Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 7

Abgabe: Bis Montag, den 7.6.2021, 14 Uhr.

Aufgabe 1 (Zum Austauschsatz von Steinitz; 5+5+5 Punkte).
a) Für welche Primzahlen p ist $B = \{ b_1, b_2, b_3 \}$ mit

$$b_1 := \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{0} \\ \overline{3} \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} \overline{4} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \end{pmatrix}$$

eine Basis für $(\mathbb{F}_p)^3$?
b) Für welche Primzahlen p sind die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{3} \\ \overline{2} \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} \overline{3} \\ \overline{1} \\ \overline{3} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in $(\mathbb{F}_p)^3$?
c) Wählen Sie eine Primzahl p, für die $B = \{ b_1, b_2, b_3 \}$ eine Basis für $(\mathbb{F}_p)^3$ ist und $F = \{ v_1, v_2 \}$ eine linear unabhängige Teilmenge. Wenden Sie das Verfahren aus dem Beweis des Austauschsatzes von Steinitz auf B und F an, um eine Basis $\widetilde{B}$ von $(\mathbb{F}_p)^3$ zu konstruieren, die F enthält.

Aufgabe 2 (Lineare Abbildungen und Isomorphismen; 3+4+4+4 Punkte).
a) Es seien M eine Menge, K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Verallgemeinern[1] Sie die Konstruktion der K-Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Abb}(M, K)$ aus der Vorlesung, um auf $\mathrm{Abb}(M, V)$ die Struktur eines K-Vektorraums einzuführen.
b) Es seien M eine Menge, K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Die Menge $\mathrm{Abb}(M, V)$ trage die K-Vektorraumstruktur aus Teil a). Zeigen Sie, dass für $x \in M$

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x\colon \mathrm{Abb}(M, V) &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

---

[1] Gesucht sind also eine Addition „+“ und eine Skalarmultiplikation „·“ auf $\mathrm{Abb}(M, V)$, so dass

- $(\mathrm{Abb}(M, V), +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist,
- sich im Spezialfall $V = K$ die Konstruktion aus der Vorlesung ergibt.

eine lineare Abbildung ist. Man nennt ev_x die *Auswertungsabbildung* in x.
c) Es seien M, N Mengen, K ein Körper und V, W K-Vektorräume. Ferner seien eine Abbildung $\varphi\colon M \longrightarrow N$ und eine lineare Abbildung $\psi\colon V \longrightarrow W$ gegeben. Zeigen Sie, dass es sich bei den Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \varphi^\star\colon \mathrm{Abb}(N,V) & \longrightarrow & \mathrm{Abb}(M,V) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \psi_\star\colon \mathrm{Abb}(M,V) & \longrightarrow & \mathrm{Abb}(M,W) \\ f & \longmapsto & \psi \circ f \end{array}$$

um lineare Abbildungen handelt. Dabei wird auf $\mathrm{Abb}(M,V)$, $\mathrm{Abb}(N,V)$, $\mathrm{Abb}(M,W)$ und $\mathrm{Abb}(N,W)$ die K-Vektorraumstruktur aus Teil a) verwendet.
d) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Benutzen Sie eine lineare Abbildung vom Typ $\varphi^\star$ aus Teil c), um einen linearen Isomorphismus zwischen den Vektorräumen $\mathrm{Mat}(m,n;K)$ und $K^{m \cdot n}$ herzustellen

Aufgabe 3 (Kern, Bild und Kokern; 10 Punkte).
Die lineare Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ werde durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

definiert. Geben Sie Basen für die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathrm{Ker}(f_A)$, $\mathrm{Bild}(f_A)$ und $\mathrm{Koker}(f_A) := \mathbb{R}^4/\mathrm{Bild}(f_A)$ an.