$ . Wir möchten den Schnittwinkel von  $\text{Spur}(\gamma)$  und  $\text{Spur}(\delta)$  in  $P$  mit dem Schnittwinkel von  $\text{Spur}(\iota_\kappa \circ \gamma)$  und  $\text{Spur}(\iota_\kappa \circ \delta)$  in  $\iota_\kappa(P)$  vergleichen. Es seien

$$\kappa' := \iota_\kappa(\ell) \cup \{O\} \quad \text{und} \quad \vartheta' = \iota_\kappa(m) \cup \{O\}.$$

Diese beiden Kreise schneiden sich in  $O$  und dem Punkt  $Q = \iota_\kappa(P)$ . Aus IV.1.9 Beobachtung folgt, dass der Schnittwinkel von  $\text{Spur}(\gamma)$  und  $\text{Spur}(\delta)$  in  $P$  mit dem Schnittwinkel von  $\kappa'$  und  $\vartheta'$  in  $O$  übereinstimmt. Es sei  $\rho$  die Verbindungsgerade der Mittelpunkte von  $\kappa'$  und  $\vartheta'$ . Die Spiegelung an  $\rho$  bildet  $\kappa'$  und  $\vartheta'$  auf sich ab und  $O$  auf  $Q$ . Es folgt, dass der Schnittwinkel der Tangenten an  $\kappa'$  und  $\vartheta'$  in  $Q$  mit dem in  $O$  übereinstimmt. Der Schnittwinkel der beiden Tangenten in  $Q$  ist aber der Schnittwinkel von  $\text{Spur}(\iota_\kappa \circ \gamma)$  und  $\text{Spur}(\iota_\kappa \circ \delta)$  in  $\iota_\kappa(P)$ . Wir halten somit fest.



**IV.1.11 Satz.** In der obigen Situation sind der Schnittwinkel von  $\text{Spur}(\gamma)$  und  $\text{Spur}(\delta)$  in  $P$  und der Schnittwinkel von  $\text{Spur}(\iota_\kappa \circ \gamma)$  und  $\text{Spur}(\iota_\kappa \circ \delta)$  in  $\iota_\kappa(P)$  gleich.

Jetzt benutzen wir die Identifikation  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  aus IV.1.3 Bemerkung und behandeln Inversionen in  $\mathbb{C}$ . Wir übertragen alle bisher getroffenen Definitionen auf die offensichtliche Weise.

**IV.1.12 Lemma.** Es seien  $\omega = o_1 + o_2 \cdot i \in \mathbb{C}$  und  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann beschreibt

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{\omega\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \\ z &\longmapsto \frac{r^2}{\overline{z - \omega}} + \omega \end{aligned}$$

die Inversion am Kreis

$$\kappa = K(\omega, r) = \{P \in \mathbb{C} \mid |P - \omega| = r\}.$$

*Beweis.* Es sei  $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}^\star$ . Dann gilt

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i = \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Somit beschreibt laut IV.1.6 Lemma  $\mathbb{C}^\star \longrightarrow \mathbb{C}^\star$ ,  $z \longmapsto 1/\bar{z}$ , die Inversion  $\iota_{\kappa_0}$  am Einheitskreis  $\kappa_0 = K(0, 1)$ . Weiter ist gemäß IV.1.5 Bemerkungen, i),

$$\begin{aligned} \zeta_r \circ \iota_{\kappa_0} \circ \zeta_r^{-1} &= \zeta_r \circ \iota_{\kappa_0} \circ \zeta_{1/r}: \mathbb{C}^\star \longrightarrow \mathbb{C}^\star \\ z &\longmapsto \frac{r^2}{\bar{z}} \end{aligned}$$

die Inversion am Kreis  $K(0, r)$  vom Radius  $r$  um den Ursprung.<sup>6</sup> Dieselbe Bemerkung zeigt, dass

$$\iota_\kappa = \tau_\omega \circ (\zeta_r \circ \iota_{\kappa_0} \circ \zeta_{1/r}) \circ \tau_\omega^{-1} = \tau_\omega \circ (\zeta_r \circ \iota_{\kappa_0} \circ \zeta_{1/r}) \circ \tau_{-\omega}.$$

Die rechte Seite ist aber gerade durch die im Lemma angegebene Formel gegeben.  $\square$

## IV.2 Die hyperbolische Ebene

Im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie ist die zugrunde liegende Punktmenge die offene Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

in der komplexen Zahlenebene. Die zugehörige *abgeschlossene Einheitskreisscheibe* ist

$$\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

### IV.2.1 Geraden

Im Folgenden sei

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \partial \mathbb{D}.$$

der Einheitskreis.

---

<sup>6</sup>Das kann man natürlich auch direkt nachprüfen.

**IV.2.1 Bemerkung.** Es sei  $z = a + b \cdot i \in \mathbb{S}$  eine komplexe Zahl vom Betrag eins. Nach I.2.11 Bemerkung existiert ein Winkel  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  mit  $a = \cos(\vartheta)$  und  $b = \sin(\vartheta)$ . Für die komplexe Exponentialfunktion ([37], 4.10.10 Definition, [40], II.4.2 Definitionen, ii) gilt nach der Eulerformel ([37], 4.10.12 Satz, ii), [40], II.5.4 Satz)

$$\exp(i \cdot \vartheta) = \cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) \cdot i.$$

Wir werden daher komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis oft in der Form  $\exp(i \cdot \vartheta)$  mit  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  schreiben. Für eine beliebige, von Null verschiedene komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}^*$  existiert eine eindeutig bestimmte Zahl  $\operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$ , so dass

$$z = |z| \cdot \exp(\operatorname{Arg}(z)).$$

Man nennt  $\operatorname{Arg}(z)$  das *Argument* von  $z$ .

Es seien  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  und  $c + d \cdot i \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$(\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = (\cos(\vartheta) \cdot c - \sin(\vartheta) \cdot d) + (\sin(\vartheta) \cdot c + \cos(\vartheta) \cdot d) \cdot i.$$

Ein Vergleich mit II.1.11 Bemerkungen, i), zeigt, dass unter der Identifikation  $\psi$  aus IV.1.3 Bemerkung die Multiplikation mit  $\exp(i \cdot \vartheta) = \cos(\vartheta) + \sin(\vartheta) \cdot i$  der Drehung um den Winkel  $\vartheta$  entspricht.

**IV.2.2 Definition.** i) Eine Teilmenge  $\ell \subset \mathbb{D}$  heißt (*hyperbolische*) *Gerade*, wenn es a) eine Gerade  $\bar{\ell} \in \mathbb{C}$  mit  $0 \in \bar{\ell}$  gibt, so dass  $\ell = \bar{\ell} \cap \mathbb{D}$  oder es b) einen Kreis  $\varkappa \subset \mathbb{C}$  gibt, der orthogonal auf  $\mathbb{S}$  steht, so dass  $\ell = \varkappa \cap \mathbb{D}$ .

ii) Es seien  $\ell \subset \mathbb{D}$  eine hyperbolische Gerade. In Fall a) ist die Gerade  $\bar{\ell}$  eindeutig durch  $\ell$  bestimmt, und wir setzen  $M_\ell := \bar{\ell}$ . In Fall b) ist der Kreis  $\varkappa$  eindeutig durch  $\ell$  bestimmt.<sup>7</sup> Wir schreiben dann  $M_\ell := \varkappa$ .

Wir betrachten Fall b) in der Definition. Nach IV.1.2 Satz ist ein Kreis  $\varkappa \subset \mathbb{C}$  genau dann orthogonal zu  $\mathbb{S}$ , wenn es reelle Zahlen  $f, g$  mit  $f^2 + g^2 > 4$  gibt, so dass

$$\varkappa = \{ z = a + b \cdot i \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 + f \cdot a + g \cdot b + 1 = 0 \}.$$

Der Mittelpunkt von  $\varkappa$  ist nach Abschnitt IV.1.1

$$\omega = \left( -\frac{f}{2}, -\frac{g}{2} \right).$$

Die Bedingung  $f^2 + g^2 > 4$  ist äquivalent zu  $\omega \notin \overline{\mathbb{D}}$ . Wir formulieren diese Beobachtung folgendermaßen.

**IV.2.3 Satz.** Zu jedem Punkt  $\omega = (o_1, o_2) \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  existiert genau ein Kreis  $\varkappa$ , der orthogonal zu  $\mathbb{S}$  ist. Seine Gleichung lautet

$$\varkappa = \{ z = a + b \cdot i \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 - 2 \cdot o_1 \cdot a - 2 \cdot o_2 \cdot b + 1 = 0 \}.$$

---

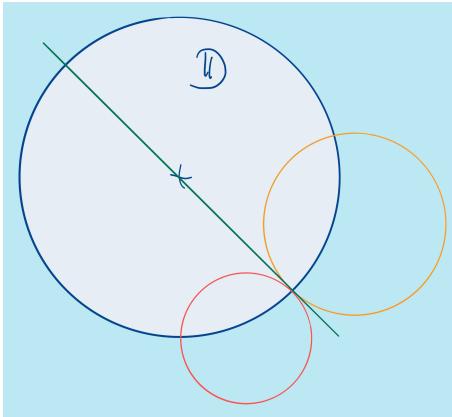
<sup>7</sup>z.B. nach III.7.34 Satz

**IV.2.4 Definition.** Zwei hyperbolische Geraden  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{D}$  sind *parallel*, wenn

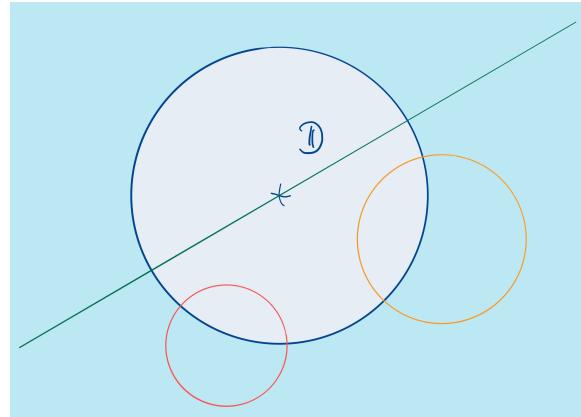
$$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset.$$

Zwei hyperbolische Geraden  $\ell_1, \ell_2$  sind *ultraparallel*, wenn

$$M_{\ell_1} \cap M_{\ell_2} \cap \overline{\mathbb{D}} = \emptyset.$$



Geraden, die parallel aber nicht ultraparallel sind



ultraparallele Geraden

**IV.2.5 Bemerkungen.** i) Die Definition von „ultraparallel“ ist unschön, weil sie den Rand  $\mathbb{S}$  verwendet, von dem wir als Bewohner und Bewohnerinnen der hyperbolischen Ebene erst einmal nichts wissen.

ii) Es sei  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  und  $\varkappa = K(\omega, r)$  der Kreis mit Mittelpunkt  $\omega$ , der auf  $\mathbb{S}$  senkrecht steht. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für einen Schnittpunkt  $P$  von  $\mathbb{S}$  und  $\varkappa$  die Gleichung

$$\omega \cdot \overline{\omega} = d(0, \omega)^2 = d(0, P)^2 + d(P, \omega)^2 = 1 + r^2. \quad (\text{IV.3})$$

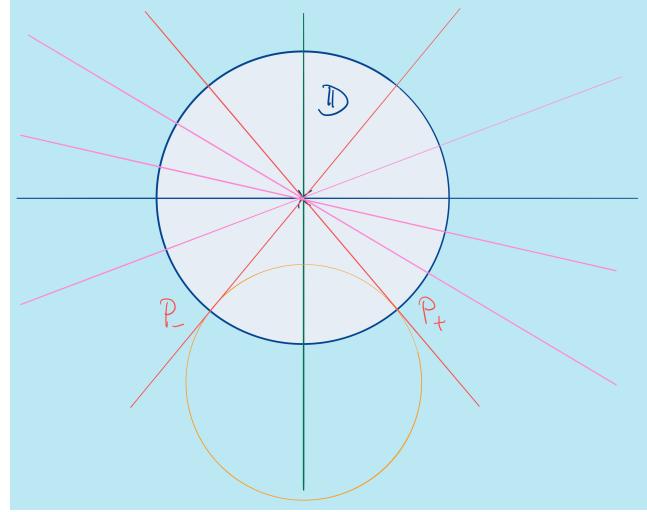
Dies bedeutet  $r < d(0, \omega)$ . Es sei  $\ell$  die euklidische Gerade, die senkrecht auf  $\overline{0\omega}$  steht und 0 enthält. Der Kreis  $\varkappa$  ist in dem Halbraum enthalten, der durch  $\ell$  und  $\omega$  bestimmt ist. Wir betonen:

★  $0 \notin \varkappa$ . Demnach sind die einzigen hyperbolischen Geraden durch 0 die hyperbolischen Geraden vom Typ a).

★ Die durch  $\varkappa$  definierte hyperbolische Gerade  $M_\varkappa$  ist ultraparallel zu der durch  $\ell$  definierten hyperbolischen Geraden  $M_\ell$ .

iii) Es seien  $\ell = \{a + 0 \cdot i \mid a \in \mathbb{R}\}$  die reelle und  $m := \{0 + b \cdot i \mid b \in \mathbb{R}\}$  die imaginäre Achse. Wir fixieren einen Punkt  $\omega_0 = b \cdot i \in m$  mit  $b < 0$ . Nach Teil i) der Bemerkung liegt der durch  $\omega_0$  definierte zu  $\mathbb{S}$  orthogonale Kreis in der unteren Halbebene, d.h., in der Menge der komplexen Zahlen mit negativem Imaginärteil. Der Kreis  $\varkappa$  schneide  $\mathbb{S}$  in den Punkten  $P_+$  und  $P_-$ . Dabei habe  $P_+$  einen positiven Realteil und  $P_-$  einen negativen.

Es seien  $t_+ := M_{\overline{0P_+}}$  und  $t_- := M_{\overline{0P_-}}$ . Diese hyperbolischen Geraden sind parallel zu  $M_\infty$  aber nicht ultraparallel. Die Steigung  $\lambda$  von  $t_-$  ist positiv, die Steigung von  $t_+$  ist  $-\lambda$ . Für  $\eta \in (-\lambda, \lambda)$  seien  $n_\eta := \{a + \eta \cdot a \cdot i \mid a \in \mathbb{R}\}$  die euklidische Gerade durch 0 mit Steigung  $\eta$  und  $t_\eta := M_{n_\eta}$ . Die hyperbolische Gerade  $t_\eta$  ist ultraparallel zu  $M_\infty$ . Auf Grund der Beobachtung in Teil i) haben wir alle hyperbolischen Geraden durch 0 beschrieben, die parallel bzw. ultraparallel zu  $M_\infty$  sind. Insbesondere erkennen wir, dass es unendlich viele solcher Geraden gibt. Das euklidische Parallelenaxiom ist also in der hyperbolischen Ebene verletzt.



## IV.2.2 Spiegelungen

Jede Isometrie der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  kann als Verknüpfung von (höchstens drei) Spiegelungen dargestellt werden (II.1.15 Aufgaben, b). In der hyperbolischen Geometrie werden wir daher die Symmetrien direkt aus Spiegelungen aufbauen.

**IV.2.6 Satz.** Es sei  $\ell \subset \mathbb{D}$  eine hyperbolische Gerade.

- i) Wenn  $M_\ell \subset \mathbb{C}$  eine Gerade ist, dann bildet die Spiegelung  $\sigma_{M_\ell}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  an dieser Geraden die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  und den Einheitskreis  $\mathbb{S}$  jeweils auf sich ab.
- ii) Wenn  $M_\ell \subset \mathbb{C}$  ein Kreis ist, dann bildet die Inversion  $\iota_{M_\ell}: \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$  an  $M_\ell$  die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  und den Einheitskreis  $\mathbb{S}$  jeweils auf sich ab. Dabei sei  $\omega$  der Mittelpunkt des Kreises  $M_\ell$ .

*Beweis.* Teil i) ist offensichtlich und wird der Leserin bzw. dem Leser als Übung überlassen. Für Teil ii) erinnern wir daran, dass der Mittelpunkt  $\omega$  von  $M_\ell$  nicht in  $\overline{\mathbb{D}}$  enthalten ist. Daher ist  $\iota_{M_\ell}$  auf  $\mathbb{D}$  und  $\mathbb{S}$  definiert. Es sei  $r$  der Radius von  $M_\ell$ . Nach (IV.3) haben wir

$$\omega \cdot \bar{\omega} - r^2 = 1. \quad (\text{IV.4})$$

Gemäß IV.1.12 Lemma gilt für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$ , dass

$$\iota_{M_\ell}(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{\omega}} + \omega = \frac{\omega \cdot \bar{z} - \omega \cdot \bar{\omega} + r^2}{\bar{z} - \bar{\omega}} \stackrel{(\text{IV.4})}{=} \frac{\omega \cdot \bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\omega}}.$$

Man berechnet

$$|\omega \cdot \bar{z} - 1|^2 - |\bar{z} - \bar{\omega}|^2 = (\bar{\omega} \cdot z - 1) \cdot (\omega \cdot \bar{z} - 1) - (z - \omega) \cdot (\bar{z} - \bar{\omega}) = (\omega \cdot \bar{\omega} - 1) \cdot (|z|^2 - 1).$$

Wenn  $z \in \mathbb{S}$ , dann gilt  $|z| = 1$ , und aus der obigen Rechnung folgt  $|\iota_{M_\ell}(z)| = 1$ , so dass  $\iota_{M_\ell}(z) \in \mathbb{S}$ . Wenn  $z \in \mathbb{D}$ , dann haben wir  $|z|^2 - 1 < 0$  und können auf  $|\iota_{M_\ell}(z)| < 1$  und  $\iota_{M_\ell}(z) \in \mathbb{D}$  schließen.  $\square$

Es sei nun  $\ell$  eine hyperbolische Gerade. Wenn  $M_\ell$  eine Gerade ist und  $\sigma_{M_\ell} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die übliche Spiegelung an  $M_\ell$ , dann ist

$$\begin{aligned}s_\ell : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \sigma_{M_\ell}(z)\end{aligned}$$

nach IV.2.6 Satz, i), definiert. Ebenso ist für den Fall, dass  $M_\ell$  ein Kreis ist, die Abbildung

$$\begin{aligned}s_\ell : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \iota_{M_\ell}(z)\end{aligned}$$

nach IV.2.6 Satz, ii), definiert. In beiden Fällen gilt

- ★  $s_\ell \circ s_\ell = \text{id}_{\mathbb{D}}$ , so dass  $s_\ell$  insbesondere bijektiv ist.
- ★  $\forall z \in \mathbb{D}: (s_\ell(z) = z \iff z \in \ell)$ .

Wir nennen  $s_\ell$  die (*hyperbolische*) *Spiegelung* an  $\ell$ .

**IV.2.7 Satz.** *Es seien  $s : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  eine hyperbolische Spiegelung und  $m \subset \mathbb{D}$  eine hyperbolische Gerade. Dann ist auch  $s(m)$  eine hyperbolische Gerade.*

*Beweis.* Es sei  $s$  die hyperbolische Spiegelung an der hyperbolischen Geraden  $\ell$ . Wir nehmen zunächst an, dass  $M_\ell$  eine Gerade ist. Falls  $M_m$  eine Gerade ist, dann verläuft sie durch 0, und  $\sigma_{M_\ell}(M_m)$  ist wieder eine Gerade durch den Ursprung. Falls  $M_m$  ein Kreis ist, dann ist auch  $\sigma_{M_\ell}(M_m)$  ein Kreis. Weiter erhält  $\sigma_{M_\ell}$  Winkel. Daher steht der Kreis  $\sigma_{M_\ell}(M_m)$  senkrecht auf dem Kreis  $\sigma_{M_\ell}(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$  und entspricht somit ebenfalls einer hyperbolischen Geraden.

Falls  $M_\ell$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $\omega$  ist, so zeigen IV.1.7 Satz und IV.1.8 Satz, dass  $\iota_{M_\ell}(M_m \setminus \{\omega\})$  eine Gerade oder ein Kreis ist, der oder dem evtl. der Punkt  $\omega$  fehlt. Nach IV.1.11 Satz erhält  $\iota_\omega$  Schnittwinkel. Die beiden Schnittwinkel von  $M_m$  mit  $\mathbb{S}$  betragen  $\pi/2$ . Das gilt auch für die Schnittwinkel von  $\iota_{M_\ell}(M_m)$  mit  $\iota_{M_\ell}(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ . Wenn  $\iota_{M_\ell}(M_m)$  eine Gerade ist, dann muss sie durch 0 verlaufen. Wenn  $\iota_{M_\ell}(M_m)$  ein Kreis ist, so steht er wieder senkrecht auf  $\mathbb{S}$ .  $\square$

Die Symmetriegruppe der hyperbolischen Ebene wird aus hyperbolischen Spiegelungen aufgebaut. Das nächste Resultat deutet bereits darauf hin, dass wir mit den Spiegelungen eine hinreichend große Gruppe erzeugen werden.

