Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 6

Abgabe: Bis Montag, den 31.5.2021, 14 Uhr.

Aufgabe 1 (Linear unabhängige Teilmengen und Dimension; 6+4 Punkte).
a) Stellen Sie fest,[1] ob die Mengen, die aus den aufgelisteten Vektoren in $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$ bestehen, linear unabhängig sind.

i) $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$

ii) $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$

b) Bestimmen Sie[2] die Dimension der linearen Hülle der folgenden Zeilenvektoren

$$v_1 := (1,-3,7,-1),\ v_2 := (2,0,-4,3),\ v_3 := (2,6,-22,8) \text{ und } v_4 := (3,3,-15,7)$$

in $\mathrm{Z}\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2 (Basen von Unterräumen; 4+6 Punkte).
Es seien e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^4$,

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0 \right\}$$

und

$$W := \langle e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_2 - e_3 + e_4 \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

a) Überprüfen Sie,[3] dass U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^4$ ist, und geben Sie eine Basis für U an.[4]
b) Bestimmen Sie eine Basis des linearen Teilraums $U \cap W$ von $\mathbb{R}^4$.

---

[1] Für jede der beiden Mengen sollen Sie also die Frage beantworten, ob die Menge linear unabhängig ist oder nicht, und die Schritte, die Sie zu Ihrer Antwort geführt haben, ausführlich darstellen.

[2] In Ihrer Lösung sollen Sie die gesuchte Dimension angeben und ausführlich erklären, wie Sie zu Ihrem Ergebnis gelangt sind.

[3] Es soll gezeigt werden, dass U ein linearer Teilraum ist.

[4] Sie müssen eine Basis von $U \cap W$ hinschreiben und beweisen, dass es sich tatsächlich um eine Basis handelt.

Aufgabe 3 (Lineare Abbildungen; 10 Punkte).
Es seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vektoren des $\mathbb{R}^4$. Gibt es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, so dass

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 4 (Kern und Urbilder bei linearen Abbildungen, 5+3+2 Punkte).
Es seien $K := \mathbb{F}_7$ der Körper mit sieben Elementen und $f_A\colon K^3 \longrightarrow K^3$ die lineare Abbildung zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{-2} & \overline{-1} & \overline{-1} \\ \overline{2} & \overline{-1} & \overline{6} \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichne das Symbol $\overline{k}$ für eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ ihre Äquivalenzklasse modulo 7. Weiter sei

$$\begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{7} \end{pmatrix} \in K^3.$$

a) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(f_A)$.
b) Geben Sie $f_A^{-1}(v)$ an.
c) Beschreiben Sie $f_A^{-1}(\langle v \rangle)$.
Anmerkung. In allen Aufgabenteilen müssen Sie die entsprechende Menge in der üblichen Notation für Mengen darstellen. Sie müssen sich überlegen, wie Sie die jeweilige Menge mit Hilfe der linearen Struktur von K^3 am besten beschreiben. Wie üblich muss dokumentiert werden, wie Sie Ihr Ergebnis erzielt haben.