Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 3

Abgabe: Bis Montag, den 10.5.2021, 14 Uhr.

Aufgabe 1 (Aussagenlogik; 2+4+4 Punkte).
a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $T_n := \{\, q \in \mathbb{N} \,|\, q \text{ ist Teiler von } n \,\}$ die *Teilermenge von n*.
(Eine natürliche Zahl q ist Teiler der natürlichen Zahl n, wenn ein $p \in \mathbb{N}$ mit $n = p \cdot q$ existiert.)
Bestimmen Sie T_{84}.
b) Ist die Aussage

$$9 \in T_{39} \cap T_{81} \text{ oder } 7 \in T_{12} \cup T_{56}$$

wahr?
c) Ist die Aussage

$$-2 \in \left\{\, x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 < 2 \,\right\}$$

wahr?
(Die Antworten sind jeweils zu begründen.)

Aufgabe 2 (Mengenalgebra; 3+4+3 Punkte).
a) Es seien $A, B \subset C$ Mengen. Zeigen Sie die *de Morganschen Regeln*

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\ C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Illustrieren Sie die Gleichungen mit einem Bild.
b) Es seien A und B Mengen. Überprüfen Sie die Gleichung

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Man nennt

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

die *symmetrische Mengendifferenz*.
Skizzieren Sie die symmetrische Mengendifferenz in einem Bild.
Welcher Aussage in der Logik entspricht die symmetrische Mengendifferenz?
c) Es seien A und B Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

$$\begin{aligned} \text{i)} &\quad A \subset B, \\ \text{ii)} &\quad A \cap B = A, \\ \text{iii)} &\quad A \cup B = B. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Verknüpfungen von Abbildungen; 10 Punkte).
Es seien $f: A \longrightarrow B$ und $g: B \longrightarrow C$ Abbildungen zwischen Mengen. Welche der folgenden Aussagen über die Verknüpfung $g \circ f$ sind wahr, welche falsch? Ihre Antwort ist jeweils durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel zu begründen.

i) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

ii) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

ii) Wenn f injektiv ist, dann ist $g \circ f$ injektiv.

iv) Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist f oder g bijektiv.

Aufgabe 4 (Abelsche Gruppen; 5+5 Punkte).
a) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Beweisen Sie

$$\prod_{g \in G} g^2 = e.$$

Dabei stehe e für das Neutralelement von G und $g^2 := g \cdot g$, $g \in G$. Schließlich bedeutet „$\prod_{g \in G}$“, dass das Produkt über alle Elemente von G genommen wird. Da G endlich ist, können wir $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ schreiben und $\prod_{g \in G} g^2 := g_1^2 \cdot \cdots \cdot g_n^2$ setzen. Da G abelsch ist, hängt das Ergebnis nicht davon ab, wie die Elemente von G nummeriert wurden. In einer nichtabelschen Gruppe wäre diese Definition nicht sinnvoll, ebenso nicht in einer unendlichen Gruppe (warum?).
b) Es sei G eine (möglicherweise unendliche) Gruppe mit Neutralelement e, so dass $g^2 = g \cdot g = e$ für jedes Element $g \in G$ gilt. Weisen Sie nach, dass G abelsch ist.