Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 9

Abgabe: Bis Montag, den 21.6.2021, 14 Uhr.

Aufgabe 1 (Eigenschaften des Matrixprodukts; 2+2+3+3 Punkte).
Es seien K ein Körper, $l,m,n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,l\\ j=1,\dots,m}} \in \mathrm{Mat}(l,m;K)$, $B = (b_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m\\ k=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}(m,n;K)$ und $A \cdot B = (c_{ik})_{\substack{i=1,\dots,l\\ k=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}(l,n;K)$ mit

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}, \quad i = 1,\dots,l,\ k = 1,\dots,n.$$

Benutzen Sie diese Formel, um die folgenden Regeln für das Matrixprodukt zu überprüfen. Für alle $l,m,n,p \in \mathbb{N}$, alle $A,A' \in \mathrm{Mat}(l,m;K)$, alle $B,B' \in \mathrm{Mat}(m,n;K)$, alle $C \in \mathrm{Mat}(n,p;K)$ und alle $\lambda \in K$ gilt:

1. $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$,
2. $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$,
3. $A \cdot (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B)$ und
4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Aufgabe 2 (Faktorisierung in Elementarmatrizen; 5+5 Punkte).
a) Bestimmen Sie Elementarmatrizen $B_1,\dots,B_s \in \mathrm{Mat}(4;\mathbb{Q})$ und $C_1,\dots,C_t \in \mathrm{Mat}(5;\mathbb{Q})$, für die

$$B_1 \cdot \dots \cdot B_s \cdot A \cdot C_1 \cdot \dots \cdot C_t = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{\mathrm{Rg}(A)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

gilt. Dabei sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 7 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -3 & -6 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 2 & -1 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, bestimmen Sie A^{-1}, und schreiben Sie A als Produkt von Elementarmatrizen.

Aufgabe 3 (Darstellungsmatrizen; 4+6 Punkte).

Es sei $K := \mathbb{F}_5$. Wir definieren

$$b_1 := \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{-1} \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{-1} \\ \overline{-3} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} \overline{-1} \\ \overline{-1} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_4 := \begin{pmatrix} \overline{3} \\ \overline{8} \\ \overline{12} \\ \overline{-10} \end{pmatrix}$$

sowie

$$c_1 := \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{-1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \quad c_2 := \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c_3 := \begin{pmatrix} \overline{-2} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}.$$

a) Schreiben Sie die Vektoren $b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2$ und c_3 mit Einträgen der Form $\overline{a}$, $0 \le a < 5$, und zeigen Sie, dass $B = \{ b_1, b_2, b_3, b_4 \}$ und $C = \{ c_1, c_2, c_3 \}$ durchnummerierte Basen für K^4 bzw. K^3 sind.

b) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $M^B_C(f_A)$. Schreiben Sie die Koeffizienten dabei wieder in der Form $\overline{a}$, $0 \le a < 5$.

Aufgabe 4 (Dualräume; 2+2+2+2+2 Punkte).

Es sei V ein nicht notwendigerweise endlichdimensionaler K-Vektorraum. Wir definieren

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon V & \longrightarrow & V^{\vee\vee} \\ v & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \varphi_v\colon V^{\vee} & \longrightarrow & K \\ l & \longmapsto & l(v) \end{array} \end{array}.$$

a) Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung ist.

b) Beweisen Sie, dass Φ ein Isomorphismus ist, falls V endlichdimensional ist.

c) Es sei $V := \mathrm{Abb}'(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Weisen Sie nach, dass es genau einen linearen Isomorphismus

$$\Psi\colon \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \longrightarrow V^{\vee}$$

gibt, so dass

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \ \Psi\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)(e_i) = a_i.$$

Dabei ist e_i wie in der Vorlesung definiert (s. Skript, Beispiel III.3.3, v), $i \in \mathbb{N}$.

d) In den Bezeichnungen von c) sei weiter $f = (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge mit $f_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $F := \{f\} \cup \{ e_i \,|\, i \in \mathbb{N} \}$ linear unabhängig ist.

e) Nehmen Sie an, es gebe eine Basis B, die die Teilmenge F aus Teil d) enthält. Schließen Sie, dass unter dieser Voraussetzung die Abbildung Φ für den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}'(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ injektiv aber nicht surjektiv ist.