**IV.2.8 Satz.** *Es sei  $A \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Dann existiert eine hyperbolische Gerade  $\ell \subset \mathbb{D}$  mit*

$$\sigma_\ell(A) = 0.$$

*Beweis.* Wir suchen auf der Halbgeraden  $[0A$  einen Punkt  $\omega$ , so dass die Inversion am Kreis  $\kappa = K(\omega, r)$  den Punkt  $A$  auf 0 abbildet. Nach (IV.3) gilt  $r = \sqrt{|\omega|^2 - 1}$ . Wir müssen also nach IV.1.4 Definition die Gleichung

$$|\omega| \cdot d(\omega, A) = d(\omega, 0) \cdot d(\omega, A) = |\omega|^2 - 1$$

erfüllen. Da  $|\omega| > 1$  gelten muss, haben wir  $d(\omega, A) = d(\omega, 0) - d(0, A)$ , so dass wir

$$|\omega| \cdot d(0, A) = d(0, \omega) \cdot d(0, A) = 1$$

erreichen müssen. Diese Gleichung zeigt, dass der gesuchte Punkt  $\omega$  das Bild von  $A$  unter der Inversion  $\iota_{\mathbb{S}}$  am Einheitskreis  $\mathbb{S}$  ist (s. IV.1.4 Definition).  $\square$

Dieser Satz ist deshalb so wertvoll, weil wir nach IV.2.5 Bemerkungen, ii), alle Geraden durch 0 kennen. So können wir das folgende fundamentale Resultat leicht ableiten.

**IV.2.9 Satz.** *Es seien  $A, B \in \mathbb{D}$  zwei verschiedene Punkte. Dann existiert genau eine hyperbolische Gerade  $\ell \subset \mathbb{D}$  mit  $A \in \ell$  und  $B \in \ell$ .*

*Beweis.* Jede Gerade durch 0 ist, wie in IV.2.5 Bemerkungen, ii), vermerkt, vom Typ a) in IV.2.2 Definition. Für einen Punkt  $C \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  gibt es offenbar nur eine hyperbolische Gerade vom Typ a) durch 0 und  $C$ , nämlich  $\overline{0C} \cap \mathbb{D}$ . Wenn  $A = 0$  oder  $B = 0$ , folgt daraus die Behauptung. Ansonsten sei gemäß IV.2.8 Satz  $\ell \subset \mathbb{D}$  eine hyperbolische Gerade mit  $s_\ell(A) = 0$ . Nach IV.2.7 Satz induziert  $s_\ell$  eine Bijektion zwischen den Geraden durch  $A$  und  $B$  und den Geraden durch 0 und  $s_\ell(B)$ , und wir können die Beobachtung zu Beginn des Beweises anwenden.  $\square$

*IV.2.10 Aufgabe.* Benutzen Sie IV.2.8 Satz und IV.2.5 Bemerkungen, iii), um zu beweisen, dass für jede hyperbolische Gerade  $\ell$  und jeden Punkt  $P \in \mathbb{D} \setminus \ell$  unendlich viele hyperbolische Gerade existieren, die  $P$  enthalten und (ultra)parallel zu  $\ell$  sind.

### IV.2.3 Die Symmetriegruppe der hyperbolischen Ebene

Wir definieren die *Gruppe der hyperbolischen Transformationen* als die Untergruppe  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  von  $S(\mathbb{D}) = \{\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \mid \varphi \text{ ist bijektiv}\}$ , die von den hyperbolischen Spiegelungen erzeugt wird. Ein Element aus  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  ist eine *hyperbolische Transformation* und nach [36], II.4.15 Lemma, ein Produkt von endlich vielen Spiegelungen.<sup>8</sup> Wir werden nun zeigen, wie man Elemente aus  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  effizienter beschreiben kann. Als erstes verschärfen wir IV.2.8 Satz.

**IV.2.11 Satz.** *Es seien  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{D}$  hyperbolische Geraden und  $A_1 \in \ell_1, A_2 \in \ell_2$  Punkte. Dann existiert eine hyperbolische Transformation  $\tau: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit*

$$\tau(\ell_1) = \ell_2 \quad \text{und} \quad \tau(A_1) = A_2.$$

*Beweis.* Auf Grund von IV.2.8 Satz gibt es hyperbolische Spiegelungen  $s_1: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  und  $s_2: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $s_1(A_1) = 0$  und  $s_2(A_2) = 0$ . Dann sind  $m_1 := s_1(\ell_1)$  und  $m_2 := s_2(\ell_2)$  hyperbolische Geraden durch 0, und es existiert eine (euklidische) Drehung  $\varrho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die  $M_{m_1}$  auf  $M_{m_2}$  abbildet. Diese Drehung kann aber als Hintereinanderausführung zweier (euklidischer) Spiegelungen an Geraden  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  durch 0 dargestellt werden. Wir setzen  $\varrho_1 := \gamma_1 \cap \mathbb{D}$  und  $\varrho_2 := \gamma_2 \cap \mathbb{D}$ . Unsere Diskussion zeigt, dass die hyperbolische Transformation

$$s_2 \circ s_{\varrho_2} \circ s_{\varrho_1} \circ s_1 = s_2^{-1} \circ s_{\varrho_2} \circ s_{\varrho_1} \circ s_1$$

die geforderte Eigenschaft hat.  $\square$

Wir schauen uns die projektive Gerade  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  über den komplexen Zahlen an. Für eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

<sup>8</sup>Man beachte hierbei, dass  $s \circ s = \text{id}_{\mathbb{D}}$  und deswegen  $s^{-1} = s$  für eine hyperbolische Spiegelung  $s$  gilt.

haben wir die projektive Transformation

$$\varphi_A: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

$$[z_0 : z_1] \longmapsto [(\alpha \cdot z_0 + \beta \cdot z_1) : (\gamma \cdot z_0 + \delta \cdot z_1)].$$

Man nennt die projektiven Transformation auf  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  auch *Möbiustransformationen*.

Wir benutzen die Einbettung

$$\iota_1: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

$$z \longmapsto [z : 1].$$

Im Folgenden schreiben wir auch  $\infty := [1 : 0]$ . Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\gamma \cdot z + \delta \neq 0$  haben wir

$$\varphi_A([z : 1]) = [(\alpha \cdot z + \beta) : (\gamma \cdot z + \delta)] = \left[ \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \delta} : 1 \right].$$

Falls  $\gamma = 0$ , definieren wir

$$\mu_A: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{\alpha}{\delta} \cdot z + \frac{\beta}{\delta}.$$

Dies ist eine affine Abbildung. Falls  $\gamma \neq 0$ , setzen wir

$$\mu_A: \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \delta}.$$

*IV.2.12 Bemerkung.* Im ersten Fall gilt  $\mu_A(\infty) = \infty$ . Im zweiten Fall gilt  $\mu_A(-\delta/\gamma) = \infty$  und  $\mu_A(\infty) = \alpha/\gamma$ . Demgemäß ist das Bild von  $\mu_A$  die Menge  $\mathbb{C} \setminus \{\alpha/\gamma\}$ .

Wir nehmen nun an, dass  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  komplexe Zahlen mit  $|\beta| < |\alpha|$  sind, und setzen

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\det(A) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$ , so dass  $A$  invertierbar ist. Weiter haben wir  $|-\bar{\alpha}/\bar{\beta}| = |\alpha|/|\beta| > 1$ , falls  $\beta \neq 0$ , so dass  $\mu_A$  auf  $\overline{\mathbb{D}}$  definiert ist. Wenn  $\beta = 0$ , dann ist  $\mu_A$  sowieso auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert. Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$|\alpha \cdot z + \beta|^2 - |\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha}|^2 = (\alpha \cdot z + \beta) \cdot (\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \bar{\beta}) - (\beta \cdot \bar{z} + \alpha) \cdot (\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha}) = (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cdot (|z|^2 - 1).$$

Wenn  $|z| = 1$ , i.e.,  $z \in \mathbb{S}$ , dann folgt  $|\mu_A(z)| = 1$ , so dass  $\mu_A(z) \in \mathbb{S}$ . Wenn  $|z| < 1$ , also  $z \in \mathbb{D}$ , dann impliziert die Rechnung  $|\mu_A(z)| < 1$ , d.h.,  $\mu_A(z) \in \mathbb{D}$ . Folglich erhalten wir

$$\bar{\mu}_A: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$z \longmapsto \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha}}.$$

**IV.2.13 Satz.** *Die Menge*

$$\mathbb{M} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\beta| < |\alpha| \right\}$$

ist eine Untergruppe von  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ .

*Beweis.* Es gilt  $\mathbb{E}_2 \in \mathbb{M}$ . Hier ist  $\alpha = 1$  und  $\beta = 0$ . Es sei weiter

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}.$$

Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Matrix aus  $\mathbb{M}$  zu  $\alpha' := \bar{\alpha}/(|\alpha|^2 - |\beta|^2)$  und  $\beta' := -\beta/(|\alpha|^2 - |\beta|^2)$ .

Für

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix}$$

folgt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \bar{\delta} & \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} \cdot \gamma + \bar{\alpha} \cdot \bar{\delta} & \bar{\beta} \cdot \delta + \bar{\alpha} \cdot \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \bar{\zeta} & \bar{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

mit

$$\varepsilon = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \bar{\delta} \quad \text{und} \quad \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \bar{\gamma}.$$

Weiter sehen wir

$$|\varepsilon|^2 - |\zeta|^2 = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cdot (|\gamma|^2 - |\delta|^2) > 0.$$

Somit gilt  $A \cdot B \in \mathbb{M}$ . □

**IV.2.14 Beispiele.** i) Es sei  $\kappa = K(\omega, r)$  der Kreis mit Mittelpunkt  $\omega \in \mathbb{C}$  und Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , der senkrecht auf  $\mathbb{S}$  steht. Wir haben in IV.1.12 Lemma und im Beweis von IV.2.6 Satz berechnet, dass für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$

$$\iota_\kappa(z) = \frac{\omega \cdot \bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\omega}} = \frac{-i \cdot \omega \cdot \bar{z} + i}{-i \cdot \bar{z} + i \cdot \bar{\omega}}.$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} \sigma_0: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

die komplexe Konjugation. Dies ist auch die Spiegelung an der reellen Achse. Wir finden

$$(\sigma_0 \circ \iota_\kappa)(z) = \frac{i \cdot \bar{\omega} \cdot z - i}{i \cdot z - i \cdot \omega}.$$

Dies ist die Abbildung  $\bar{\mu}_A$  zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i \cdot \bar{\omega} & -i \\ i & -i \cdot \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cdot \bar{\omega} & -i \\ \bar{\omega} & i \cdot \bar{\omega} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$|i \cdot \bar{\omega}|^2 - |-i|^2 = |\omega|^2 - 1 > 0$$

gehört  $A$  zu  $\mathbb{M}$ .

ii) Es seien  $\omega, \xi \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  und  $\varkappa, \varkappa'$  die zugehörigen zu  $\mathbb{S}$  orthogonalen Kreise (IV.2.3 Satz). Für  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  gilt dann

$$\iota_\varkappa(\iota_{\varkappa'}(z)) = \frac{\omega \cdot \frac{\bar{\xi} \cdot z - 1}{z - \xi} - 1}{\frac{\bar{\xi} \cdot z - 1}{z - \xi} - \bar{\omega}} = \frac{\omega \cdot \bar{\xi} \cdot z - \omega - z + \xi}{\bar{\xi} \cdot z - 1 - \bar{\omega} \cdot z + \bar{\omega} \cdot \xi} = \frac{(\omega \cdot \bar{\xi} - 1) \cdot z + (\xi - \omega)}{(\bar{\xi} - \bar{\omega}) \cdot z + (\bar{\omega} \cdot \xi - 1)}.$$

Weiter haben wir

$$|\omega \cdot \bar{\xi} - 1|^2 - |\xi - \omega|^2 = |\omega|^2 \cdot |\xi|^2 + 1 - |\omega|^2 - |\xi|^2 = (|\omega|^2 - 1) \cdot (|\xi|^2 - 1) > 0.$$

Damit gehört

$$\begin{pmatrix} \omega \cdot \bar{\xi} - 1 & \xi - \omega \\ \bar{\xi} - \bar{\omega} & \omega \cdot \bar{\xi} - 1 \end{pmatrix}$$

zu  $\mathbb{M}$ .

**IV.2.15 Satz.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{M}$  ist  $\bar{\mu}_A$  die Verknüpfung von zwei hyperbolischen Spiegelungen.

*Beweis.* Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

**Fall A).** Hier nehmen wir  $\beta = 0$  an. In diesem Fall ist  $\bar{\mu}_A$  die Multiplikation mit der komplexen Zahl  $\alpha/\bar{\alpha}$ . Diese Zahl hat den komplexen Betrag eins. Nach IV.2.1 Bemerkung können wir sie in der Form  $\exp(i \cdot \vartheta)$  mit  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  schreiben. Wie ebenfalls bemerkt ist  $\bar{\mu}_A$  somit die Einschränkung einer Drehung  $\varrho_\vartheta$  um den Winkel  $\vartheta$  auf  $\mathbb{D}$ . Wie in IV.2.14 Beispiele, i), bezeichne  $\sigma_0$  die komplexe Konjugation. Dann sind  $\sigma_0$  und  $\sigma_0 \circ \varrho_\vartheta$  euklidische Spiegelungen an Geraden durch 0. Wir bezeichnen mit  $s_0$  und  $s_{0,\vartheta}$  die induzierten hyperbolischen Spiegelungen. Laut unserer Beobachtung gilt

$$\bar{\mu}_A = s_0 \circ s_{0,\vartheta}.$$

**Fall B).** Es sei  $P := \bar{\mu}_A(0)$ . Hier setzen wir  $\beta \neq 0$ , d.h.,  $P \neq 0$  voraus. Nach IV.2.8 Satz gibt es eine hyperbolische Spiegelung  $s_1$  mit  $s_1(P) = 0$  und nach IV.2.14 Beispiele, i), eine Matrix  $B \in \mathbb{M}$  mit  $s_0 \circ s_1 = \bar{\mu}_B$ . (Hier bezeichne  $s_0$  wieder die durch die komplexe Konjugation induzierte hyperbolische Spiegelung.) Es gilt  $\bar{\mu}_B \circ \bar{\mu}_A = \bar{\mu}_{B \cdot A}$  und  $\bar{\mu}_{B \cdot A}(0) = 0$ . Nach Fall A) existiert ein Winkel  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  mit  $\bar{\mu}_{B \cdot A} = s_0 \circ s_{0,\vartheta}$ . Somit haben wir die Identität

$$s_0 \circ s_1 \circ \bar{\mu}_A = s_0 \circ s_{0,\vartheta}$$

und folglich

$$\bar{\mu}_A = s_1 \circ s_{0,\vartheta}$$

bewiesen. □

Eine hyperbolische Transformation  $\tau$ , zu der es eine Matrix  $A \in \mathbb{M}$  mit  $\tau = \bar{\mu}_A$  gibt, nennen wir eine *direkte hyperbolische Transformation*. Der Beweis des nächsten Resultats erklärt, dass direkte hyperbolische Transformationen diejenigen sind, die sich als ein Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen darstellen lassen.

**IV.2.16 Folgerung.** *Jede hyperbolische Transformation ist eine Verknüpfung von höchstens drei hyperbolischen Spiegelungen.*

*Beweis.* Es bezeichne  $s_0$  die hyperbolische Spiegelung, die der komplexen Konjugation entspricht.

Es seien  $\vartheta \in [0, 2\pi)$ ,  $\alpha = \exp(i \cdot (\vartheta/2))$  und

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}.$$

Wie im Beweis von IV.2.15 Satz erläutert, beschreibt  $\bar{\mu}_A$  die Multiplikation mit der Zahl  $\alpha/\bar{\alpha}$ . Wegen  $|\alpha| = 1$  gilt  $\bar{\alpha} = 1/\alpha$ , so dass  $\bar{\mu}_A$  die Multiplikation mit  $\alpha^2 = \exp(i \cdot \vartheta)$ , also die Drehung um den Winkel  $\vartheta$ , beschreibt. Da das Produkt zweier Spiegelungen an Geraden durch den Nullpunkt eine Drehung um den Nullpunkt ist, können wir solch ein Produkt in der Form  $\bar{\mu}_A$  mit  $A \in \mathbb{M}$  schreiben.

Falls  $\ell_1$  und  $\ell_2$  zwei hyperbolische Geraden sind, die 0 nicht enthalten, dann zeigt die Berechnung in IV.2.14 Beispiele, ii), dass  $s_{\ell_1} \circ s_{\ell_2}$  von der Form  $\bar{\mu}_A$  mit  $A \in \mathbb{M}$  ist.

In IV.2.14 Beispiele, i), haben wir auch gezeigt, dass für eine Gerade  $\ell$ , die 0 nicht enthält,  $s_0 \circ s_\ell$  von der Gestalt  $\bar{\mu}_A$  mit  $A \in \mathbb{M}$  ist. Analog kann man für  $s_\ell \circ s_0$  argumentieren.

Eine Spiegelung an einer hyperbolischen Geraden  $\ell$  durch 0 kann man wahlweise als Drehung  $\circ s_0$  oder  $s_0 \circ$  Drehung schreiben. Die Drehung sei als  $\bar{\mu}_A$  zu  $A \in \mathbb{M}$  gegeben. Für eine beliebige hyperbolische Spiegelung  $s$  kann  $s_0 \circ s$  bzw.  $s \circ s_0$  als  $\bar{\mu}_B$  mit  $B \in \mathbb{M}$  dargestellt werden. Folglich stimmt  $s_\ell \circ s$  bzw.  $s \circ s_\ell$  mit  $\bar{\mu}_A \circ \bar{\mu}_B = \bar{\mu}_{A \cdot B}$  bzw.  $\bar{\mu}_B \circ \bar{\mu}_A = \bar{\mu}_{B \cdot A}$  überein.

Insgesamt ist also jedes Produkt von zwei hyperbolischen Spiegelungen als  $\bar{\mu}_A$  mit  $A \in \mathbb{M}$  gegeben. Mit der schon benutzten Formel  $\bar{\mu}_A \circ \bar{\mu}_B = \bar{\mu}_{A \cdot B}$ ,  $A, B \in \mathbb{M}$ , und IV.2.15 Satz ergibt sich, dass jedes Produkt von einer geraden Anzahl von hyperbolischen Spiegelungen die Identität ist oder sich als Produkt von genau zwei Spiegelungen schreiben lässt. Demnach ist ein Produkt einer ungeraden Anzahl von hyperbolischen Spiegelungen ein Produkt von höchstens drei hyperbolischen Spiegelungen.  $\square$

Eine hyperbolische Transformation, die ein Produkt einer ungeraden Anzahl hyperbolischer Spiegelungen ist, ist eine *indirekte hyperbolische Transformation*.

**IV.2.17 Bemerkungen.** i) Eine direkte hyperbolische Transformation ist eine hyperbolische Transformation, die die Orientierung der Einheitskreisscheibe erhält. Eine indirekte hyperbolische Transformation kehrt die Orientierung von  $\mathbb{D}$  um.

ii) Es seien  $\ell_1$  und  $\ell_2$  zwei hyperbolische Geraden. Es gilt nun drei Fälle zu unterscheiden.

- ★ Die Geraden  $\ell_1$  und  $\ell_2$  schneiden sich in einem Punkt  $P \in \mathbb{D}$ . Dann ist  $P$  der einzige Fixpunkt von  $\tau = s_{\ell_1} \circ s_{\ell_2}$ . Wir bezeichnen dies als *hyperbolische Drehung*. (Falls  $P = 0$ , ist die Abbildung durch eine euklidische Drehung induziert. Andernfalls

kann man die euklidische Drehung, die durch die Hintereinanderausführung der euklidischen Spiegelungen an den Tangenten in  $P$  an die beiden beteiligten Kreisen entsteht, als infinitesimale Version der hyperbolischen Drehung in der Nähe von  $P$  ansehen.)

- ★ Wenn  $\ell_1$  und  $\ell_2$  parallel aber nicht ultraparallel sind, dann schneiden sich  $M_{\ell_1}$  und  $M_{\ell_2}$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{S}$ . Wie gesehen, lässt sich  $\tau = s_{\ell_1} \circ s_{\ell_2}$  zu einer bijektiven Abbildung  $\bar{\tau}: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  fortsetzen, und  $P$  ist ein Fixpunkt von  $\bar{\tau}$ . Man sagt, das  $\tau$  eine *hyperbolische Grenzdrehung* ist.
- ★ Falls  $\ell_1$  und  $\ell_2$  ultraparallel sind, dann haben  $\tau = s_{\ell_1} \circ s_{\ell_2}$  und  $\bar{\tau}$  keine Fixpunkte, und wir nennen  $\tau$  eine *hyperbolische Translation*.

iii) Durch

$$\begin{aligned} h: (\mathbb{R}^*, \cdot) &\longrightarrow \mathbb{M} \\ \lambda &\longmapsto \lambda \cdot \mathbb{E}_2 \end{aligned}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus gegeben. Es sei  $\mathcal{Z} \subset \mathbb{M}$  das Bild von  $h$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} \bar{\mu}: \overline{\mathbb{M}} &:= \mathbb{M}/\mathcal{Z} \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{D}) \\ [A] &\longmapsto \bar{\mu}_A \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Homomorphismus. Das Bild ist die Untergruppe der direkten hyperbolischen Transformationen.

