Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 8

Abgabe: Bis Montag, den 14.6.2021, 14 Uhr.

Aufgabe 1 (Einheiten in einem Ring; 3+5 Punkte).
Es sei $(R,+,\cdot)$ ein nicht notwendigerweise kommutativer Ring. Ein Element $r \in R$ ist eine *Einheit*, wenn es ein Element $s \in R$ mit

$$r \cdot s = 1 = s \cdot r$$

gibt. Wir definieren

$$R^\star := \left\{\, r \in R \,|\, r \text{ ist eine Einheit} \,\right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\forall r,s \in R^\star : \quad r \cdot s \in R^\star.$$

b) Nach Teil a) ist die Multiplikation

$$\begin{array}{rcl} \cdot\colon R^\star \times R^\star & \longrightarrow & R^\star \\ (r,s) & \longmapsto & r \cdot s \end{array}$$

definiert. Überprüfen Sie, dass $(R^\star,\cdot)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2 (Lineare Teilräume als Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme; 10+7 Punkte).
a) Es seien $n \geq 1$, $v_1,\ldots,v_s \in K^n$ und $U := \langle v_1,\ldots,v_s \rangle \subset K^n$. Entwickeln Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Vorlesung einen Algorithmus zum Auffinden einer $(m \times n)$-Matrix A, für die $\mathbb{L}(A,0) = U$ gilt. Hierbei ist $m = n - \dim_K(U)$.
Hinweis. Geben Sie zunächst ein Verfahren an, dass aus den Vektoren $v_1,\ldots,v_s$ eine Basis für U auswählt.
b) Bestimmen Sie mit dem Verfahren aus a) eine Matrix A mit

$$\mathbb{L}(A,0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \\ -4 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1 \\ 13,5 \\ 2 \\ 23,5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Aufgabe 3 (Lineare Komplemente, Darstellungsmatrizen; 9+6 Punkte).
Es sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis für U und ein lineares Komplement V zu U.
b) Es seien B die Basis für U, die Sie in Teil a) bestimmt haben, und $C = \{c_1, c_2\}$ die Basis für $\mathbb{R}^2$ mit

$$c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_C^B(f)$ für die lineare Abbdildung

$$\begin{aligned} f\colon U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$