Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 5

Abgabe: Bis Dienstag, den 25.5.2021, 12Uhr.

Aufgabe 1 (Eine Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen; 10 Punkte).
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ mit

$$\begin{array}{rcl} +\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} s+u \\ t+v \end{pmatrix} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \cdot\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} su-tv \\ sv+tu \end{pmatrix} \end{array}$$

ein Körper ist. Es sei $\mathbb{1}$ das Neutralelement der Multiplikation. Zeigen Sie, dass es ein Element i gibt mit $i^2 = -\mathbb{1}$. Man nennt den eben erhaltenen Körper den *Körper der komplexen Zahlen* und bezeichnet ihn mit $\mathbb{C}$. Man schreibt

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s + i \cdot t.$$

Aufgabe 2 (Die direkte Summe von Vektorräumen; 10 Punkte).
Gegeben seien zwei K-Vektorräume V und W. Wir definieren folgende Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \cdot\colon K \times (V \times W) & \longrightarrow & V \times W \\ \big(\lambda, (v,w)\big) & \longmapsto & (\lambda v, \lambda w) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} +\colon (V \times W) \times (V \times W) & \longrightarrow & V \times W \\ \big((v,w),(v',w')\big) & \longmapsto & (v+v', w+w'). \end{array}$$

Überprüfen Sie, dass durch diese Abbildungen auf $V \times W$ die Stuktur eines K-Vektorraums eingeführt wird. Der so erhaltene Vektorraum heißt die *direkte Summe von V und W* und wird mit $V \oplus W$ bezeichnet.
Wie hängt dieser Begriff der direkten Summe mit dem, der in der Vorlesung aufgetreten ist, zusammen?

Aufgabe 3 (Vereinigungen von linearen Teilräumen; 5+5 Punkte).
a) Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $W, W' \subseteq V$ zwei lineare Unterräume von V. Zeigen Sie, dass $W \cup W'$ genau dann ein linearer Unterraum von V ist, wenn $W \subseteq W'$ oder $W' \subseteq W$ gilt.
b) Es sei K ein Körper mit nur endlich vielen Elementen (z.B. $\mathbb{F}_2$). Zeigen Sie, dass K^n für jedes $n \geq 2$ Vereinigung von endlich vielen echten Teilräumen ist. (Dabei heißt „echt", dass der entsprechende Teilraum nicht ganz K^n ist.) Erläutern Sie, warum für einen Körper mit unendlich vielen Elementen K^2 nicht die Vereinigung von endlich vielen echten Teilräumen sein kann.

Aufgabe 4 (Die lineare Hülle; 2+4+4+2 Punkte).
Es seien V ein K-Vektorraum und M, M' Teilmengen von V. Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften der linearen Hülle.

a) $\langle M \rangle$ ist ein linearer Teilraum von V, der M enthält.

b) Ein linearer Unterraum $U \subseteq V$, der M enthält, enthält auch die lineare Hülle $\langle M \rangle$. (Somit ist $\langle M \rangle$ der „kleinste" lineare Teilraum von V, der M enthält.)

c) Es gilt
$$\langle M \rangle = \bigcap_{\substack{U \subseteq V \text{ UR:} \\ M \subseteq U}} U.$$

d) Gilt $M \subseteq M'$, dann gilt auch $\langle M \rangle \subseteq \langle M' \rangle$.