Man setzt

$$\text{SU}(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Dies ist eine Untergruppe von  $\mathbb{M}$ . Sie wird in IV.2.18 Aufgabe genauer untersucht. Für eine Matrix  $A \in \mathbb{M}$  ist

$$\frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \cdot A \in \text{SU}(1, 1).$$

Inbesondere ist  $\text{SU}(1, 1) \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}, A \mapsto [A]$ , surjektiv. Wie in [40], IV.9.5 Satz, gezeigt wird, ist das Bild von  $\bar{\mu}$  die Gruppe der biholomorphen Selbstabbildungen von  $\mathbb{D}$ .<sup>9</sup> Die Gruppe  $\text{SU}(1, 1)$  ist innerhalb von  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  konjugiert zu  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  und somit insbesondere isomorph zu  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  ([40], III.6.18 Satz).

iv) Es seien  $\bar{\sigma}: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, [z_0 : z_1] \mapsto [\bar{z}_0 : \bar{z}_1]$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

und  $\varphi_A: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, [z_0 : z_1] \mapsto [(\alpha \cdot z_0 + \beta \cdot z_1) : (\gamma \cdot z_0 + \delta \cdot z_1)]$ . Dann gilt für  $z \in \mathbb{C}$ , dass

$$(\bar{\sigma} \circ \varphi_A)([z : 1]) = [(\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \bar{\beta}) : (\bar{\gamma} \cdot \bar{z} + \bar{\delta})] \quad \text{und} \quad (\varphi_A \circ \bar{\sigma})([z : 1]) = [(\alpha \cdot \bar{z} + \beta) : (\gamma \cdot \bar{z} + \delta)].$$

<sup>9</sup>Im Skript [40] wird die Abkürzung „Aut“ in einem anderen Sinne als hier gebraucht.

Falls  $\bar{\gamma} \cdot \bar{z} + \bar{\delta} \neq 0$  bzw.  $\gamma \cdot \bar{z} + \delta \neq 0$ , schreiben wir dies als

$$\left[ \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} \cdot \bar{z} + \bar{\delta}} : 1 \right] \quad \text{bzw.} \quad \left[ \frac{\alpha \cdot \bar{z} + \beta}{\gamma \cdot \bar{z} + \delta} : 1 \right].$$

Für

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$$

führen wir daher

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_A: \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{\alpha \cdot \bar{z} + \beta}{\bar{\beta} \cdot \bar{z} + \bar{\alpha}} \end{aligned}$$

ein. Mit diesen Transformationen können wir alle indirekten hyperbolischen Transformationen beschreiben. Diese Beschreibung macht einmal mehr deutlich, dass  $s_0$  und die direkten hyperbolischen Transformationen die Gruppe  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  aller hyperbolischer Transformationen erzeugen.

*IV.2.18 Aufgabe.* Durch

$$\begin{aligned} \beta: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((w_1, w_2), (z_1, z_2)) &\longmapsto \bar{w}_1 \cdot z_1 - \bar{w}_2 \cdot z_2 \end{aligned}$$

ist eine sogenannte Sesquilinearform auf  $\mathbb{C}^2$  gegeben, d.h., sie ist antilinear im ersten und linear im zweiten Argument.<sup>10</sup> Für eine komplexe Matrix  $A$  bezeichne  $A^\star$  die transponierte Matrix von  $A$ , in der alle Einträge komplex konjugiert werden. Mit

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^2 : \quad \beta(u, v) = u^\star \cdot J \cdot v.$$

Die Gruppe

$$\text{U}(1, 1) := \{ A \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \mid A^\star \cdot J \cdot A = J \}$$

ist die *Isotropiegruppe* von  $\beta$ .

a) Zeigen Sie, dass

$$\text{SU}(1, 1) = \text{U}(1, 1) \cap \text{SL}_2(\mathbb{C}).$$

b) Es sei  $D \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$  die Untergruppe der Diagonalmatrizen. Beschreiben Sie

$$D \cap \text{U}(1, 1).$$

c) Zeigen Sie, dass es für  $A \in \text{U}(1, 1)$  eine Matrix  $C \in D \cap \text{U}(1, 1)$  gibt, so dass

$$C \cdot A \in \text{SU}(1, 1).$$

<sup>10</sup>Man beachte, dass es sogenannte isotrope Vektoren, also Vektoren  $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)'\}$  mit  $\beta(v, v) = 0$ , gibt.

## IV.3 Der hyperbolische Abstand

In der hyperbolischen Geometrie gibt es wie in der euklidischen Geometrie eine Abstands- und eine Winkelmessung. In dem Modell, das bisher behandelt wurde, kann die Winkelmessung von der euklidischen Geometrie übernommen werden. Die Abstandsmessung gestaltet sich aufwändiger. Für den gesuchten Abstand soll gelten, dass hyperbolische Geraden die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten liefern und Geraden eine unendliche Länge haben. Dies sind Sachverhalte, die sich nicht direkt aus der Anschauung des Modells ergeben und daher sorgfältig entwickelt werden müssen.

### IV.3.1 Ein anderes Modell der hyperbolischen Ebene

Der Abstand in der hyperbolischen Ebene erlaubt nicht nur, die Distanz zwischen zwei Punkten zu messen, er krümmt in gewisser Weise auch die hyperbolische Ebene.<sup>11</sup> Um diese Krümmung anschaulich zu verstehen, empfiehlt es sich, die hyperbolische Ebene, die wir bisher behandelt haben, mit einem anderen Modell zu vergleichen, das in den euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  eingebettet ist. Dieses Modell basiert auf der oberen Schale des Rotationshyperboloids aus Abschnitt II.2.4.<sup>12</sup> Eine kurze Einführung mit historischen Anmerkungen findet man in [32]. Eine ausführliche Darstellung, der wir hier folgen, gibt es in [2].

Es sei

$$H^+ := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c > 0 \wedge c^2 = a^2 + b^2 + 1\}$$

die obere Schale des zweischaligen Rotationshyperboloids. Weiter haben wir die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D} := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = 0 \wedge a^2 + b^2 = 1\}.$$

Schließlich sei  $P_0 := (0, 0, -1)$ .<sup>13</sup> Wir beschreiben zunächst eine Art Projektionsabbildung

$$\pi: H^+ \longrightarrow \mathbb{D}.$$

Für einen Punkt  $A = (a, b, c) \in H^+$  zeichnen wir dazu die Gerade

$$\overline{P_0A} := \{(1 - \lambda) \cdot (0, 0, -1) + \lambda \cdot (a, b, c) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Der Parameter  $\lambda_0$ , der den Schnittpunkt von  $\overline{P_0A}$  mit der  $(x, y)$ -Ebene liefert, ist durch die Gleichung

$$0 = -1 + \lambda_0 + \lambda_0 \cdot c = -1 + \lambda_0 \cdot (1 + c)$$

bestimmt, d.h.

$$\lambda_0 = \frac{1}{1 + c}.$$

Der Schnittpunkt ist

$$S = \left( \frac{a}{1 + c}, \frac{b}{1 + c}, 0 \right).$$

<sup>11</sup>Eine sehr anschauliche Erläuterung dieses Sachverhalts findet man in [8], Abschnitt 42-1.

<sup>12</sup>Wir haben allerdings die Symmetrieeachse von der  $x$ -Achse auf die  $z$ -Achse geändert.

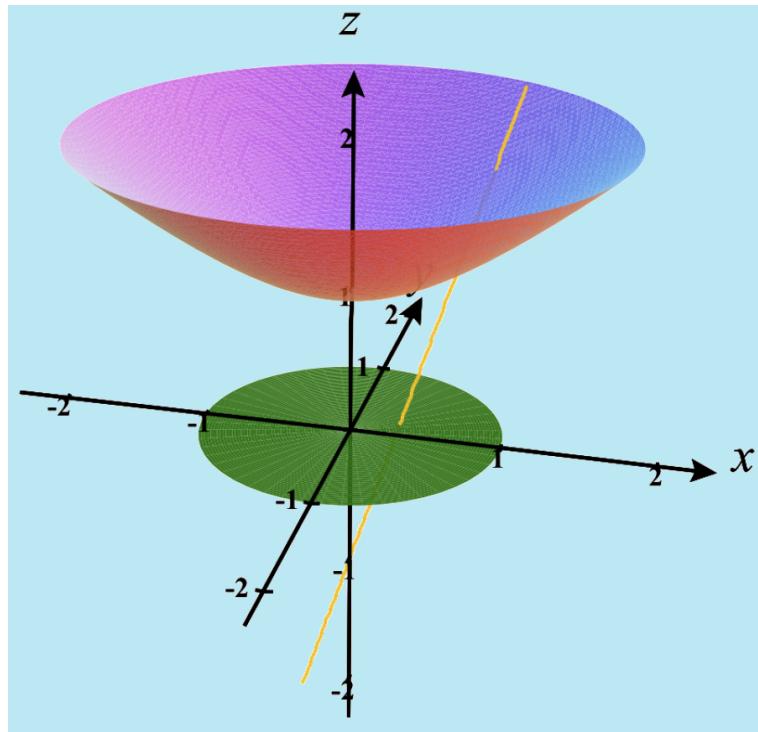
<sup>13</sup>Der Punkt  $P_0$  liegt auf der unteren Schale  $H_-$  des Rotationshyperboloids.

Dabei gilt

$$\|S\| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(1+c)^2}} \stackrel{A \in H^+}{=} \sqrt{\frac{c^2 - 1}{(c+1)^2}} = \sqrt{\frac{c-1}{c+1}} < 1.$$

Das bedeutet  $S \in \mathbb{D}$ . Also haben wir

$$\begin{aligned} \pi: H^+ &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (a, b, c) &\longmapsto \left( \frac{a}{1+c}, \frac{b}{1+c}, 0 \right). \end{aligned}$$



Wir beginnen nun umgekehrt mit einem Punkt  $S = (a, b, 0) \in \mathbb{D}$  und betrachten die Gerade

$$\overline{P_0 S} := \{(1-\lambda) \cdot (0, 0, -1) + \lambda \cdot (a, b, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Der Parameter  $\lambda_0$ , der einen möglichen Schnittpunkt dieser Geraden mit  $H^+$  beschreibt, muss die Gleichung

$$(1 - \lambda_0)^2 - 1 = \lambda_0^2 \cdot (a^2 + b^2) \iff \lambda_0^2 \cdot (1 - a^2 - b^2) - 2 \cdot \lambda_0 = 0$$

erfüllen. Die Lösung  $\lambda_0 = 0$  liefert den Punkt  $P_0$ , der auf der unteren Schale des Rotationshyperboloids liegt. Die andere Lösung

$$\lambda_0 = \frac{2}{1 - a^2 - b^2}$$

ergibt in der Tat den Schnittpunkt

$$A = \left( \frac{2 \cdot a}{1 - a^2 - b^2}, \frac{2 \cdot b}{1 - a^2 - b^2}, \frac{1 + a^2 + b^2}{1 - a^2 - b^2} \right).$$

Somit können wir

$$\begin{aligned}\eta: \mathbb{D} &\longrightarrow H^+ \\ (a, b, 0) &\longmapsto \left( \frac{2 \cdot a}{1 - a^2 - b^2}, \frac{2 \cdot b}{1 - a^2 - b^2}, \frac{1 + a^2 + b^2}{1 - a^2 - b^2} \right)\end{aligned}$$

definieren. Die geometrische Beschreibung dieser beiden Abbildungen zeigt sofort, dass sie invers zueinander sind.

**IV.3.1 Bemerkung.** i) Die Geraden durch  $P_0$  und  $\mathbb{S} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = 0 \wedge a^2 + b^2 = 1\}$  sind die Geraden, die parallel zu Geraden im Asymptotenkegel (s. III.7.24 Bemerkung) von  $H^+$  sind.

ii) Wie die angegebenen Bijektionen verdeutlichen, kann man  $H^+$  verwenden, um ein Modell der hyperbolischen Ebene zu beschreiben. Dazu sagt man, dass  $\ell \subset H^+$  eine *hyperbolische Gerade* ist, wenn es eine Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  mit  $(0, 0, 0) \in E$  und  $\ell = H^+ \cap E$  gibt. Diese Art von Geraden ähnelt in ihrer Definition den Großkreisen auf der Sphäre  $S^2$  (vgl. III.3.2 Bemerkungen, i). Wenn  $E$  auch den Punkt  $P_0$  enthält, so erkennt man, dass  $\pi(\ell)$  der Durchschnitt von  $\mathbb{D}$  mit einer Geraden durch den Mittelpunkt ist. Man kann zeigen, dass auch die anderen hyperbolischen Geraden auf  $H^+$  hyperbolischen Geraden in  $\mathbb{D}$  entsprechen ([2], Satz 3.2.2).

### IV.3.2 Abstandsmessung auf dem Rotationshyperboloid

Wir erinnern zunächst daran, wie die Länge einer Kurve in  $\mathbb{R}^n$  gemessen wird. Dazu seien  $\gamma: [s, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Abbildung und  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm. Man setzt nun

$$L(\gamma) := \int_s^t \|\gamma'(\lambda)\| d\lambda. \quad (\text{IV.5})$$

Diesen Ausdruck gewinnt man auch, wenn man das Intervall  $I$  in immer kleinere Teilintervalle zerlegt,  $\gamma$  durch den entsprechenden Streckenzug ersetzt und dann einen geeigneten Grenzprozess durchführt (s. [38], 4.3.2 Satz). Ein ähnliches Verfahren kann man jetzt für Kurven in  $H^+$  benutzen. Man beachte, dass es nicht sinnvoll ist, den Prozess für  $\mathbb{R}^3$  direkt anzuwenden, da die Streckenzüge, mit denen man  $\gamma$  approximieren möchte, nicht mehr in  $H^+$  liegen. Vielmehr sollten die Strecken, die in der Approximation auftauchen, Teile von hyperbolischen Geraden sein. Wir erklären jetzt, wie man die Länge von Kurven in  $H^+$  in Analogie zu (IV.5) definieren kann. Wir werden dann in einer Abschätzung in der Poincaré-Kreisscheibe (Beweis von IV.3.10 Satz) sehen, dass hyperbolische Geraden dann in der Tat die kürzesten Verbindungen sind.

**IV.3.2 Lemma.** Es seien  $\gamma: [s, t] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\lambda \mapsto (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \gamma_3(\lambda))$ , eine differenzierbare Abbildung mit  $\text{Spur}(\gamma) \subset H^+$  und  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Dann gilt

$$\forall \lambda \in [s, t]: \quad q(\gamma'_1(\lambda), \gamma'_2(\lambda), \gamma'_3(\lambda)) \geq 0.$$

*Beweis.* Da  $\text{Spur}(\gamma) \subset H^+$ , gilt

$$\forall \lambda \in [s, t]: \quad \gamma_1^2(\lambda) + \gamma_2^2(\lambda) - \gamma_3^2(\lambda) = -1.$$

Durch Differenzieren erhält man

$$\forall \lambda \in [s, t] : 2 \cdot \gamma_1(\lambda) \cdot \gamma'_1(\lambda) + 2 \cdot \gamma_2(\lambda) \cdot \gamma'_2(\lambda) - 2 \cdot \gamma_3(\lambda) \cdot \gamma'_3(\lambda) = 0,$$

d.h.<sup>14</sup>

$$\forall \lambda \in [s, t] : \gamma'_3(\lambda) = \frac{\gamma_1(\lambda) \cdot \gamma'_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) \cdot \gamma'_2(\lambda)}{\gamma_3(\lambda)}.$$

Somit gilt für  $\lambda \in [s, t]$ , dass

$$\begin{aligned} q(\gamma'_1(\lambda), \gamma'_2(\lambda), \gamma'_3(\lambda)) &= \gamma'_1(\lambda)^2 + \gamma'_2(\lambda)^2 - \frac{(\gamma_1(\lambda) \cdot \gamma'_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) \cdot \gamma'_2(\lambda))^2}{\gamma_3(\lambda)^2} \\ &\geq \gamma'_1(\lambda)^2 + \gamma'_2(\lambda)^2 - \frac{(\gamma_1(\lambda)^2 + \gamma_2(\lambda)^2) \cdot (\gamma'_1(\lambda)^2 + \gamma'_2(\lambda)^2)}{\gamma_3(\lambda)^2} \\ &= \frac{\gamma_3(\lambda)^2 \cdot (\gamma'_1(\lambda)^2 + \gamma'_2(\lambda)^2) - (\gamma_1(\lambda)^2 + \gamma_2(\lambda)^2) \cdot (\gamma'_1(\lambda)^2 + \gamma'_2(\lambda)^2)}{\gamma_3(\lambda)^2} \\ &\stackrel{\gamma(\lambda) \in H^+}{=} \frac{\gamma'_1(\lambda)^2 + \gamma'_2(\lambda)^2}{\gamma_3(\lambda)^2} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Dies ist die behauptete Ungleichung. □

Für eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma: [s, t] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\text{Spur}(\gamma) \subset H^+$  setzen wir nun

$$L(\gamma) := \int_s^t \sqrt{q(\gamma'_1(\lambda), \gamma'_2(\lambda), \gamma'_3(\lambda))} d\lambda. \quad (\text{IV.6})$$

Mit solch einer Konstruktion kann man eine Abstandsfunktion festlegen. Wir setzen<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} d_{H^+}: H^+ \times H^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \inf \left\{ L(\gamma) \mid \gamma: [s, t] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist } \mathcal{C}^1, \text{ Spur}(\gamma) \subset H^+, \gamma(s) = A, \gamma(t) = B \right\}. \end{aligned}$$

**IV.3.3 Bemerkung.** Man kann sich davon überzeugen, dass das Infimum für die hyperbolische Gerade durch  $A$  und  $B$  angenommen wird ([2], Satz 2.1.2; vgl. Beweis von IV.3.10 Satz). Man erhält damit die explizite Formel<sup>16</sup> ([2], Definition 2.1.3)

$$\forall ((a, b, c), (d, e, f)) \in H^+ \times H^+ : d_{H^+}((a, b, c), (d, e, f)) = \text{Arcosh}(-a \cdot d - b \cdot e + c \cdot f).$$

### IV.3.3 Die induzierte Abstandsmessung auf der Einheitskreisscheibe

Nun möchten wir eine Abstandsfunktion  $d_h: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  so einführen, dass  $\eta$  eine Isometrie wird, d.h.,

$$\forall P, Q \in \mathbb{D} : d_h(P, Q) = d_{H^+}(\eta(P), \eta(Q)).$$

<sup>14</sup>Man beachte, dass  $\gamma_3(\lambda) > 0$  aus  $\gamma(\lambda) \in H^+$  folgt.

<sup>15</sup>Wie üblich steht „ $\mathcal{C}^1$ “ für stetig differenzierbar.

<sup>16</sup>Man muss die erste und die letzte Koordinate umtauschen, um die Formeln in [2] und hier in Übereinstimmung zu bringen.

Dazu seien  $\gamma: [s, t] \rightarrow \mathbb{D}$  eine stetig differenzierbare Abbildung und  $\delta := \eta \circ \gamma$ . Mit (IV.6) müssen wir

$$L_h(\gamma) := L(\delta)$$

setzen. Die Ableitung von  $\delta$  berechnen wir mit der Kettenregel ([38], 6.3.1 Satz). Dazu seien  $\lambda_0 \in [s, t]$  und  $P = (a_0, b_0, c_0) = \gamma(\lambda_0)$ . Die entsprechende Jacobi-Matrix ([38], 6.1.4 Bemerkung, ii) ist

$$J_\eta(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot (1 + a_0^2 - b_0^2)}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2} & \frac{4 \cdot a_0 \cdot b_0}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2} & 0 \\ \frac{4 \cdot a_0 \cdot b_0}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2} & \frac{2 \cdot (1 - a_0^2 + b_0^2)}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2} & 0 \\ \frac{4 \cdot a_0}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2} & \frac{4 \cdot b_0}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1(\lambda_0) \\ \gamma'_2(\lambda_0) \\ \gamma'_3(\lambda_0) \end{pmatrix}$$

zu multiplizieren. Es folgt

$$\begin{aligned} \delta'_1(\lambda_0) &= \frac{2 \cdot (1 + a_0^2 - b_0^2) \cdot \gamma'_1(\lambda_0) + 4 \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot \gamma'_2(\lambda_0)}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2}, \\ \delta'_2(\lambda_0) &= \frac{4 \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot \gamma'_1(\lambda_0) + 2 \cdot (1 - a_0^2 + b_0^2) \cdot \gamma'_2(\lambda_0)}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2}, \\ \delta'_3(\lambda_0) &= \frac{4 \cdot a_0 \cdot \gamma'_1(\lambda_0) + 4 \cdot b_0 \cdot \gamma'_2(\lambda_0)}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2}. \end{aligned}$$

Eine etwas längere elementare Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} &q(\delta'_1(\lambda_0), \delta'_2(\lambda_0), \delta'_3(\lambda_0)) \\ &= \frac{4 \cdot (1 - 2 \cdot a_0^2 - 2 \cdot b_0^2 + a_0^4 + 2 \cdot a_0^2 \cdot b_0^2 + b_0^4) \cdot (\gamma'_1(\lambda_0)^2 + \gamma'_2(\lambda_0)^2)}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^4} \\ &= \frac{4 \cdot (1 - a_0^2 - b_0^2)^2 \cdot (\gamma'_1(\lambda_0)^2 + \gamma'_2(\lambda_0)^2)}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^4} \\ &= \frac{4 \cdot (\gamma'_1(\lambda_0)^2 + \gamma'_2(\lambda_0)^2)}{(1 - a_0^2 - b_0^2)^2}. \end{aligned}$$

Wir schließen

$$L_h(\gamma) = \int_s^t \frac{2 \cdot \sqrt{\gamma'_1(\lambda)^2 + \gamma'_2(\lambda)^2}}{1 - \gamma_1(\lambda)^2 - \gamma_2(\lambda)^2} d\lambda. \quad (\text{IV.7})$$

Wir möchten nun zeigen, dass hyperbolische Transformationen die Länge einer Kurve nicht ändern. Da die Gruppe der hyperbolischen Transformationen von den direkten hyperbolischen Transformationen und der komplexen Konjugation erzeugt wird (vgl. IV.2.17 Bemerkungen, iii), betrachten wir diese beiden Fälle getrennt. Wir beginnen mit der komplexen Konjugation.

