Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Montag, den 17.5.2021, 14 Uhr.

Aufgabe 1 (Eine neue Multiplikation auf $\mathbb{R}$; 5+5 Punkte).
Auf $\mathbb{R}$ wird folgende Verknüpfung definiert:

$$\begin{aligned} \star\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto a\cdot b+a+b. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\star$ das Assoziativgesetz erfüllt und es ein neutrales Element gibt.
b) Welche Elemente in $\mathbb{R}$ besitzen bzgl. $\star$ keine Inversen? Geben Sie die kleinste Teilmenge $N\subset\mathbb{R}$ an, für die $(\mathbb{R}\setminus N,\star)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2 (Ringe und Körper; 7+3 Punkte).
Es seien R, S Mengen und $\underset{R}{+}\colon R\times R\longrightarrow R$, $\underset{R}{\cdot}\colon R\times R\longrightarrow R$, $\underset{S}{+}\colon S\times S\longrightarrow S$, $\underset{S}{\cdot}\colon S\times S\longrightarrow S$ Abbildungen. Damit werden

$$\begin{aligned} +\colon (R\times S)\times(R\times S) &\longrightarrow R\times S \\ \big((r_1,s_1),(r_2,s_2)\big) &\longmapsto (r_1\underset{R}{+}r_2, s_1\underset{S}{+}s_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot\colon (R\times S)\times(R\times S) &\longrightarrow R\times S \\ \big((r_1,s_1),(r_2,s_2)\big) &\longmapsto (r_1\underset{R}{\cdot}r_2, s_1\underset{S}{\cdot}s_2) \end{aligned}$$

definiert.
a) Es seien R und S mit den gegebenen Abbildungen Ringe. Zeigen Sie, dass dann auch $R\times S$ mit den oben definierten Abbildungen ein Ring ist. Weisen Sie ferner nach, dass $R\times S$ genau dann kommutativ ist, wenn R und S es sind.
b) Es seien R und S Körper. Unter welchen Voraussetzungen ist $R\times S$ ein Körper?

Aufgabe 3 (Äquivalenzrelationen I; 5+5 Punkte).
Stellen Sie fest, welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation für die folgenden Relationen gelten. Denken Sie daran, Ihre Antworten mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel zu begründen.

a) $\forall k,l\in\mathbb{Z} : k\sim l :\Longleftrightarrow k+l$ ist gerade.

b) $\forall m,n \in \mathbb{N} : m \sim n :\Longleftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{N} : a \geq 1 \wedge b \geq 1 \wedge n = a \cdot m^b$.

Aufgabe 4 (Äquivalenzrelationen II; 10 Punkte).
Es seien A eine Menge und „$\sim$“ eine Relation auf A. Beweisen Sie, dass „$\sim$“ genau dann eine Äquivalenzrelation ist, wenn es eine Menge B und eine Abbildung $f\colon A \longrightarrow B$ gibt, so dass

$$\forall a,b \in A : \quad a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) = f(b).$$

Erläuterung. Eine *Relation* auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subset A \times A$. Für $a,b \in A$ schreibt man $a \sim b$ oder aRb, wenn $(a,b) \in R$.