**IV.3.4 Lemma.** Es seien  $\gamma: [s, t] \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $\lambda \mapsto \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) \cdot i$ , eine stetig differenzierbare Abbildung und  $\bar{\gamma}: [s, t] \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $\lambda \mapsto \gamma_1(\lambda) - \gamma_2(\lambda) \cdot i$ . Dann gilt

$$L_h(\bar{\gamma}) = L_h(\gamma).$$

*Beweis.* Die folgt unmittelbar aus Formel (IV.7).  $\square$

Jetzt benötigen wir ein paar grundlegende Tatsachen aus der Theorie komplexwertiger Funktionen. Dazu seien  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge<sup>17</sup> und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexwertige Funktion. Da  $\mathbb{C}$  ein Körper ist und durch  $|\cdot|$  ein Konvergenzbegriff auf  $\mathbb{C}$  definiert ist, kann man die Definition der Differenzierbarkeit aus der reellen Analysis ([37], 4.1.1 Definition, a) in die komplexe Analysis übertragen ([40], III.3.3 Definitionen, ii). Die üblichen Ableitungsregeln bleiben dann weiter gültig ([40], III.3.8 Satz).

**IV.3.5 Bemerkung.** Es seien  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexwertige Funktion. Vermöge des Isomorphismus  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  aus IV.1.3 Bemerkung definiert  $f$  reellwertige Funktionen

$$u, v: \psi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

so dass

$$\forall (a, b) \in \psi^{-1}(U): \quad f(a + b \cdot i) = u(a, b) + v(a, b) \cdot i.$$

Wir nehmen an, dass  $f$  in  $z_0 = a_0 + b_0 \cdot i$  komplex differenzierbar mit Ableitung  $f'(z)$  ist. Dann ist

$$\begin{aligned} F: \psi^{-1}(U) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\mapsto (u(a, b), v(a, b)) \end{aligned}$$

in  $(a_0, b_0)$  differenzierbar im Sinne von [38], 6.1.1 Definition, a), und die Jacobi-Matrix  $J_F(a_0, b_0)$  beschreibt die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die der Multiplikation mit  $f'(z)$  entspricht ([40], III.4.4 Satz).

**IV.3.6 Beispiele.** i) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}.$$

Diese Matrix definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_A: \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist nach den bereits erwähnten Ableitungsregeln in jedem Punkt von  $\mathbb{D}$  komplex differenzierbar und

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \bar{\mu}'_A(z) = \frac{\alpha \cdot \bar{\beta} \cdot z + |\alpha|^2 - \alpha \cdot \bar{\beta} \cdot z - |\beta|^2}{(\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha})^2} = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{(\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha})^2}. \quad (\text{IV.8})$$

<sup>17</sup>Der komplexe Absolutbetrag ist eine Norm auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}$  im Sinne von [38], 1.2.1 Definition, a), und definiert damit nach [38], 1.4.2 Beispiele, iii), eine Topologie. Alternativ können wir die Identifikation  $\psi$  aus IV.1.3 Bemerkung nehmen und  $U \subset \mathbb{C}$  offen nennen, wenn  $\psi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2$  offen in der euklidischen Topologie ist. Beide Definitionen führen zum selben Ergebnis.

ii) Die Funktion

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z}\end{aligned}$$

ist nirgends komplex differenzierbar ([40], III.3.5 Beispiele, iii).

**IV.3.7 Hilfssatz.** *In der Situation von IV.3.6 Beispiele, i), gilt*

$$\forall z \in \mathbb{D}: \quad \frac{|\bar{\mu}'_A(z)|}{1 - |\bar{\mu}_A(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

*Beweis.* Zunächst gilt

$$\begin{aligned} |(\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha})^2| &= |\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha}|^2 \\ &= (\beta \cdot \bar{z} + \alpha) \cdot (\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha}) \\ &= |\beta|^2 \cdot |z|^2 + \beta \cdot \bar{z} \cdot \bar{\alpha} + \bar{\beta} \cdot z \cdot \alpha + |\alpha|^2 \\ &= |\beta|^2 \cdot |z|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha \cdot \bar{\beta} \cdot z) + |\alpha|^2.\end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$|\bar{\mu}_A(z)|^2 = \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \bar{\beta}}{\beta \cdot \bar{z} + \alpha} \cdot \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\bar{\beta} \cdot z + \bar{\alpha}} = \frac{|\alpha|^2 \cdot |z|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha \cdot \bar{\beta} \cdot z) + |\beta|^2}{|\beta|^2 \cdot |z|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha \cdot \bar{\beta} \cdot z) + |\alpha|^2}.$$

Das zeigt

$$1 - |\bar{\mu}_A(z)|^2 = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cdot (1 - |z|^2)}{|\beta|^2 \cdot |z|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha \cdot \bar{\beta} \cdot z) + |\alpha|^2}.$$

Damit haben wir

$$\frac{|\bar{\mu}'_A(z)|}{1 - |\bar{\mu}_A(z)|^2} = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cdot (1 - |z|^2)} = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

nachgewiesen. Wir haben dabei (IV.8) beachtet. □

**IV.3.8 Satz.** *Es seien  $\gamma: [s, t] \rightarrow \mathbb{D}$  eine stetige differenzierbare Abbildung,  $A \in \mathbb{M}$ ,  $\bar{\mu}_A: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  die zugehörige hyperbolische Transformation und  $\gamma_A := \bar{\mu}_A \circ \gamma$ . Unter diesen Voraussetzungen gilt*

$$L_h(\gamma_A) = L_h(\gamma).$$

*Beweis.* Mit der Kettenregel ([38], 6.3.1 Satz) und IV.3.5 Bemerkung erkennt man

$$\forall \lambda \in [s, t]: \quad \gamma'_A(\lambda) = \bar{\mu}'_A(\gamma(\lambda)) \cdot \gamma'(\lambda).$$

Hier schreiben wir  $\gamma(\lambda) = \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) \cdot i$  und  $\gamma'(\lambda) = \gamma'_1(\lambda) + \gamma'_2(\lambda) \cdot i$ ,  $\lambda \in [s, t]$ . Nun gilt

$$L_h(\gamma_A) = 2 \cdot \int_s^t \frac{|\bar{\mu}'_A(\gamma(\lambda))| \cdot |\gamma'(\lambda)|}{1 - |\bar{\mu}_A(\gamma(\lambda))|^2} d\lambda \stackrel{\text{IV.3.7}}{=} 2 \cdot \int_s^t \frac{|\gamma'(\lambda)|}{1 - |\gamma(\lambda)|^2} d\lambda = L_h(\gamma).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

**IV.3.9 Definition.** Für Punkte  $w, z \in \mathbb{D}$  ist

$$d_h(w, z) := \inf \left\{ L_h(\gamma) \mid \gamma: [s, t] \longrightarrow \mathbb{D} \text{ stetig differenzierbar, } \gamma(s) = w, \gamma(t) = z \right\}.$$

der *hyperbolische Abstand* von  $w$  und  $z$ .

**IV.3.10 Satz.** Für  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$  gilt

$$d_h(w_1, w_2) = 2 \cdot \operatorname{Artanh} \left( \left| \frac{w_1 - w_2}{1 - w_1 \cdot \overline{w}_2} \right| \right) = \log \left( \frac{|1 - w_1 \cdot \overline{w}_2| + |w_1 - w_2|}{|1 - w_1 \cdot \overline{w}_2| - |w_1 - w_2|} \right).$$

*Beweis.* Die Übereinstimmung der beiden Formeln ist eine Folgerung aus der allgemeinen Identität (s. [2], Abschnitt 1.2)

$$\forall t \in (-1, 1) : \quad \operatorname{Artanh}(t) = \frac{1}{2} \cdot \log \left( \frac{1+t}{1-t} \right).$$

Wir betrachten  $w_1 = 0$  und  $w_2 = r \in (0, 1)$ . Es sei  $\gamma: [s, t] \longrightarrow \mathbb{D}, \lambda \mapsto \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) \cdot i$ , eine stetig differenzierbare Abbildung mit  $\gamma(s) = 0$  und  $\gamma(t) = r$ . Es gilt

$$\begin{aligned} L_h(\gamma) &= 2 \cdot \int_s^t \frac{|\gamma'(\lambda)|}{1 - |\gamma(\lambda)|^2} d\lambda \\ &= 2 \cdot \int_s^t \frac{\sqrt{\gamma'_1(\lambda)^2 + \gamma'_2(\lambda)^2}}{1 - \gamma_1(\lambda)^2 - \gamma_2(\lambda)^2} d\lambda \\ &\geq 2 \cdot \int_s^t \frac{\gamma'_1(\lambda)}{1 - \gamma_1(\lambda)^2} d\lambda \\ &= \int_s^t \frac{\gamma'_1(\lambda)}{1 - \gamma_1(\lambda)} d\lambda + \int_s^t \frac{\gamma'_1(\lambda)}{1 + \gamma_1(\lambda)} d\lambda \tag{IV.9} \\ &= -\log(1 - \gamma_1(\lambda)) \Big|_s^t + \log(1 + \gamma_1(\lambda)) \Big|_s^t \\ &= -\log(1 - r) + \log(1 + r) \\ &= \log \left( \frac{1+r}{1-r} \right). \end{aligned}$$

Man beachte, dass für den Weg  $\gamma: [0, r] \longrightarrow \mathbb{D}, \lambda \mapsto \lambda$ , Gleichheit gilt. Dies zeigt

$$d_h(0, r) = 2 \cdot \operatorname{Artanh}(r).$$

Nun seien  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$  zwei verschiedene Punkte. Nach IV.2.8 Satz finden wir eine hyperbolische Spiegelung  $s$  mit  $s(w_1) = 0$ . Weiter existiert eine Drehung  $\varrho$  mit  $\varrho(s(w_2)) \in (0, 1)$ . Es gibt somit eine hyperbolische Transformation  $\varphi$  mit  $\varphi(w_1) = 0$  und  $\varphi(w_2) = r \in (0, 1)$ . Nun beachte man, dass durch

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{z - w_2}{-\overline{w}_2 \cdot z + 1} \end{aligned}$$

eine direkte hyperbolische Transformation mit  $\varphi_1(w_1) = (w_1 - w_2)/(1 - w_1 \cdot \bar{w}_2)$  und  $\varphi_1(w_2) = 0$  gegeben ist. Ebenso ist durch

$$\begin{aligned}\varphi_2: \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{z - \varphi(w_2)}{-\varphi(w_2) \cdot z + 1}\end{aligned}$$

eine direkte hyperbolische Transformation mit  $\varphi_2(\varphi(w_1)) = (\varphi(w_1) - \varphi(w_2))/(1 - \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2))$  und  $\varphi_2(\varphi(w_2)) = 0$  gegeben. Für die hyperbolische Transformation

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}$$

gilt  $\psi(0) = 0$  und

$$\psi\left(\frac{w_1 - w_2}{-w_1 \cdot \bar{w}_2 + 1}\right) = \frac{\varphi(w_1) - \varphi(w_2)}{1 - \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2)} = -r. \quad (\text{IV.10})$$

Bei der Behandlung von Fall A) im Beweis von IV.2.15 Satz haben wir gezeigt, dass eine direkte hyperbolische Transformation, die 0 auf 0 abbildet, eine Drehung ist. Nach Konstruktion ist  $\psi$  allerdings eine indirekte hyperbolische Transformation. Dann ist  $s_0 \circ \psi$  eine direkte hyperbolische Transformation, die 0 auf 0 abbildet. Sie ist folglich von der Form  $s_0 \circ$  Drehung und damit eine Spiegelung an einer Geraden durch 0. Damit erhält  $\psi$  den komplexen Betrag. Wir schließen

$$2 \cdot \operatorname{Artanh}\left(\left|\frac{w_1 - w_2}{-w_1 \cdot \bar{w}_2 + 1}\right|\right) = 2 \cdot \operatorname{Artanh}(r) = d_h(0, r) = d_h(\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(r)) = d_h(w_1, w_2).$$

Dabei haben wir bei der ersten Gleichung (IV.10) und  $|\psi(z)| = |z|$ ,  $z \in \mathbb{D}$ , benutzt und bei der vorletzten, dass IV.3.8 Satz impliziert, dass  $d_h$  invariant unter hyperbolischen Transformationen ist.  $\square$

*IV.3.11 Bemerkung.* Die im obigen Beweis gefundene Formel zeigt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{D} \times \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w_1, w_2) &\longmapsto \left|\frac{w_1 - w_2}{-w_1 \cdot \bar{w}_2 + 1}\right|\end{aligned}$$

invariant unter hyperbolischen Transformationen ist.

#### IV.3.4 Kreise in der hyperbolischen Ebene

Es seien  $-1 < r_1 < r_2 < 1$  und  $\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{D}$ ,  $\lambda \mapsto r_1 + \lambda \cdot (r_2 - r_1)$ . Die Berechnung (IV.9) zeigt, dass

$$d_h(r_1, r_2) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(\lambda)|}{1 - |\gamma(\lambda)|^2} d\lambda = \log\left(\frac{1 - r_1 + r_2 - r_1 \cdot r_2}{1 + r_1 - r_2 - r_1 \cdot r_2}\right).$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned}[0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t \frac{|\gamma'(\lambda)|}{1 - |\gamma(\lambda)|^2} d\lambda\end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

ist streng monoton wachsend. Es folgt leicht:

- ★ Für jede Zahl  $\delta \in [0, d_h(r_1, r_2)]$  existiert eine Zahl  $r \in [r_1, r_2]$  mit  $d_h(r_1, r) = \delta$ .
- ★ Für jede Zahl  $r \in [r_1, r_2]$  gilt  $d_h(r_1, r) + d_h(r, r_2) = d_h(r_1, r_2)$ .
- ★ Für  $r < r_1$  bzw.  $r_2 < r$  gilt  $d_h(r, r_2) > d_h(r_1, r_2)$  bzw.  $d_h(r_1, r) > d_h(r_1, r_2)$ .
- ★ Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl  $r_m \in (r_1, r_2)$  mit  $d_h(r_1, r_m) = d_h(r_m, r_2) = (1/2) \cdot d_h(r_1, r_2)$ .

Für zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte  $P, Q \in \mathbb{D}$  existiert nach IV.2.9 Satz genau eine hyperbolische Gerade  $\ell$  durch diese beiden Punkte. Ferner kann man nach IV.2.11 Satz diese Gerade vermöge einer geeigneten hyperbolischen Transformation  $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  auf den Durchschnitt der reellen Geraden mit  $\mathbb{D}$  abbilden. Es sei  $\varphi(P) = r_1$  und  $\varphi(Q) = r_2$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass  $r_1 < r_2$ . Es sei  $\gamma$  der oben beschriebene Weg. Dann ist  $\varphi^{-1} \circ \gamma$  ein Weg, dessen Spur in  $\ell$  enthalten ist, der  $P$  mit  $Q$  verbindet und die entsprechenden Eigenschaften hat. Diese Betrachtungen motivieren die folgenden Begriffe.

**IV.3.12 Definitionen.** a) Es seien  $A, B$  und  $C$  drei verschiedene Punkte in der hyperbolischen Ebene. Man sagt, dass  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt, wenn

- ★  $B$  auf der hyperbolischen Geraden durch  $A$  und  $C$  liegt und
- ★  $d_h(A, B) + d_h(B, C) = d_h(A, C)$  gilt.

Man schreibt

$$A \star B \star C.$$

b) Für zwei verschiedene Punkte  $A$  und  $C$  in der hyperbolischen Ebene ist

$$[A, C] := \{ B \in \mathbb{D} \mid B = A \vee B = C \vee A \star B \star C \}$$

die *Strecke* zwischen  $A$  und  $C$ .

c) Es seien  $A$  und  $C$  zwei verschiedene Punkte in der hyperbolischen Ebene. Ein Punkt  $M$  heißt *Mittelpunkt* der Strecke  $[A, C]$ , wenn

- ★  $A \star M \star C$ ,
- ★  $d_h(A, M) = d_h(M, C) = (1/2) \cdot d_h(A, C)$ .

Aus den Vorbetrachtungen folgt.

**IV.3.13 Satz.** i) Es seien  $A, B$  und  $C$  drei kollineare Punkte in der hyperbolischen Ebene. Dann gilt genau eine der Aussagen

$$A \star B \star C \quad \text{oder} \quad A \star C \star B \quad \text{oder} \quad B \star A \star C.$$

ii) Es seien  $A$  und  $C$  zwei verschiedene Punkte in der hyperbolischen Ebene. Dann besitzt die Strecke  $[A, C]$  genau einen Mittelpunkt.

**IV.3.14 Definition.** Eine Teilmenge  $\varkappa \subset \mathbb{D}$  ist ein (*hyperbolischer*) Kreis, wenn es einen Punkt  $M \in \mathbb{D}$  und eine positive reelle Zahl  $r$  gibt, so dass

$$\varkappa := \mathcal{K}(M, r) := \{ A \in \mathbb{D} \mid d_h(M, A) = r \}.$$

Der Punkt  $M$  ist der *Mittelpunkt* und die Zahl  $r$  der *Radius*.

**IV.3.15 Satz.** i) Es sei  $\varkappa \subset \mathbb{D}$  ein hyperbolischer Kreis. Dann ist  $\varkappa$  auch ein euklidischer Kreis.

ii) Es sei  $\varkappa \subset \mathbb{D}$  ein euklidischer Kreis. Dann ist  $\varkappa$  auch ein hyperbolischer Kreis.

*Beweis.* i) Es sei  $\varkappa = \mathcal{K}(M, r)$ . Wir nehmen zunächst  $M = 0$  an. Nach IV.3.10 Satz haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(0, r) &= \{ w \in \mathbb{D} \mid d_h(0, w) = r \} \\ &= \{ w \in \mathbb{D} \mid 2 \cdot \operatorname{Artanh}(|w|) = r \} \\ &= \left\{ w \in \mathbb{D} \mid |w| = \tanh\left(\frac{1}{2} \cdot r\right) \right\} \\ &= K\left(0, \tanh\left(\frac{1}{2} \cdot r\right)\right). \end{aligned}$$

Nun sei  $M \neq 0$ . Nach IV.2.8 Satz gibt es eine hyperbolische Spiegelung  $s: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $s(M) = 0$ . Da  $s$  nach IV.3.8 Satz den hyperbolischen Abstand nicht ändert, folgt

$$s(\varkappa) = \mathcal{K}(0, r)$$

und wegen  $s \circ s = \operatorname{id}_{\mathbb{D}}$  auch

$$\varkappa = s(\mathcal{K}(0, r)).$$

Da  $\mathcal{K}(0, r)$  wie gesehen ein euklidischer Kreis ist, ist auch  $\varkappa$  auf Grund von IV.1.8 Satz ein euklidischer Kreis.

Wir bemerken, dass  $s(M) = 0$ ,  $s(0) = M$  und die Tatsache, dass  $s$  hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden abbildet (IV.2.7 Satz), zeigen, dass die hyperbolische Gerade  $\ell$  durch  $s$  auf sich abgebildet wird. Die Gerade  $\ell$  verläuft durch den (euklidischen) Mittelpunkt 0 des euklidischen Kreises  $\mathcal{K}(0, r) = K(0, \tanh(r))$  und durch den Mittelpunkt des euklidischen Kreises, an dem die Inversion durchgeführt wird, die  $s$  induziert. Aus Symmetriegründen geht  $\ell$  auch durch den euklidischen Mittelpunkt  $M'$  des Kreises  $\varkappa$  (vgl. Abschnitt IV.1.3). Insbesondere verläuft die hyperbolische Gerade durch  $M$  und  $M'$  auch durch 0. Es seien  $A$  und  $B$  die beiden Schnittpunkte von  $\ell$  und  $\varkappa$ . Dann ist  $M$  der hyperbolische Mittelpunkt der hyperbolischen Strecke  $[A, B]$  und  $M'$  der euklidische Mittelpunkt der euklidischen Strecke  $[A, B]$ . (Da  $\ell$  durch 0 verläuft, stimmen die hyperbolische und die euklidische Strecke zwischen  $A$  und  $B$  überein.)

ii) Es sei nun  $\varkappa = K(M', r') \subset \mathbb{D}$  ein euklidischer Kreis. Wenn  $M' = 0$ , dann können wir die Berechnung aus Teil i) umkehren und erkennen  $K(0, r') = \mathcal{K}(0, 2 \cdot \operatorname{Artanh}(r'))$ . Falls  $M' \neq 0$ , dann sei  $\ell$  die hyperbolische Gerade durch 0 und  $M'$ . Sie ist Durschnitt der euklidischen Geraden  $\overline{0M'}$  mit  $\mathbb{D}$  und schneidet  $\varkappa$  in zwei Punkten  $A$  und  $B$ . Es seien  $M$  der hyperbolische Mittelpunkt der hyperbolischen Strecke  $[A, B]$  und  $r := d_h(A, M)$ . Die Argumente aus Teil i) zeigen  $\varkappa = \mathcal{K}(M, r)$ .  $\square$

### IV.3.5 Die hyperbolische Metrik

Wir können nun nachweisen, dass die Abstandsfunktion  $d_h$  in der Tat eine Metrik im Sinne von [38], 1.1.2 Definition, a), ist. Wir werden weiter nachweisen, dass es außer den hyperbolischen Transformationen keine weiteren Isometrien des metrischen Raums  $(\mathbb{D}, d_h)$  gibt. Schließlich zeigen wir, dass  $d_h$  bis auf Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl die einzige Metrik auf  $\mathbb{D}$  ist, die sich additiv auf hyperbolischen Geraden verhält und invariant unter allen hyperbolischen Transformationen ist und zudem eine gewisse Differenzierbarkeitsbedingung erfüllt.

**IV.3.16 Satz.** i) *Die Abbildung*

$$d_h: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

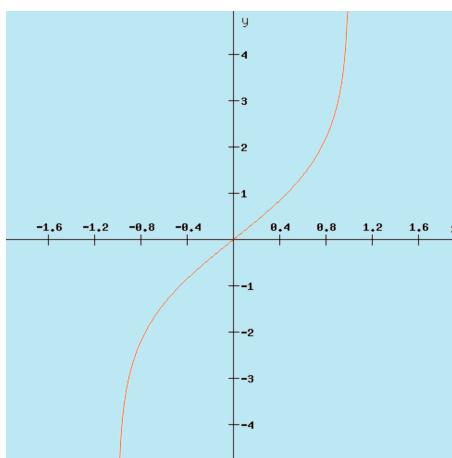
*ist eine Metrik, d.h.*

- a)  $\forall w_1, w_2 \in \mathbb{D}: d_h(w_1, w_2) = 0 \iff w_1 = w_2,$
  - b)  $\forall w_1, w_2 \in \mathbb{D}: d_h(w_1, w_2) = d_h(w_2, w_1),$
  - c)  $\forall w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{D}: d_h(w_1, w_3) \leq d_h(w_1, w_2) + d_h(w_2, w_3).$
- ii) *Es seien  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{D}$  drei verschiedene Punkte mit  $d_h(w_1, w_3) = d_h(w_1, w_2) + d_h(w_2, w_3)$ . Dann gilt*

$$w_1 \star w_2 \star w_3.$$

*Beweis.* i) Die Eigenschaften a) und b) ergeben sich unmittelbar aus der Formel in IV.3.10 Satz. Für c) verwenden wir die streng monoton wachsende Funktion

$$\begin{aligned} D: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^t \frac{1}{1 - \lambda^2} d\lambda = 2 \cdot \text{Artanh}(t). \end{aligned}$$



Sie bildet  $[0, 1]$  bijektiv auf  $[0, \infty)$  ab und hat die Eigenschaft (vgl. (IV.11) und die anschließende Diskussion)

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2 < 1 : \quad d_h(t_1, t_2) = D(t_2) - D(t_1).$$

Wir nehmen  $d_h(w_1, w_3) > d_h(w_1, w_2) + d_h(w_2, w_3)$  an und wählen wie im Beweis von IV.3.10 Satz eine hyperbolische Transformation  $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $\varphi(w_1) = 0$  und  $\varphi(w_3) \in (0, 1)$ . Es seien  $r_1 := d_h(w_1, w_2)$  und  $r_3 := d_h(w_3, w_2)$ . Nach unseren Berechnungen im Beweis von IV.3.13 Satz schneidet der hyperbolische Kreis  $\mathcal{K}(0, r_1)$  das Intervall  $(0, 1) \subset \mathbb{D}$  im Punkt  $z_1 = \tanh((1/2) \cdot r_1)$ . Weiter schneidet der hyperbolische Kreis  $\mathcal{K}(\varphi(w_3), r_3)$  das Intervall  $(0, 1)$  in zwei Punkten  $z_3 < z'_3$ . Wegen  $d_h(\varphi(w_3), z_3) = d_h(\varphi(w_3), \varphi(w_2)) < d_h(\varphi(w_3), \varphi(w_1)) = d_h(0, \varphi(w_3))$  gilt  $z_3 > 0$ . Auf Grund unserer Voraussetzungen und den Eigenschaften der Funktion  $D$  muss insgesamt

$$0 < z_1 < z_3 < \varphi(w_3)$$

gelten. Der euklidische Mittelpunkt des Kreises  $\mathcal{K}(0, r_1)$  ist 0 und derjenige des Kreises  $\mathcal{K}(\varphi(w_3), r_3)$  ist  $(1/2) \cdot (z_3 + z'_3)$ . Es ist nun klar, dass sich die euklidischen Kreise

$$K(0, \tanh(r_1)) = \mathcal{K}(0, r_1) \quad \text{und} \quad K\left(\frac{1}{2} \cdot (z_3 + z'_3), \frac{1}{2} \cdot (z'_3 - z_3)\right) = \mathcal{K}(\varphi(w_3), r_3)$$

nicht schneiden. Das widerspricht aber der Tatsache

$$\varphi(w_2) \in \mathcal{K}(0, r_1) \cap \mathcal{K}(\varphi(w_3), r_3).$$

ii) Wir verwenden dieselbe Konstruktion wie in Teil i). Aus den Eigenschaften der Funktion  $D$  folgt, dass sich  $\mathcal{K}(0, r_1)$  und  $\mathcal{K}(\varphi(w_3), r_3)$  in einem Punkt  $z \in (0, 1)$  schneiden. Da die reelle Gerade die Verbindungsgerade der beiden euklidischen Mittelpunkte dieser Kreise ist, folgt aus der Geometrie von Kreisen in der euklidischen Ebene, dass  $z$  der einzige Schnittpunkt dieser beiden Kreise ist und daher  $z = \varphi(w_2)$ .  $\square$

*IV.3.17 Beispiel.* Es seien  $\ell \subset \mathbb{D}$  eine hyperbolische Gerade,  $A \in \mathbb{D}$  und  $A' \in \mathbb{D}$  das Bild von  $A'$  unter der Spiegelung  $s$  an  $\ell$ . Weiter sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $[A, A']$ . Wir behaupten, dass  $M$  der Schnittpunkt von  $\ell$  mit der hyperbolischen Geraden  $m$  durch  $A$  und  $A'$  ist.<sup>18</sup> Wir bemerken, dass

$$d_h(A, s(M)) = d_h(s(A'), s(M)) = d_h(A', M) = \frac{1}{2} \cdot d_h(A, A')$$

und

$$d_h(A', s(M)) = d_h(s(A), s(M)) = d_h(A, M) = \frac{1}{2} \cdot d_h(A, A').$$

Aus IV.3.16 Satz, ii), folgt, dass  $s(M)$  zwischen  $A$  und  $A'$  liegt. Nach IV.3.12 Definitionen, c), ist  $s(M)$  ein Mittelpunkt der Strecke  $[A, A']$ , und wegen der Eindeutigkeit des Mittelpunkts (IV.3.13 Satz, ii) gilt  $s(M) = M$ . Daher muss  $M$  auf  $\ell$  liegen (s. Abschnitt IV.2.2). Da sich zwei hyperbolische Geraden höchstens in einem Punkt schneiden können, ist  $M$  der Schnittpunkt von  $\ell$  und  $m$ .

Eine bijektive Abbildung  $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ist eine *Isometrie*, wenn

$$\forall P, Q \in \mathbb{D}: \quad d_h(\psi(P), \psi(Q)) = d_h(P, Q).$$

Die Isometrien bilden eine Untergruppe  $\text{Isom}(\mathbb{D}, d_h) \subset S(\mathbb{D})$ . In IV.3.8 Satz haben wir nachgewiesen, dass  $\text{Aut}(\mathbb{D}) \subset \text{Isom}(\mathbb{D}, d_h)$ . Der nächste Satz zeigt, dass diese Inklusion eine Gleichheit ist.

<sup>18</sup>Wegen  $A \notin \ell$  gilt  $A' = s(A) \neq A$ .

**IV.3.18 Satz.** Es sei  $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  eine Isometrie. Dann gilt  $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

*Beweis.* Wir können eine hyperbolische Transformation  $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $\varphi(\psi(0)) = 0$  und  $\varphi(\psi(1/2)) \in (0, 1)$  finden. Da sowohl  $\psi$  als auch  $\varphi$  eine Isometrie ist, muss dann  $\varphi(\psi(1/2)) = 1/2$  gelten. Aus IV.3.16 Satz, ii), folgt dann weiter

$$\forall w \in (-1, 1) : (\varphi \circ \psi)(w) = w.$$

Wir betrachten nun einen Ausdruck der Form

$$c = \log \left( \frac{a+b}{a-b} \right).$$

Nach Definition ([37], Aufgabe 6.12.2) gilt

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \sinh(\lambda) = \frac{\exp(\lambda) - \exp(-\lambda)}{2}.$$

Somit gilt

$$\sinh\left(\frac{1}{2} \cdot c\right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right)$$

und

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2} \cdot c\right) = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

Es seien nun  $w, z \in \mathbb{D}$ . Mit  $a := |1 - w \cdot \bar{z}|$  und  $b := |w - z|$  folgt aus dieser Rechnung

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2} \cdot d_h(w, z)\right) = \frac{|w - z|^2}{|1 - w \cdot \bar{z}|^2 - |w - z|^2}.$$

Mit der elementaren Identität

$$|1 - w \cdot \bar{z}|^2 - |w - z|^2 = (1 - |w|^2) \cdot (1 - |z|^2)$$

folgern wir

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2} \cdot d_h(w, z)\right) = \frac{|w - z|^2}{(1 - |w|^2) \cdot (1 - |z|^2)}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist also invariant unter beliebigen Isometrien.

Jetzt seien  $w = a + b \cdot i$  und  $(\varphi \circ \psi)(w) = c + d \cdot i$ . Für  $t \in (0, 1)$  gilt

$$d_h(t, w) = d_h((\varphi \circ \psi)(t), (\varphi \circ \psi)(w)) = d_h(t, (\varphi \circ \psi)(w))$$

und deshalb

$$\frac{|t - w|^2}{(1 - t^2) \cdot (1 - |w|^2)} = \frac{|t - (\varphi \circ \psi)(w)|^2}{(1 - t^2) \cdot (1 - |(\varphi \circ \psi)(w)|^2)}$$

d.h.,

$$\frac{(t-a)^2 + b^2}{1 - a^2 - b^2} = \frac{(t-c)^2 + d^2}{1 - c^2 - d^2}.$$

Ein reelles Polynom vom Grad zwei in einer Veränderlichen hat höchstens zwei Nullstellen. Deshalb müssen die Koeffizienten von  $t^2$  und  $t$  in der obigen Gleichung übereinstimmen, so dass

$$a = c \quad \text{und} \quad b^2 = d^2.$$

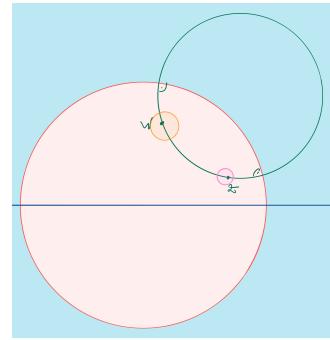
Das bedeutet, dass

$$\forall w \in \mathbb{D} : (\varphi \circ \psi)(w) = w \quad \text{oder} \quad (\varphi \circ \psi)(w) = \bar{w}.$$

Wir nehmen an, es gäbe  $w, z \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{R}$  mit

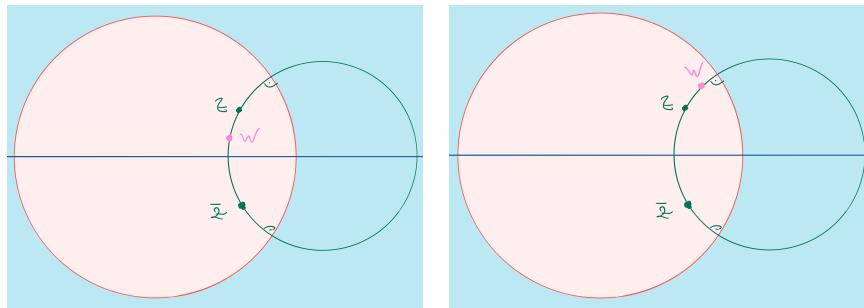
$$(\varphi \circ \psi)(w) = w \quad \text{und} \quad (\varphi \circ \psi)(z) = \bar{z}.$$

(Man kann sich leicht überlegen, dass man sowohl  $w$  als auch  $z$  als Element der oberen Halbebene wählen kann.) Es sei  $\ell \subset \mathbb{D}$  die hyperbolische Gerade, die  $w$  und  $z$  verbindet. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung kann man sehen, dass es hyperbolische Kreise  $\kappa$  und  $\kappa'$  gibt, so dass  $w \in \kappa, z \in \kappa'$ ,



$$\forall u \in \kappa : (\varphi \circ \psi)(u) = u \quad \text{und} \quad \forall v \in \kappa' : (\varphi \circ \psi)(v) = \bar{v}.$$

Es gibt deshalb auch einen Punkt  $w' \in \ell \setminus \{w\}$  mit  $(\varphi \circ \psi)(w') = w'$  und einen Punkt  $z' \in \ell \setminus \{z\}$  mit  $(\varphi \circ \psi)(z') = \bar{z}'$ . Die Abbildung  $\varphi \circ \psi$  ist eine Isometrie und erhält deshalb die Zwischenrelation. Es folgt, dass sie hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden abbildet. Damit wird die Gerade  $\ell$  von  $\varphi \circ \psi$  gleichzeitig auf sich selbst und auf das Bild von  $\ell$  unter der komplexen Konjugation abgebildet. Das bedeutet, dass  $\ell$  symmetrisch zur reellen Geraden liegen muss.



Auf Grund der Überlegungen zu den Abstandsverhältnissen auf einer hyperbolischen Geraden kann  $d_h(w, z) = d_h(w, \bar{z})$  dann nur gelten, wenn  $w$  der Schnittpunkt von  $\ell$  mit  $(-1, 1)$  ist. Das ist aber wegen  $w \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{R}$  ausgeschlossen. Somit ist  $\varphi \circ \psi$  entweder die Identität oder die komplexe Konjugation  $s_0$ . Im ersten Fall haben wir  $\psi = \varphi^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , im zweiten Fall  $\psi = \varphi^{-1} \circ s_0 \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .  $\square$

Dies beweist, dass die Geometrie, die wir vorgestellt haben, stimmig aufgebaut ist. Der folgende Satz unterstreicht diese Beobachtung.

**IV.3.19 Satz.** *Es sei  $e: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik auf der Einheitskreisscheibe, so dass*

- ★  $e(\varphi(w_1), \varphi(w_2)) = e(w_1, w_2)$  für  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$  und  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  gilt,
- ★  $e(w_1, w_3) = e(w_1, w_2) + e(w_2, w_3)$  für  $0 \leq w_1 < w_2 < w_3 < 1$  gilt,
- ★ die Abbildung

$$\begin{aligned} E: [0, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto e(0, w) \end{aligned}$$

differenzierbar ist.<sup>19</sup>

Dann existiert eine positive reelle Zahl  $K$ , so dass

$$\forall w_1, w_2 \in \mathbb{D} : e(w_1, w_2) = K \cdot \operatorname{Artanh}\left(\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - w_1 \cdot \overline{w}_2}\right|\right).$$

*Beweis.* Es seien  $\alpha \in (0, 1)$  und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}.$$

Weiter seien  $\gamma \in (0, 1)$  und

$$\beta := \overline{\mu}_A(\gamma) = \frac{\alpha + \gamma}{1 + \alpha \cdot \gamma}.$$

Da  $\alpha^2 < 1$  und somit  $\alpha + \alpha^2 \cdot \gamma < \alpha + \gamma$ , haben wir  $\alpha < \beta$ , und auf Grund der zweiten Voraussetzung an  $E$  gilt

$$E(\alpha) + e(\alpha, \beta) = e(0, \alpha) + e(\alpha, \beta) = e(0, \beta) = E(\beta).$$

Ferner gilt  $\overline{\mu}_A(0) = \alpha$ . Die erste Voraussetzung liefert daher

$$E(\gamma) = e(0, \gamma) = e(\alpha, \beta),$$

so dass

$$E\left(\frac{\alpha + \gamma}{1 + \alpha \cdot \gamma}\right) = E(\beta) = E(\alpha) + E(\gamma).$$

Wir halten  $\alpha$  fest und fassen dies als Gleichung von Funktionen in  $\gamma$  auf. Da die linke und die rechte Seite stetige Funktionen in  $\gamma$  sind, gilt die Gleichung auch für  $\gamma = 0$ . Ebenso erkennt man, dass sie auch für  $\alpha = 0$  gültig ist. Jetzt leiten wir nach  $\gamma$  ab. Das Ergebnis ist

$$\frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha \cdot \gamma)^2} \cdot E'\left(\frac{\alpha + \gamma}{1 + \alpha \cdot \gamma}\right) = E'(\gamma).$$

Wir können  $\gamma = 0$  setzen und erhalten die Schlussfolgerung

$$\forall \alpha \in [0, 1) : E'(\alpha) = \frac{E'(0)}{1 - \alpha^2}.$$

Da  $E$  als Funktion von  $\alpha$  streng monoton wachsend ist, muss nach [37], Abschnitt 4.3,  $K := E'(0) > 0$  gelten. Es folgt

$$\forall \alpha \in (0, 1) : E(\alpha) = K \cdot \int_0^\alpha \frac{1}{1 - \lambda^2} d\lambda = K \cdot \log\left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\right) = K \cdot \operatorname{Artanh}(\alpha).$$

Das Integral haben wir wie im Beweis von IV.3.10 Satz gelöst. Die Invarianz von  $e$  und  $d_h$  unter hyperbolischen Transformationen zeigt, dass die behauptete Formel für alle  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$  gilt.  $\square$

<sup>19</sup>Das bedeutet, dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass sich  $E$  zu einer differenzierbaren Funktion  $\tilde{E} : (-\varepsilon, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  fortsetzen lässt.

IV.3.20 *Bemerkung.* Auf jeder Menge  $\mathcal{D}$  existiert die triviale Metrik ([38], 1.1.4 Beispiele, ii)

$$d_0: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(w, z) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } w = z \\ 1, & \text{falls } w \neq z \end{cases}.$$

Die triviale Metrik auf  $\mathbb{D}$  ist offenbar invariant unter allen hyperbolischen Transformationen. Die zu  $E$  analoge Abbildung ist in allen Punkten außer 0 differenzierbar. Dieses Beispiel zeigt, dass es sinnvoll ist, Zusatzbedingungen wie in IV.3.19 Satz zu stellen, um eine geometrisch relevante Metrik zu erhalten.

## IV.4 Hyperbolische Trigonometrie

In der euklidischen Geometrie ist für drei verschiedene Punkte  $A, B, C$  der Winkel

$$\angle(ABC) := [BA \cup BC]$$

definiert. Diesem Winkel wird eine Maßzahl  $\beta \in [0, \pi]$  zugeordnet.<sup>20</sup>

Mit der Zwischenrelation (IV.3.12 Definitionen, a) definieren wir für zwei verschiedene Punkte  $O, S \in \mathbb{D}$  die *Halbgerade*

$$\mathcal{H}(O, S) := \{T \in \mathbb{D} \mid T = O \vee T = S \vee O \star T \star S \vee O \star S \star T\}.$$

Dementsprechend definieren drei verschiedene Punkte  $A, B, C \in \mathbb{D}$  den *hyperbolischen Winkel*

$$\angle_h(ABC) := \mathcal{H}(B, A) \cup \mathcal{H}(B, C).$$

Es sei  $\mathcal{H}(O, S) \subset \mathbb{D}$  eine hyperbolische Halbgerade. Sie ist Teil einer eindeutig bestimmten hyperbolischen Geraden  $\ell$ . Damit ist die (euklidische) Tangente  $t$  an  $\ell$  in  $O$  definiert. Es sei  $p$  das euklidische Lot auf  $\ell$  durch  $O$ . Die Gerade  $p$  und  $S$  bestimmen einen Halbraum  $\mathbb{H}$ . Der Durchschnitt

$$t(O, S) := t \cap \mathbb{H}$$

ist eine euklidische Halbgerade mit Startpunkt  $O$ . Für drei verschiedene Punkte  $A, B, C \in \mathbb{D}$  definiert der hyperbolische Winkel  $\angle_h(ABC)$  den euklidischen Winkel

$$\alpha(ABC) := t(B, A) \cup t(B, C).$$

Die *hyperbolische Maßzahl* des Winkels  $\angle_h(ABC)$  ist die Maßzahl des euklidischen Winkels  $\alpha(ABC)$ .

IV.4.1 *Beispiele.* i) Es seien  $\ell \subset \mathbb{D}$  eine hyperbolische Gerade und  $A \in \mathbb{D} \setminus \ell$ . In IV.3.17 Beispiel haben wir gesehen, dass die hyperbolische Gerade  $m$  durch  $A$  und den Bildpunkt  $A'$  von  $A$  unter der hyperbolischen Spiegelung an  $\ell$  die Gerade  $\ell$  im Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $[A, A']$  schneidet. Wir wählen einen Punkt  $S \in \ell \setminus \{M\}$ . Die Spiegelung  $s$  bildet offenkundig  $\angle_h(AMS)$  auf  $\angle_h(A'MS)$  ab. Da Inversionen an Kreisen nach IV.1.11 Satz Winkelmaße erhalten, haben  $\angle_h(AMS)$  auf  $\angle_h(A'MS)$  dasselbe hyperbolische Winkelmaß.

<sup>20</sup>Der Wert 0 entspricht dem Fall  $[BA = [BC]$ , der Wert  $\pi$  dem Fall  $A \star B \star C$ .

Man überzeugt sich leicht davon, dass die Summe der beiden Winkelmaße  $\pi$  ist. Jeder der beiden genannten Winkel hat deshalb das Winkelmaß  $\pi/2$ , ist also ein rechter Winkel. Die hyperbolischen Geraden  $\ell$  und  $m$  stehen folglich senkrecht aufeinander.

ii) Es seien  $\ell \subset \mathbb{D}$  eine hyperbolische Gerade und  $A \in \mathbb{D}$ . Ein *Lot* auf  $\ell$  durch  $A$  ist eine hyperbolische Gerade  $m$ , die senkrecht auf  $\ell$  steht und  $A$  enthält. Wenn  $A \notin \ell$ , dann zeigt Teil i), dass die hyperbolische Gerade  $m$  durch  $A$  und das Bild  $A'$  von  $A$  unter der hyperbolischen Spiegelung an  $\ell$  ein Lot auf  $\ell$  durch  $A$  ist. Wenn  $A \in \ell$ , dann existiert nach IV.2.11 Satz eine hyperbolische Transformation  $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $\varphi(\ell) = (-1, 1)$  und  $\varphi(A) = 0$ . Offenbar ist die imaginäre Gerade  $i \cdot \mathbb{R} \cap \mathbb{D}$  ein Lot auf  $(-1, 1)$  durch 0. Damit ist  $m := \varphi^{-1}(i \cdot \mathbb{R} \cap \mathbb{D})$  das gesuchte Lot auf  $\ell$  durch  $A$ . Wir überlassen es der Leserin bzw. dem Leser als Übungsaufgabe, sich davon zu überzeugen, dass Lote eindeutig bestimmt sind.

Für drei verschiedene Punkte  $A, B, C \in \mathbb{D}$ , die nicht auf einer hyperbolischen Geraden liegen, ist das *hyperbolische Dreieck* als

$$\Delta(ABC) := [A, B] \cup [B, C] \cup [A, C]$$

definiert. Die *Seitenlängen* sind

$$a := d_h(B, C), \quad b := d_h(A, C) \quad \text{und} \quad c := d_h(A, B).$$

Die Zahlen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  sind die Maßzahlen der hyperbolischen Winkel  $\angle_h(CAB)$ ,  $\angle_h(ABC)$  und  $\angle_h(BCA)$ . Wie in der euklidischen Geometrie bestehen interessante Beziehungen zwischen diesen Größen. Die Gesetzmäßigkeiten unterscheiden sich allerdings stark von denen in der euklidischen Geometrie.

#### IV.4.1 Identitäten zwischen den hyperbolischen Funktionen

Die Berechnungen in den nächsten Abschnitten sind im Wesentlichen Manipulationen von Gleichungen mit Hyperbelfunktionen. Wir stellen jetzt die relevanten Formeln zusammen.

Nach Definition ([37], Aufgabe 6.12.2) gilt für  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sinh(\lambda) &= \frac{1}{2} \cdot (\exp(\lambda) - \exp(-\lambda)), \\ \cosh(\lambda) &= \frac{1}{2} \cdot (\exp(\lambda) + \exp(-\lambda)), \\ \tanh(\lambda) &= \frac{\sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda)}.\end{aligned}$$

Aus diesen Definitionen ergeben sich für  $\lambda \in \mathbb{R}$  unmittelbar die Formeln

$$\cosh^2(\lambda) - \sinh^2(\lambda) = 1, \tag{IV.12}$$

$$\sinh(2 \cdot \lambda) = 2 \cdot \cosh(\lambda) \cdot \sinh(\lambda), \tag{IV.13}$$

$$\cosh(2 \cdot \lambda) = \cosh^2(\lambda) + \sinh^2(\lambda). \tag{IV.14}$$

Wenn man (IV.12) durch  $\cosh^2(\lambda)$  teilt und den Kehrwert bildet, dan findet man die Formel

$$\cosh^2(\lambda) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\lambda)}. \tag{IV.15}$$

Unter Verwendung dieser Formel erhält man aus (IV.13) und (IV.14)

$$\sinh(2 \cdot \lambda) = \frac{2 \cdot \tanh(\lambda)}{1 - \tanh^2(\lambda)}, \quad (\text{IV.16})$$

$$\cosh(2 \cdot \lambda) = \frac{1 + \tanh^2(\lambda)}{1 - \tanh^2(\lambda)}. \quad (\text{IV.17})$$

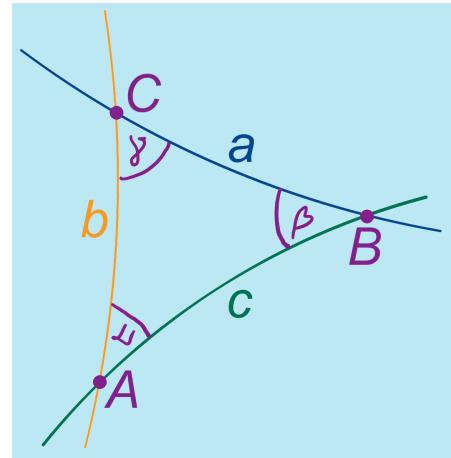
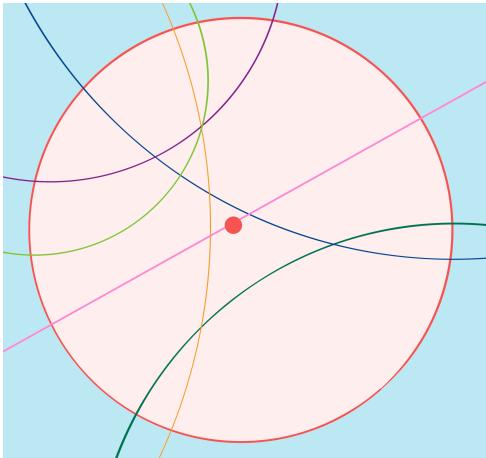


Abbildung IV.1: Einige hyperbolische Dreiecke  
Abbildung IV.2: Die Bezeichnungen in einem hyperbolischen Dreieck

## IV.4.2 Der Kosinus- und der Sinussatz

Der Sinussatz der euklidischen Geometrie ist I.4.7 Satz. In diesem Abschnitt werden wir sein Analogon in der hyperbolischen Geometrie kennenlernen. Es wird uns helfen, die Winkelverhältnisse in hyperbolischen Dreiecken zu untersuchen.

**IV.4.2 Satz.** *Es sei  $\triangle(ABC)$  ein hyperbolisches Dreieck mit Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  und Winkelmaßen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ . Dann gilt*

$$\sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\alpha) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \cosh(a).$$

- IV.4.3 Bemerkungen.** i) Natürlich gelten die entsprechenden Formeln für  $\beta$  und  $\gamma$ .  
ii) Der Kosinussatz der euklidischen Geometrie wird z.B. in [12] auf Seite 30 formuliert.

**Beweis.** Wir können nach Anwendung einer geeigneten hyperbolischen Transformation annehmen, dass  $A = 0$  und  $B = r \in (0, 1)$ . Wir schreiben  $C = s \cdot \exp(i \cdot \alpha)$  mit  $s \in (0, 1)$ . Die hyperbolische Gerade durch  $A$  und  $B$  ist dann  $(-1, 1)$ , und die hyperbolische Gerade durch  $A$  und  $C$  ist  $\overline{AC} \cap \mathbb{D}$ . Damit ergeben sich die folgenden Formeln für die Seitenlängen:

$$c = d_h(0, r) = 2 \cdot \operatorname{Artanh}(r), \quad \text{so dass } r = \tanh\left(\frac{c}{2}\right),$$

$$b = d_h(0, s \cdot \exp(i \cdot \alpha)) = 2 \cdot \operatorname{Artanh}(s), \quad \text{so dass } s = \tanh\left(\frac{b}{2}\right),$$

$$a = d_h(s \cdot \exp(i \cdot \alpha), r) = 2 \cdot \operatorname{Artanh}\left(\left|\frac{s \cdot \exp(i \cdot \alpha) - r}{r \cdot s \cdot \exp(i \cdot \alpha) - 1}\right|\right).$$

Folglich gilt

$$\tanh^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{|s \cdot \exp(i \cdot \alpha) - r|^2}{|r \cdot s \cdot \exp(i \cdot \alpha) - 1|^2}.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} |s \cdot \exp(i \cdot \alpha) - r|^2 &= (s \cdot \exp(-i \cdot \alpha) - r) \cdot (s \cdot \exp(i \cdot \alpha) - r) \\ &= s^2 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \operatorname{Re}(\exp(i \cdot \alpha)) + r^2 \\ &= s^2 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\alpha) + r^2. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$|r \cdot s \cdot \exp(i \cdot \alpha) - 1|^2 = r^2 \cdot s^2 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\alpha) + 1.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{r^2 + s^2 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\alpha)}{r^2 \cdot s^2 + 1 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\alpha)}, \\ 1 + \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{r^2 \cdot s^2 + r^2 + s^2 + 1 - 4 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\alpha)}{r^2 \cdot s^2 + 1 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\alpha)}, \\ 1 - \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{r^2 \cdot s^2 - r^2 - s^2 + 1}{r^2 \cdot s^2 + 1 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\alpha)}. \end{aligned}$$

Wir setzen dies in Formel (IV.17) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \frac{r^2 \cdot s^2 + r^2 + s^2 + 1 - 4 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\alpha)}{r^2 \cdot s^2 - r^2 - s^2 + 1} \\ &= \frac{(1 + s^2) \cdot (1 + r^2) - 4 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\alpha)}{(1 - s^2) \cdot (1 - r^2)}. \end{aligned} \tag{IV.18}$$

Da  $s = \tanh(b/2)$ , zeigt (IV.17), dass

$$\frac{1 + s^2}{1 - s^2} = \cosh(b)$$

und (IV.16), dass

$$\frac{2 \cdot s}{1 - s^2} = \sinh(b).$$

Ebenso gilt wegen  $r = \tanh(c/2)$ , dass

$$\frac{1 + r^2}{1 - r^2} = \cosh(c)$$

und

$$\frac{2 \cdot r}{1 - r^2} = \sinh(c).$$

Diese Ausdrücke setzen wir in (IV.18) ein und erhalten

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\alpha).$$

Das ist die behauptete Gleichung. □

**IV.4.4 Satz.** Es sei  $\triangle(ABC)$  ein hyperbolisches Dreieck mit Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  und Winkelmaßen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ . Dann gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sinh(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sinh(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sinh(c)}.$$

*Beweis.* Wir kürzen  $\alpha := \cosh(a)$ ,  $\beta = \cosh(b)$  und  $\gamma = \cosh(c)$  ab. Auf Grund von (IV.12) gilt

$$\sinh^2(b) = \beta^2 - 1, \quad \text{und} \quad \sinh^2(c) = \gamma^2 - 1.$$

Nach IV.4.2 Satz besteht die Gleichung

$$\sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\alpha) = \beta \cdot \gamma - \alpha.$$

Wir leiten daraus

$$\begin{aligned} \sinh^2(b) \cdot \sinh^2(c) \cdot \sin^2(\alpha) &= \sinh^2(b) \cdot \sinh^2(c) \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= (1 - \beta^2) \cdot (1 - \gamma^2) - (\beta \cdot \gamma - \alpha)^2 \\ &= 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \end{aligned}$$

ab. Der Term auf der linken Seiten ist offenbar nicht negativ. Deswegen können wir

$$\Delta := \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$$

setzen, so dass

$$\sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \sin(\alpha) = \Delta.$$

Da der Ausdruck  $1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$  sich bei Vertauschung von  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  nicht ändert, gilt ebenfalls

$$\sinh(a) \cdot \sinh(c) \cdot \sin(\beta) = \Delta \quad \text{und} \quad \sinh(a) \cdot \sinh(b) \cdot \sin(\gamma) = \Delta$$

und daher

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sinh(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sinh(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sinh(c)} = \frac{\Delta}{\sinh(a) \cdot \sinh(b) \cdot \sinh(c)}.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

### IV.4.3 Rechtwinklige Dreiecke

Es sei in diesem Abschnitt  $\triangle(ABC)$  ein hyperbolisches Dreieck mit  $\alpha = \pi/2$ . Wie in der euklidischen Geometrie gelten in rechtwinkligen Dreiecken besondere Identitäten.

**IV.4.5 Der Satz von Pythagoras für hyperbolische Dreiecke.** In der obigen Situation gilt

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c).$$

*Beweis.* Wegen  $\cos(\pi/2) = 0$  ([37], 4.8.13 Definition) ist dies eine unmittelbare Folgerung aus IV.4.2 Satz. □

**IV.4.6 Bemerkung.** Für  $\lambda > 0$  gilt  $\cosh(\lambda) > 1$ . Der Satz von Pythagoras zeigt insbesondere, dass sie Seite  $[B, C]$ , die dem rechten Winkel gegenüber liegt, die längste ist.

**IV.4.7 Satz.** *In dem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle(ABC)$  gelten die Identitäten*

$$\begin{aligned}\sin(\beta) &= \frac{\sinh(b)}{\sinh(a)}, & \sin(\gamma) &= \frac{\sinh(c)}{\sinh(a)}, \\ \cos(\beta) &= \frac{\tanh(c)}{\tanh(a)}, & \cos(\gamma) &= \frac{\tanh(b)}{\tanh(a)}, \\ \tan(\beta) &= \frac{\tanh(b)}{\sinh(c)}, & \tan(\gamma) &= \frac{\tanh(c)}{\sinh(b)}.\end{aligned}$$

**IV.4.8 Bemerkungen.** Diese Ausdrücke zeigen, dass die Winkel durch die Seitenlängen bestimmt sind. Das ist in der euklidischen Geometrie auch so. Interessanterweise sind in der hyperbolischen Geometrie die Seitenlängen durch die Winkel bestimmt (s. IV.4.12 Satz).

*Beweis.* Da  $\sin(\pi/2) = 1$  ([37], Beweis von 4.8.15 Satz) gilt, sind die erste und zweite Gleichung in IV.4.4 Satz enthalten.

Laut IV.4.2 Satz gilt

$$\sinh(a) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\beta) = \cosh(a) \cdot \cosh(c) - \cosh(b).$$

Mit dem Satz von Pythagoras (IV.4.5) finden wir

$$\sinh(a) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\beta) = \frac{\cosh(a) \cdot (\cosh^2(c) - 1)}{\cosh(c)} = \frac{\cosh(a) \cdot \sinh^2(c)}{\cosh(c)}.$$

Division durch  $\sinh(a) \cdot \sinh(c)$  zeigt

$$\cos(\beta) = \frac{\tanh(c)}{\tanh(a)}.$$

Die vierte Gleichung folgt analog.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\tan(\beta) &= \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{\sinh(b)}{\sinh(a)} \cdot \frac{\tanh(a)}{\tanh(c)} = \frac{\sinh(b)}{\cosh(a)} \cdot \frac{1}{\tanh(c)} \\ &= \frac{\sinh(b)}{\cosh(a)} \cdot \frac{\cosh(c)}{\sinh(c)} = \frac{\sinh(b)}{\cosh(b) \cdot \sinh(c)} = \frac{\tanh(b)}{\sinh(c)}.\end{aligned}$$

Bei der vorletzten Umformung haben wir den Satz von Pythagoras (IV.4.5) eingesetzt. Entsprechend leitet man die letzte Gleichung ab.  $\square$

**IV.4.9 Bemerkung.** Aus der Definition folgt sofort, dass  $\tanh(\lambda) > 0$  für  $\lambda > 0$ . Damit gilt also  $\cos(\beta) > 0$  und  $\cos(\gamma) > 0$ . Wegen  $\beta, \gamma \in (0, \pi)$  impliziert dies  $0 < \beta, \gamma < \pi/2$ .

## IV.4.4 Die Winkelsumme eines hyperbolischen Dreiecks

Der zentrale Unterschied zwischen der euklidischen und der hyperbolischen Geometrie ist die Existenz unendlich vieler paralleler Geraden zu einer gegebenen hyperbolischen Geraden  $\ell$  durch einen Punkt  $A \in \mathbb{D} \setminus \ell$  (IV.2.10 Aufgabe). Dieser Unterschied macht sich auch in vielen anderen Situationen bemerkbar. Ein wichtiges Beispiel ist, dass die

Summe der Innenwinkel stets kleiner als  $\pi$  ist (IV.4.10 Satz). Weiter kann jede Zahl aus  $(0, \pi)$  als Summe der Innenwinkel eines hyperbolischen Dreiecks auftreten (IV.4.12 Satz). Wir werden dies in unserem Modell mit den bisher entwickelten analytischen Hilfsmitteln beweisen. Diese Sätze lassen sich auch in der axiomatischen Geometrie beweisen (z.B. [25], Theorem 18.2).

**IV.4.10 Satz.** *Es sei  $\triangle(ABC)$  ein hyperbolisches Dreieck mit Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  und Winkelmaßen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  (s. Abbildung IV.2). Dann gilt*

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, dass das Dreieck rechtwinklig ist, also z.B.  $\alpha = \pi/2$ . Mit dem Additionstheorem für den Kosinus ([37], 4.8.8 Satz) berechnen wir

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) - \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma).$$

Wir setzen die Formel aus IV.4.7 Satz ein und erhalten

$$\begin{aligned} \cos(\beta + \gamma) &= \frac{\tanh(c)}{\tanh(a)} \cdot \frac{\tanh(b)}{\tanh(a)} - \frac{\sinh(b)}{\sinh(a)} \cdot \frac{\sinh(c)}{\sinh(a)} \\ &= \left( \frac{\cosh^2(a)}{\cosh(b) \cdot \cosh(c)} - 1 \right) \cdot \frac{\sinh(b) \cdot \sinh(c)}{\sinh^2(a)}. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Pythagoras (IV.4.5) und den ersten beiden Formeln aus IV.4.7 Satz wird dies zu

$$\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot (\cosh(a) - 1).$$

Wegen  $0 < \beta, \gamma < \pi$  gilt  $\sin(\beta) > 0$  und  $\sin(\gamma) > 0$ . Da  $\cosh(a) > 1$ , folgt

$$\cos(\alpha + \beta) > 0.$$

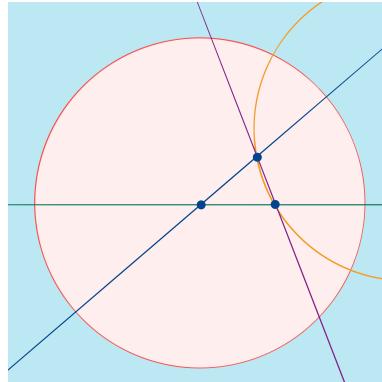
In IV.4.9 Bemerkung haben wir beobachtet, dass  $\beta < \pi/2$  und  $\gamma < \pi/2$  und daher  $\beta + \gamma < \pi$ . Die obige Ungleichung zeigt nun  $\beta + \gamma < \pi/2$ .

Jetzt sei  $\triangle(ABC)$  ein beliebiges Dreieck. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $\alpha \geq \beta$  und  $\alpha \geq \gamma$  gilt. Wir fällen das Lot (s. IV.4.1 Beispiele, ii) von  $A$  auf die hyperbolische Gerade  $\ell$  durch  $B$  und  $C$ . Wenn  $M$  nicht auf der Strecke  $[B, C]$  läge, also z.B.  $B \star C \star M$  gälte, dann folgte  $\alpha < \pi/2$ , weil  $\alpha$  kleiner als das Maß des Winkels  $\angle_h(MAB)$  ist<sup>21</sup> und damit insbesondere kleiner als  $\pi/2$ , wie IV.4.9 Bemerkung zeigt. Weiter müsste aber  $\angle_h(BCA)$  ein Maß größer als  $\pi/2$  haben.<sup>22</sup> Das widerspricht der Annahme zu  $\alpha$ . Damit können wir die beiden rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle(ABM)$  und  $\triangle(AMC)$  betrachten. Die Summe  $\alpha + \beta + \gamma$  ist Summe der Innenwinkelsummen dieser beiden rechtwinkligen Dreiecke minus  $\pi$  und damit kleiner als  $\pi$ .  $\square$

**IV.4.11 Bemerkung.** Wir illustrieren den Sachverhalt mit einem Dreieck der Form  $\triangle(0BC)$ .

<sup>21</sup>Man überprüfe dies, indem man  $A = 0$  wähle.

<sup>22</sup>Hier schaue man sich den Fall  $B, C, M \in (-1, 1)$  mit  $C = 0$  an.



Dann sind die Seiten  $[0, B]$  und  $[0, C]$  euklidisch, und das Dreieck  $\triangle(0BC)$  liegt in dem euklidischen Dreieck mit den Ecken  $0, B, C$ .<sup>23</sup>

**IV.4.12 Satz.** *Es seien  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$  drei Zahlen mit*

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

*Dann existiert ein hyperbolisches Dreieck  $\triangle(ABC)$ , so dass der Winkel  $\angle_h(CAB)$  das Maß  $\alpha$ , der Winkel  $\angle_h(ABC)$  das Maß  $\beta$  und  $\angle_h(BCA)$  das Maß  $\gamma$  hat.*

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Fall  $\alpha = \pi/2$ . Wir nehmen an, dass es ein Dreieck mit den genannten Winkelmaßen gibt. Gemäß IV.4.7 Satz schreiben wir

$$\sin(\beta) = \frac{\sinh(b)}{\sinh(a)} \quad \text{und} \quad \cos(\gamma) = \frac{\tanh(b)}{\tanh(a)}$$

und schließen

$$\cosh(b) = \frac{\sinh(b)}{\tanh(b)} = \frac{\sinh(a)}{\tanh(a)} \cdot \frac{\sin(\beta)}{\cos(\gamma)} = \cosh(a) \cdot \frac{\sin(\beta)}{\cos(\gamma)}. \quad (\text{IV.19})$$

Aus dem Satz von Pythagoras (IV.4.5) folgern wir weiter

$$\cosh(c) = \frac{\cosh(a)}{\cosh(b)} = \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\beta)}. \quad (\text{IV.20})$$

Analog beweist man

$$\cosh(b) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\gamma)}. \quad (\text{IV.21})$$

Es folgt

$$\cosh(a) = \cot(\beta) \cdot \cot(\gamma). \quad (\text{IV.22})$$

Die erhaltenen Gleichungen zeigen, dass die Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck durch die Winkelmaße  $\beta$  und  $\gamma$  bestimmt sind.

Jetzt starten wir mit den vorgegebenen Winkelmaßen. Wir müssen zunächst überprüfen, dass die rechten Seiten in (IV.20) und (IV.21) größer als eins sind. Das folgt dann auch für die rechte Seite von (IV.22). Unter diesen Voraussetzungen sind nämlich

$$a = \text{Arcosh}(\cot(\beta) \cdot \cot(\gamma)), \quad b = \text{Arcosh}\left(\frac{\cos(\beta)}{\sin(\gamma)}\right) \quad \text{und} \quad c = \text{Arcosh}\left(\frac{\cos(\gamma)}{\sin(\beta)}\right)$$

<sup>23</sup>Hier erkennt man gut, wieso das gewählte Modell für Aussagen über Winkel besonders gut geeignet ist.

definiert. Die Voraussetzung besagt

$$\beta + \gamma < \frac{\pi}{2},$$

so dass

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} - \gamma$$

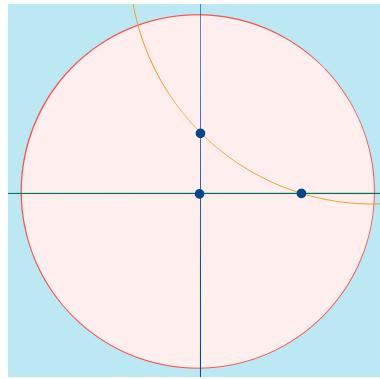
und daher

$$\cos(\beta) > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin(\gamma).$$

Die letzte Identität ist Gleichung (4.8) in [37]. Ebenso zeigt man

$$\cos(\gamma) > \sin(\beta).$$

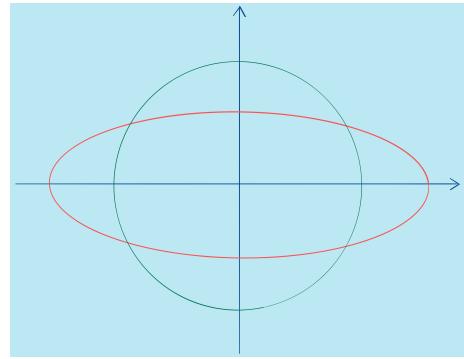
Wir wählen  $A := 0$ ,  $B := \tanh(c/2)$  und  $C := i \cdot \tanh(b/2)$ .



Dies ist ein Dreieck mit den errechneten Seitenlängen. Wir müssen nachprüfen, dass das Dreieck wirklich die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  hat.<sup>24</sup> Dazu seien  $\beta'$  und  $\gamma'$  die Winkelmaße in  $\triangle(ABC)$ . Laut (IV.20) und (IV.21) haben wir die Gleichung

$$(\sin(\beta') \cdot \cosh(c))^2 + \left(\frac{\cos(\beta')}{\cosh(b)}\right)^2 = 1.$$

Diese definiert eine Ellipse, die wegen  $\cosh(b) > 1$  und  $\cosh(c) > 1$  nicht mit dem Einheitskreis übereinstimmt, und  $(\cos(\beta'), \sin(\beta'))$  ist ein Schnittpunkt dieser Ellipse mit dem Einheitskreis. Man vergewissert sich, dass es nur einen Schnittpunkt im positiven Quadranten  $\{(e, f) \in \mathbb{R}^2 \mid e > 0 \wedge f > 0\}$  gibt. Es folgt  $\cos(\beta') = \cos(\beta)$  und somit  $\beta' = \beta$ . Es gilt dann auch  $\gamma' = \gamma$ .



Jetzt sei  $\alpha$  beliebig. Wir setzen  $\alpha \geq \beta$  und  $\alpha \geq \gamma$  voraus. Wir werden zeigen, dass man  $\alpha = \alpha' + \alpha''$  so schreiben kann, dass

$$0 < \alpha', \alpha'' < \frac{\pi}{2}$$

<sup>24</sup>Nach IV.4.7 Satz sind die Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck durch die Seitenlängen bestimmt. Es könnte jedoch sein, dass es kein Dreieck mit den Winkelmaßen  $\pi/2, \beta$  und  $\gamma$  gibt.

und es rechtwinklige Dreiecke  $\triangle(A'B'M)$  und  $\triangle(A''M'C')$  gibt, so dass an  $M$  bzw.  $M'$  der rechte Winkel anliegt, an  $B'$  der Winkel mit dem Maß  $\beta$ , an  $A'$  der Winkel mit dem Maß  $\alpha'$ , an  $C'$  der Winkel mit dem Maß  $\gamma$  und an  $A''$  der Winkel mit dem Maß  $\alpha''$  und so dass

$$d_h(M, A') = d_h(M', A'').$$

Wir setzen dann

$$B := -\tanh\left(\frac{d_h(B', M)}{2}\right), \quad C := \tanh\left(\frac{d_h(M', C')}{2}\right) \quad \text{und} \quad A := i \cdot \tanh\left(\frac{d_h(M, A')}{2}\right).$$

Es folgt aus dem ersten Teil, dass dieses Dreieck die gesuchten Winkel hat.

Aus (IV.21) lesen wir ab, dass wir eine positive Zahl  $h$  suchen, die

$$\cosh(h) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\alpha')} = \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\alpha'')} \tag{IV.23}$$

erfüllt. Mit dem Additionstheorem ([37], 4.8.8 Satz) für den Sinus und  $\alpha'' = \alpha - \alpha'$  finden wir

$$\sin(\alpha) \cdot \cot(\alpha') - \cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha'')}{\sin(\alpha')} = \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\beta)}, \tag{IV.24}$$

d.h.

$$\cot(\alpha') = \frac{1}{\sin(\alpha)} \cdot \left( \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\beta)} + \cos(\alpha) \right). \tag{IV.25}$$

Dies definiert einen Wert  $\alpha' \in (0, \pi)$ . Aus Gleichung (IV.24) folgt, dass  $\sin(\alpha'')$  positiv ist, und wegen  $-\pi < \alpha - \alpha' < \pi$  ist auch  $\alpha'' = \alpha - \alpha'$  positiv. Um die Existenz des Dreiecks  $\triangle(A'B'M)$  nachweisen zu können, brauchen wir

$$\alpha' + \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Da der Tangens streng monoton wachsend ist, folgt dies aus

$$\tan(\beta) < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \cot(\alpha').$$

Für die Gleichung haben wir wieder [37], (4.8), benutzt. Mit (IV.25) und dem Additionstheorem für den Kosinus ([37], 4.8.8 Satz) wird diese Ungleichung zu

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\gamma) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\gamma) > 0.$$

Es gilt immer  $\cos(\gamma) > 0$ , weil  $0 < \gamma < \pi/2$ . Wenn  $\alpha + \beta \leq \pi/2$ , dann gilt  $\cos(\alpha + \beta) \geq 0$ , und wir sind fertig. Jetzt gelte  $\alpha + \beta > \pi/2$ . Die Voraussetzung besagt

$$\gamma < \pi - \alpha - \beta < \frac{\pi}{2},$$

so dass

$$\cos(\gamma) > \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta).$$

Das ergibt die gewünschte Gleichung.

In den obigen Berechnungen können wir auch nach  $\alpha''$  auflösen und die Existenz des Dreiecks  $\triangle(A''M'C')$  verifizieren.  $\square$

Zwei Teilmengen  $X, Y \subset \mathbb{D}$  heißen *kongruent*, wenn es eine hyperbolische Transformation  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  mit

$$\varphi(X) = Y$$

gibt.

**IV.4.13 Folgerung.** Es seien  $\triangle(ABC)$  und  $\triangle(A'B'C')$  zwei hyperbolische Dreiecke. Wenn

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta' \quad \text{und} \quad \gamma = \gamma',$$

dann sind  $\triangle(ABC)$  und  $\triangle(A'B'C')$  kongruent.

Der analoge Kongruenzsatz ist in der euklidischen Geometrie falsch. Euklidische Dreiecke mit denselben Winkelmaßen sind in der Regel nur ähnlich aber nicht kongruent.

*Beweis.* Wir nummerieren so, dass  $\alpha \geq \beta$  und  $\alpha \geq \gamma$ , und fällen das Lot auf die hyperbolische Gerade durch  $B$  und  $C$ . Wie bereits im Beweis von IV.4.10 Satz gezeigt wurde, liegt der Fußpunkt  $M$  dieses Lots auf der hyperbolischen Strecke  $[B, C]$ . Wir nummerieren weiter so, dass  $d_h(B, M) \leq d_h(M, C)$ .

Nach IV.2.8 Satz existiert eine hyperbolische Spiegelung  $\varphi_1: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $\varphi_1(M) = 0$ . Nach einer geeigneten Drehung  $\varphi_2: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  gilt  $A'':=\varphi_2(\varphi_1(A)) \in i \cdot (0, 1)$  und folglich  $\varphi_2(\varphi_1(B)), \varphi_2(\varphi_1(C)) \in (-1, 1)$ . Mit  $\varphi_3 = \text{id}_{\mathbb{D}}$  oder  $\varphi_3$  der Spiegelung an der hyperbolischen Geraden  $i \cdot (-1, 1)$  erreichen wir  $C'':=\varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(C))) \in (0, 1)$  und entsprechend  $B'':=\varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(C))) \in (-1, 0)$ .

Der Beweis von IV.4.12 Satz zeigt weiter, dass  $h := d_h(A'', 0) = d_h(A, M)$  durch  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  eindeutig bestimmt ist. Gemäß unserer Konstruktion gilt  $A'' = i \cdot \tanh(h/2)$ . Ebenso sind  $d_h(B'', 0) = d_h(B, M)$  und  $d_h(0, C'') = d_h(M, C)$  eindeutig durch  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  bestimmt, und wir haben  $B'' = -\tanh(d_h(B'', 0)/2)$  und  $C'' = \tanh(d_h(0, C'')/2)$ .

Diese Diskussion zeigt, dass es bei der gegebenen Nummerierung eindeutig bestimmte positive reelle Zahlen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  mit  $\beta \leq \gamma$  gibt, so dass  $\triangle(ABC)$  kongruent zu  $\triangle(i \cdot \alpha, -\beta, \gamma)$  ist. Aus der Argumentation folgt ebenso, dass  $\triangle(A'B'C')$  kongruent zu  $\triangle(i \cdot \alpha, -\beta, \gamma)$  ist.  $\square$

Aus dem Beweis von IV.4.12 Satz ergibt sich schließlich noch eine Art „dualer“ Kosinussatz.

**IV.4.14 Folgerung.** Es sei  $\triangle(ABC)$  ein hyperbolisches Dreieck, so dass  $\alpha \geq \beta$  und  $\alpha \geq \gamma$ . Dann gilt

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cosh(c) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\gamma).$$

*Beweis.* Wir fällen wieder das Lot auf die hyperbolische Gerade durch  $B$  und  $C$  durch  $A$ . Es sei  $M \in [B, C]$  der Fußpunkt. Gleichung (IV.22) im hyperbolischen Dreieck  $\triangle(ABM)$  zeigt<sup>25</sup>

$$\cosh(c) = \cot(\beta) \cdot \cot(\alpha'),$$

so dass

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cosh(c) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cot(\alpha').$$

Jetzt setzen wir Formel (IV.25) für  $\cot(\alpha')$  ein und finden die behauptete Formel.  $\square$

<sup>25</sup>Die Seite  $[A, B]$  ist die Hypotenuse in diesem Dreieck. Sie hat gemäß unserer Konventionen die Länge  $c$ .



# Literaturhinweise

- [1] F. Apéry, *Models of the real projective plane, computer graphics of Steiner and Boy surfaces*, mit einem Vorwort von E. Brieskorn, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987, xii+156 S.
- [2] C. Augat, *Über die Modelle der hyperbolischen Geometrie*, wissenschaftliche Arbeit an der Universität Heidelberg, 1996, 107 S. ([www.schule.at/fileadmin/DAM/Gegenstandsportale/Raumgeometrie/Dateien/zula.PDF](http://www.schule.at/fileadmin/DAM/Gegenstandsportale/Raumgeometrie/Dateien/zula.PDF).)
- [3] R. Benedetti, J.-J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1990, 340 S.
- [4] D.A. Brannan, M.F. Esplen, J.J. Gray, *Geometry*, 2. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge, 2012, 602 S.
- [5] C. Cerroni, *Non-Desarguian geometries and the foundations of geometry from David Hilbert to Ruth Moufang*, Historia Math. **31** (2004), no. 3, 320-36.
- [6] B. Erdnüß, *Measuring in images with projective geometry*, in *ISPRS TC I Mid-term Symposium “Innovative Sensing – From Sensors to Methods and Applications”*, 10–12 October 2018, Karlsruhe, Germany, The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Volume XLII-1, 2018, 141-8.
- [7] Euklid, *Die Elemente*, Bücher I bis XIII, aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von C. Thaer, mit einem Vorwort von W. Trageser, 3. Aufl., Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Band 235, Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1997, iv+479 S.
- [8] R.P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynman-Vorlesungen über Physik*, Band 2, *Elektromagnetismus und Struktur der Materie*, aus dem Englischen übersetzt von M. Mitter, 5. verbess. Aufl., Oldenbourg Verlag, München–Wien, 2007, xxviii+872 S.
- [9] A. Filler, *Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren*, Mathematik Primar- und Sekundarstufe I+II, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2011, x+302 S.

- [10] G. Fischer, *Analytische Geometrie*, vierte Auflage, Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik, Band 35, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985, viii+212 S.
- [11] G. Fischer (Hrsg.), *Mathematical models. From the collections of universities and museums*, Bild- und Kommentarband, mit einem Vorwort von G.-M. Greuel, zweite Aufl., Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017, xix+216 S.
- [12] G. Fischer, *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium*, unter Mitarbeit von F. Quiring, vierte überarb. und erw. Aufl., Springer Spektrum, Wiesbaden, 2019, xii+509 S.
- [13] G. Fischer, R. Sacher, *Einführung in die Algebra*, zweite überarbeitete Auflage, Teubner Studienbücher: Mathematik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1978, 240 S.
- [14] U. Friedrichsdorf, A. Prestel, *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik, Band 58, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985, vi+103 S.
- [15] S.S. Grewal, K. Grewal, *An analysis of the mathematical accuracy of perspective in paintings*, Journal of Emerging Investigators ([www.emerginginvestigators.org](http://www.emerginginvestigators.org)) **2** (2019), 1-6.
- [16] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977, xvi+496 pp.
- [17] L.D. Henderson, *The fourth dimension and non-Euclidean geometry in modern art*, überarbeitete Aufl. des Originals von 1983, MIT Press, Cambridge, MA, 2013, xxviii+729 pp.
- [18] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, mit Supplementen von P. Bernays, mit Beiträgen von M. Toepell, H. Kiechle, A. Kreuzer und H. Wefelscheid, herausgegeben und mit Anhängen von M. Toepell, 14. Aufl., Teubner-Archiv zur Mathematik, Supplement, 6, B.G. Teubner, Stuttgart, 1999, xxiii+408 S.
- [19] K. Hulek, *Elementare algebraische Geometrie. Grundlegende Begriffe und Techniken mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen*, zweite Aufl., Aufbaukurs Mathematik, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2012, xii+194 S.
- [20] K. Jänich, *Topologie*, achte Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 2005, x+239 S.
- [21] H. Kestelman, *Automorphisms of the field of complex numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) **53** (1951), 1-12.
- [22] O. Khayyām, *Discussion of difficulties in Euclid*, translated by A.R. Amir-M'oez, Scripta Math. **24** (1959), 275-303.
- [23] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Math. Ann. **43** (1893), no. 1, 63-100.

- [24] M. Knebusch, C. Scheiderer, *Einführung in die reelle Algebra*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, Band 63, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989, x+184 S.
- [25] J.M. Lee, *Axiomatic geometry*, Pure and Applied Undergraduate Texts, Band 21, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, xviii+469 S.
- [26] H. Lüneburg, *Die euklidische Ebene und ihre Verwandten*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999, viii+207 S.
- [27] H. Maehara, *Why is  $P^2$  not embeddable in  $R^3$ ?*, Amer. Math. Monthly **100** (1993), no. 9, 862-4.
- [28] R. Migliari, L. Baglioni, *Application of the cross-ratio to the analysis of architecture*, in *16th International Conference on Geometry and Graphics*, ISGG 4-8 August 2014, Innsbruck, Austria, 1-12.
- [29] F. Moll, M. Krischel, *Die Entwicklung der extrakorporalen Schockwellenlithotripsie (ESWL) - ein Beitrag zur Medizintechnikgeschichte*, in T. Halling et al. (Hrsg.), *Urologie 1945-1990*, 185-196, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2015.
- [30] E. Ogasa, *Make your Boy surface*, <https://arxiv.org/abs/1303.6448v1>, 14 S.
- [31] Pappus of Alexandria, *Book 7 of the Collection*, Part 1, *Introduction, text, and translation*, herausgegeben, übersetzt und kommentiert von A. Jones, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences, Band 8, Springer-Verlag, New York, 1986, x+748 S.
- [32] W.F. Reynolds, *Hyperbolic geometry on a hyperboloid*, Amer. Math. Monthly **100** (1993), no. 5, 442-55.
- [33] G. Saccheri, *Euclides vindicatus*, aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von G.B. Halsted, mit Anmerkungen von P. Stäckel und F. Engel, aus dem Deutschen übersetzt von F. Steinhardt, 2. Aufl., Chelsea Publishing Co., New York, 1986, xxx+255 S.
- [34] P. Samuel, *Projective geometry*, translated from the French by S. Levy, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1988, x+156 pp.
- [35] A. Schmitt, *Algebra I*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/SkriptAlgI.pdf>.
- [36] A. Schmitt, *Algebra und Zahlentheorie*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/SkriptAlgZT.pdf>
- [37] A. Schmitt, *Analysis I*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/skript.pdf>.
- [38] A. Schmitt, *Analysis II*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/skript2.pdf>.

- [39] A. Schmitt, *Analysis III*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~aschmitt/skript3.pdf>
- [40] A. Schmitt, *Funktionentheorie*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~a-schmitt/SkriptFT.pdf>
- [41] A. Schmitt, *Lineare Algebra I*, Vorlesungsskript, <http://userpage.fu-berlin.de/~a-schmitt/SkriptLAI.pdf>.
- [42] H. Schwerdtfeger, *Geometry of complex numbers. Circle geometry, Moebius transformation, non-Euclidean geometry*, korrigierte Nachdruck der Ausgabe von 1962, Dover Books on Advanced Mathematics, Dover Publications, Inc., New York, 1979, xiii+200 S.
- [43] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, korrigierte Nachdruck der Originalausgabe von 1966, Springer-Verlag, New York, 1995, xvi+528 S.
- [44] Ch. Weibel, *Survey of non-Desarguesian planes*, Notices Amer. Math. Soc. **54** (2007), no. 10, 1294-1303.
- [45] P.B. Yale, *Automorphisms of the Complex Numbers*, Math. Mag. **39** (1966), no. 3, 135-41.

# Stichwortverzeichnis

- Abbildung  
    affine —, 4, 43  
    perspektivische —, 66, 68, 93
- Abbildungsmatrix, 38
- abgeschlossen, 115  
    — e Einheitskreisscheibe, 137  
    algebraisch —, 109
- Ableitung, 23, 25  
    partielle —, 49, 57  
    totale —, 78
- Abschluss, 115, 125  
    projektiver —, 94, 113  
    ist gleich topologischer —, 116
- Absolutbetrag, 132
- Abstand, 103, 104  
    eines Punkts von einer Menge, 2  
    euklidischer —, viii, 2, 32, 101  
    hyperbolischer —, 156
- Abstandsfunktion, 152
- Achse, 91, 95, 98–100
- Additionstheorem, 171, 174
- affin  
    —e Abbildung, 4, 22, 43  
    —e Äquivalenz, viii  
    —e Äquivalenzklassen von Quadranten, 57  
    —e Ebene, 43, 48, 73  
    —e Geometrie  
        Hauptsatz, viii  
    —e Gerade, 43  
    —e Gruppe, viii, 46, 74  
    —e Transformation, 53  
    —er Kegel, 70, 106  
    —er Raum, 2, 42
- Dimension, 42  
    eines Vektorraums, 42  
    —er Unterraum, 2, 43
- äquivalent, 47
- ähnlich, vii, 175
- algebraisch  
    —e Menge, 52  
    abgeschlossen, 109
- allgemeine Lage, 124, 125, 127
- Anordnung, 102, 111
- Antipoden, 75, 81  
    —abbildung, 75, 76
- Anzahl  
    der negativen Nullstellen, 111  
    der positiven Nullstellen, 111
- Apéry, 80, 81
- Äquator, 75–77, 81
- äquivalent  
    affin —, 47  
    projektiv —, 73
- Äquivalenzrelation, 40, 47, 69
- Areahyperbelsinus, 13
- Areahyperbeltangens, x, 156
- Argument, 138
- Asymptote, 13, 41, 119  
    —nkegel, 119, 151
- Aufpunkt, 2, 101
- Ausfallswinkel, 25, 27
- Automorphismus, 120  
    Frobenius—, 85  
    Körper—, 85  
    wilder —, 89
- axiomatische Geometrie, 100
- Bahn, 110, 112

- Beobachtungspunkt, 65
- biholomorph, 147
- Bolyai, viii
- Boy, 79
  - Fläche, 80
  - Gerade auf einer —, 81
  - Gleichung für eine —, 81
  - Parametrisierung einer —, 80
- Brasilia, 59
- Breite, 103
- Brennpunkt, 6, 8, 11, 16, 19, 20, 24, 26, 29, 58
- Brücke, 104
- Bryant, 80
- Buchara, 63
- Bus, 103
- Cassegrain, 28
  - Fokus, 28
- charakteristisches Polynom, 111, 112
- Chayyām, viii
- Dandelin, 16
- dandelinsche Sphäre, 16, 19, 20
- Desargues, 67
  - Satz von —, 68, 101
- desarguesch, 84
- Descartes, 111
  - Lemma von —, 112
- Determinantenfunktion, 124
- Diagonalmatrix, 54
- dicht, 125
- differenzierbar, 164
  - e Abbildung, 151, 153
- Dimension, 70
  - sformel, 71
  - eines affinen Raums, 42
- direkte hyperbolische Transformation, 146, 147
- Diskriminante, 52, 109, 110
- Doppelverhältnis, ix, 96, 103
  - Das — und Vertauschung der Punkte, 97
  - Invarianz des —ses unter projektiven Transformationen, 97, 103
- Drehung, vi, 7, 16, 21, 38–41, 138
  - hyperbolische —, 146
- dreidimensional, 65, 71, 84, 94, 95, 123
- Dreieck, v, 48
  - Fläche eines —s, 27
  - hyperbolisches —, 166
  - rechtswinkliges —, 17, 19
- dualer Satz von Pappos, 101
- Dualraum, 71
- Durchmesser einer Ellipse, 10
- Ebene, 70
  - affine —, 43, 48
  - Fano—, 71
  - hyperbolische —, x, 149
  - parallele —n, 58
  - projektive —, 73
  - Vereinigung zweier —n, 60
- Eigenvektor, 72
- Eigenwert, 54, 111, 112
- Einbettung, 77
- Einfallswinkel, 25, 27
- Einheitskreis, x, 109, 127
  - scheibe, x, 77, 137, 149
  - abgeschlossene —, 137
  - Inversion am —, 134
- einschaliges Rotationshyperboloid, 59, 61, 120
- Elemente
  - Euklids —, vii
- Ellipse, 6, 16, 18, 21, 41, 57, 66, 114, 127, 173
  - Durchmesser einer —, 10
  - in Standardform, 8, 29, 41
  - Tangente an eine —, 29
- Erlanger Programm, vi
- Euklid
  - s Elemente, vii
  - von Alexandria, vii
- euklidisch
  - e Gruppe, vi
  - e Kongruenz, 57
  - e Länge, 104
  - e Norm, 1, 32, 133, 151
  - e Topologie, 114
  - er Abstand, viii, 2, 32, 101
  - er Vektorraum, 36, 37
- Euler, 106
  - formel, 106, 126, 138

- 
- Existenz  
 eines hyperbolischen Dreiecks zu vor-  
 gegebenen Innenwinkeln, 172  
 unendlich vieler paralleler Geraden,  
 140, 142
- Exponentialfunktion  
 komplexe —, 138
- Exzentrizität, 6, 8, 11, 18
- Familie von Kegelschnitten, 20
- Fano, 71  
 —Ebene, 71
- Fläche eines Dreiecks, 27
- Fluchtpunkt, 66
- Frobenius, 85  
 —Automorphismus, 85
- Fundamentalsatz der Algebra, 61
- Fünftupel, 124
- Fußpunkt, 27, 175
- Geometrie  
 axiomatische —, 100  
 neutrale —, viii
- Gerade, 70, 109  
 in  $\mathbb{R}^2$ , 2  
 affine —, 43  
 auf der Boy-Fläche, 81  
 durch den Ursprung, 69  
 durch einen Vektor aufgespannte —,  
 69  
 hyperbolische —, x, 138, 151  
 imaginäre —, 166  
 projektive —, 3, 76  
 über den komplexen Zahlen, 142  
 unendlich ferne —, 73, 101
- Geradenschar, 62, 63
- glatt, 107  
 —er Punkt, 49, 57, 61, 106, 107
- Gleichung  
 für eine Boy-Fläche, 81  
 polynomiale —, 112  
 quadratische —, 103
- Grad, 52, 109
- Graph, 5, 8, 13, 71
- Grenzdrehung  
 hyperbolische —, 147
- Großkreis, 75, 151
- Gruppe  
 affine —, viii, 46, 74  
 der Automorphismen, 120  
 der hyperbolischen Transformationen,  
 142  
 euklidische —, vi  
 multiplikative — eines Körpers, 69  
 orthogonale —, viii, 37, 38, 53  
 projektive lineare —, 72  
 spezielle orthogonale —, 53
- Halbgerade, 18, 165
- Halbraum, 139, 165
- Hauptsatz  
 der affinen Geometrie, viii, 48  
 der projektiven Geometrie, ix, 82, 85,  
 122, 125
- Haus, 103
- Hesse, 49  
 —matrix, 49
- Hessenberg, 100  
 Satz von —, 100
- Hilbert, vii, 79
- Höhe, 27
- homogen, 48  
 —e Koordinaten, 70  
 —es Polynom  
 vom Grad  $d$ , 109  
 vom Grad zwei, 105  
 —es lineares Polynom, 106
- Homogenisierung, 113
- Homöomorphismus, 77
- Horizont, 66
- Hyperbel, 5, 6, 20, 21, 41, 57, 67, 114,  
 119  
 —ast, 20  
 —funktionen, x, 166  
 —kosinus, 13  
 —sinus, 13  
 in Standardform, 11, 41  
 Standard—, 5  
 Tangente an eine —, 26  
 Zylinder über einer —, 59
- hyperbolisch  
 —e Drehung, 146  
 —e Ebene, x, 149  
 —e Gerade, x, 138, 151

- als kürzeste Verbindung, 152
- e Grenzdrehung, 147
- e Maßzahl eines hyperbolischen Winkels, 165
- e Metrik, x
- e Paraboloidschale, 60
- e Spiegelung, x, 141
- e Transformation, 142
  - direkte ——, 146, 147
  - Gruppe der ——n, 142
  - indirekte ——, 146
  - e Translation, 147
- er Abstand, 156
- er Kreis, 159
- er Spiegel, 25, 26, 29
- er Winkel, 165
  - Maßzahl, 165
- es Dreieck, x, 166
- es Parallelenaxiom, viii, x
- Hypotenuse, 175
- imaginäre
  - Achse, 139
  - Gerade, 166
- Immersion, ix, 78, 79
- indirekte hyperbolische Transformation, 146
- induzierte Topologie, 75
- Innenwinkelsumme in einem hyperbolischen Dreieck, x, 171
- Invariante, 95
- Invarianz
  - der Abstandsfunktion unter hyperbolischen Transformationen, 153, 155
  - des Doppelverhältnisses unter projektiven Transformationen, 97, 103
- Inversion
  - am Einheitskreis, 134
  - an einem Kreis, x, 133
- Isometrie, 4, 22, 31, 54, 152, 161
  - n sind hyperbolische Transformationen, 161
- Isomorphismus zwischen affinen Räumen, 44
- Isotropiegruppe, 148
- Jacobi-Matrix, 153, 154
- Karte, 78
- Kartoffelchip, 64
- Kathedrale, 59
- Kegel, viii, 3, 48, 49, 60, 61
  - schnitt, viii, 3–5
    - Familien von —en, 20
  - affiner —, 70, 106
- Kettenregel, 153
- Klein, vi
- Kobe Port Tower, 63
- kollinear, 96, 100, 101, 104
- kompakt, 75–77
- Kompaktifizierung, ix, 76
- komplex
  - e Exponentialfunktion, 138
  - e Konjugation, 145, 155
  - e Zahl, 61, 132
    - konjugiert ——, 132
  - wertige Funktion, 154
  - differenzierbar, 154
- kongruent, vi, x, 40, 175
- Kongruenz, vi, 7, 40
  - klasse, 41
  - satz, vii
  - euklidische —, 57
  - von hyperbolischen Dreiecken, 175
- Konik, viii, 6, 57, 105
  - glatte —, 127
- konjugiert komplexe Zahl, 132
- Konvergenz, 116
- Koordinaten
  - homogene —, 70
  - Kugel—, 81
- Körper
  - automorphismus, ix, 85, 132
  - algebraisch abgeschlossener —, 109
  - der komplexen Zahlen, 132
  - multiplikative Gruppe eines —s, 69
- Kosinussatz, 167, 175
- Kreis, v, 6, 9, 18, 114
  - hyperbolischer —, 159
  - Inversion an einem —, 133
  - Tangente an einen —, 18
- Kreuzung, 103
- kubische Kurve, 127
- Kugelkoordinaten, 81

- 
- Kühlurm, 59  
 Kurve  
     kubische —, 127  
     seltsame —, 127  
  
 Lage  
     allgemeine —, 124, 125, 127  
  
 Länge  
     einer Kurve, 151  
     euklidische —, 104  
  
 Leibniz, 110  
     —formel, 110, 124  
  
 Leitlinie, 6, 8, 11, 16, 19, 20, 27, 58  
  
 Lemma  
     von Descartes, 112  
  
 linear  
     —er Teilraum, 50  
     —er Unterraum, 70  
     —es Polynom, 48  
  
 Linearsystem von Quadriken, 123  
  
 Linkswirkung, 42, 43, 69, 72, 73, 110  
  
 Lobatschewski, viii  
  
 Lot, 2, 6, 17, 27, 165, 166, 171, 175  
  
 Lotterie, 71  
  
 Luftaufnahme, ix  
  
 Mae West, 63  
  
 Maehara, 77  
  
 Mannigfaltigkeit  
     abstrakte —, 77  
  
 Matrix  
     orthogonale —, 54  
     symmetrische —, 38, 53, 108  
  
 Menge  
     algebraische —, 52  
     semialgebraische —, 112  
  
 Meridian, 77, 79  
  
 Metrik  
     triviale —, 165  
     metrischer Raum, 34  
  
 Mittelpunkt, 158, 159, 161  
  
 Möbius, 76  
     —band, 76, 78  
     —transformation, 143  
  
 München, 63  
  
 neutrale Geometrie, viii  
  
 nicht orientierbar, ix, 77  
  
 Niemeyer, 59  
  
 Nierenstein, 30  
  
 Nordpol, 81  
  
 Norm  
     euklidische —, 1, 32  
  
 normale Untergruppe, ix, 40, 72  
  
 Normalform einer Quadrik, 55  
  
 Nullmenge, 125  
  
 Nullpolynom, 50, 110  
  
 Nullstelle  
     Anzahl der negativen —n, 111, 112  
     Anzahl der positiven —n, 111, 112  
  
 Nullstellenmenge, 110  
  
 offen, 114  
  
 orientierbar, 78  
     nicht —, ix, 77  
  
 Orientierung, 146  
  
 orthogonal, 138  
     —e Gruppe, viii, 37, 38, 53  
     —e Kreise, 145  
     —e Matrix, 54  
  
 Orthonormalbasis, 36, 38, 56  
  
 Pappos  
     dualer Satz von —, 101  
     Satz von —, 100, 101, 127  
     von Alexandria, 100  
  
 Parabel, 4, 6, 19, 21, 29, 40, 57, 67, 113  
     in Standardform, 23, 41  
     Standardform einer —, 6  
     Tangente an eine —, 24, 25  
     Zylinder über einer —, 60  
  
 Parabol  
     —antenne, 22  
     —scheinwerfer, 22  
     —spiegel, 24, 29  
         Reflexion an einem —, 24  
  
 Paraboloidschale  
     hyperbolische —, 60  
  
 parallel, viii, 20, 66, 139, 142  
     —e Ebenen, 58  
     —e Geraden, 57  
  
 Parallelenaxiom, viii, 140  
     hyperbolisches —, viii, x  
  
 Parallelenschar, 32

- Parameterraum, 108, 124
- Parametrisierung
  - einer Boy-Fläche, 80
  - einer Ellipse, 10, 29
  - einer hyperbolischen Paraboloidschale, 64
  - einer Parabel, 8
  - eines einschaligen Rotationshyperboloids, 62, 64
  - eines Hyperbelasts, 14, 25
  - eines Kegels, 21
- partielle Ableitung, 49, 57
- Pascal, 127
  - Satz von —, 127
- Permutation, 111
  - smatrix, 54, 55
- perspektivische Abbildung, 66, 68, 93
- Poincaré, x, 129
- Polynom, 52
  - charakteristisches —, 111, 112
  - homogenes —
    - vom Grad  $d$ , 109
    - vom Grad zwei, 105
  - homogenes lineares —, 106
  - lineares —, 48
  - vom Grad zwei, 48, 61
- polynomiale
  - Gleichung, 112
  - Ungleichung, 112
- Produkt
  - semidirektes —, viii, 40, 46
- Produkttopologie, 124
- Projektion, 68, 70
- Projektionsabbildung, 149
- projektiv
  - e Äquivalenz, ix, 95
  - e Ebene, 73
  - e Gerade, 3, 76
    - über den komplexen Zahlen, 142
  - e lineare Gruppe, 72
  - er Abschluss, 94, 113
    - ist gleich topologischer Abschluss, 116
  - er Raum, ix, 69, 70
  - äquivalent, 73
- Punkt
- glatter —, 49, 57, 61, 106, 107
- singulärer —, 49, 106, 107, 109
- Pythagoras, 131
- quadratische Gleichung, 103
- Quadrik, ix, 48, 105
  - Linearsystem von —en, 123
  - Normalform einer —, 55
  - über den komplexen Zahlen, 61
- Querschnitt, 15
- Quotient
  - enabbildung, 94
  - engruppe, ix, 72
  - entopologie, 75, 115
- Radius, 159
- Raum
  - affiner —, 2, 42
  - Dimension, 42
  - eines Vektorraums, 42
  - metrischer —, 34
  - projektiver —, ix, 69, 70
- Realteil, 132
- Reflexion an einem Parabolspiegel, 24
- Regelfläche, 61
- Richtungsvektor, 2, 17, 101, 104
- Rotationshyperboloid, x, 149
  - einschaliges —, 59, 61, 120
  - zweischaliges —, 59, 120
- Rotationsparaboloid, 22, 60, 61
- Rotationssymmetrie, 62, 120
- rotationssymmetrisch, 59
- Saccheri, viii
- Satz
  - Kosinus—, 167, 175
  - Sinus—, 26, 169
  - Spektral—, ix, 53, 105, 111
  - von Desargues, 68, 101
  - von Hessenberg, 100
  - von Pappos, 100, 101, 127
  - von Pascal, 127
  - von Pythagoras, 131, 139
    - für hyperbolische Dreiecke, 169–171
  - Scheitelwinkel, 130
  - Schnittpunkt, 71

- 
- Schnittwinkel, 17, 18, 20, 130, 136  
 Schuchow, 63  
 Selbstdurchdringung, 81  
 seltsame Kurve, 127  
 semialgebraische Menge, 112  
 semidirektes Produkt, viii, 40, 46  
 senkrecht, x, 2, 15, 17, 32, 41, 130, 166  
 Sesquilinearform, 148  
 singulärer Punkt, 49, 106, 107, 109  
 Sinussatz, 26, 169  
 Skalarprodukt, 35  
 Sonnenofen, 22  
 Spektralsatz, ix, 53, 55, 105, 111  
 spezielle orthogonale Gruppe, 53  
 Sphäre, 61, 74
  - danielinsche —, 16, 19, 20
  - zweidimensionale —, 58
 Spiegel
  - hyperbolischer —, 26
 Spiegelung, vi, 6, 7, 39, 41, 133
  - hyperbolische —, 141
 Spur, 23, 130, 136  
 Standard
  - form, 6
    - einer Ellipse, 8
    - einer Hyperbel, 11
  - hyperbel, 5
  - parabel, 22
  - skalarprodukt, 1, 35
 Standardform
  - Ellipse in —, 41
  - Hyperbel in —, 41
  - Parabel in —, 41
 Steigung, 18, 19, 40, 130  
 Strecke, 158  
 Streckung
  - zentrische —, vii, 134
 Stufenwinkel, 25  
 Surfer, 22, 81  
 Symmetriearchse, 6, 8, 13, 40, 41, 149  
 symmetrische Matrix, 38, 53, 108, 111  
 Tangens, 174  
 Tangente, 23, 130, 135, 165
  - an eine Ellipse, 29
  - an eine Hyperbel, 26
  - an eine Parabel, 24, 25
 an einen Kreis, 18  
 Tangentenvektoren, 78  
 Tangentialebene, 61  
 Tangentialraum, 23, 50, 64, 106, 107  
 Taylor, 49
  - entwicklung, 61
  - formel, 49
 Teilraumtopologie, 75, 77, 114  
 Teleskop, 28  
 Topologie, ix
  - euklidische —, 114
  - induzierte —, 75
  - Produkt—, 124
  - Teilraum—, 75, 77, 114
  - Zariski—, 125
 topologischer Abschluss ist gleich projektiver Abschluss, 116  
 totale Ableitung, 78  
 Transformation
  - affine —, 53
  - direkte hyperbolische —, 146, 147
  - indirekte hyperbolische —, 146
 Translation, vi, 3, 7, 31, 32, 39, 40, 44, 107
  - hyperbolische —, 147
 Transposition, 38, 54  
 triviale Metrik, 165  
 ultraparallel, 139, 142  
 unendlich fern, 104
  - —e Gerade, 73, 75, 101
  - —er Punkt, 67
 Ungleichung
  - polynomiale —, 112
 untere Halbebene, 139  
 Untergruppe
  - der direkten hyperbolischen Transformationen, 147
  - normale —, ix, 40, 72
 Untermannigfaltigkeit, 23, 50, 77  
 Unterraum
  - affiner —, 2, 43
  - linearer —, 70
 Ursprung, 42  
 Usbekistan, 63  
 Variation, 111

- Vektorraum, 42
  - euklidischer —, 36, 37
- Verbindungsgerade, 161
- Verbindungsstrecke, 119
- Vereinigung zweier Ebenen, 60
- Veronese, 120
  - Einbettung, 120
- verschlungen, 77
- Viereck, ix, 82, 91, 125
- Vorzeichenwechsel, 111
- Wasserturm, 63
- wilder Automorphismus, 89
- Winkel
  - hyperbolischer —, 165
  - Maßzahl, 165
- Wurzelfunktion, 132
- zahme Einbettung, 77
- Zariski, 125
  - Topologie, 125
- Zeichenebene, 65
- Zentralkollineation, ix, 90, 98–100
  - projektive Transformationen als Verknüpfung dreier —en, 91
- zentrische Streckung, vii, 134
- Zentrum, ix, 91, 94, 95, 98–100
  - der allgemeinen linearen Gruppe, 72
  - zweidimensional, 43, 70, 71, 73, 95, 101, 128
  - e Sphäre, 58, 74
- zweischaliges Rotationshyperboloid, 59, 120
- zwischen, 158
- Zwischenrelation, 163
- Zylinder, 57, 61
  - über dem Einheitskreis, 58
  - über einer Hyperbel, 59
  - über einer Parabel, 60