Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 2

Abgabe: Bis Montag, den 3.5.2021, 14 Uhr.

---

10 Punkte je Aufgabe.

Aufgabe 1.
a) Gegeben seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \in K^n$. Die *lineare Hülle von* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l$ ist gegeben als

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \rangle := \left\{ a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + a_l \cdot \mathbf{v}_l \,\middle|\, a_1, \ldots, a_l \in K \right\} \subseteq K^n.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \rangle$ ein linearer Unterraum von K^n ist.
b) Bestimmen Sie die linearen Unterräume von K^2.

Aufgabe 2.
Entwickeln Sie für Gleichungssysteme in drei Unbestimmten mit ein, zwei, oder drei Gleichungen eine geometrische Anschauung (vgl. Bemerkung I.1.5 im Skript). Fertigen Sie Skizzen für die Lösungsmengen der Gleichungssysteme an, die aus einer, zwei oder allen drei der folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\cdot y & - & z & = & 0 \\ 6\cdot x & - & 3\cdot y & - & z & = & 0 \\ 2\cdot x & + & y & - & z & = & 6 \end{array}$$

bestehen, an.

Aufgabe 3.
a) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$.

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x_2 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}, \qquad \text{(ii)} \quad \begin{array}{rcrcl} x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ x_1 & + & x_3 & = & 0 \end{array},$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & \frac{5}{2}x_2 & - & 2x_3 & = & \frac{5}{2} \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}.$$

b) Es seien

$$\text{(i)} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{(ii)}\quad A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{L}(A,\mathbf{0})$ und $\mathbb{L}(A,\mathbf{b})$ in den angegebenen Fällen und schreiben Sie $\mathbb{L}(A,\mathbf{b}) = \mathbf{s}^0 + \mathbb{L}(A,\mathbf{0})$ für geeignetes $\mathbf{s}^0 \in \mathbb{L}(A,\mathbf{b})$.

c) Gegeben seien folgende 3-Tupel im $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie reelle Zahlen s_1, s_2 und s_3 mit

$$s_1 \cdot \mathbf{v}_1 + s_2 \cdot \mathbf{v}_2 + s_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{b}.$$

Aufgabe 4.

In einem Elektronikgeschäft werden Bauteile E_1, E_2 und E_3 gemischt in Beuteln B_1, B_2 und B_3 angeboten. Die folgende Tabelle gibt an, wieviele Bauteile vom Typ E_i sich im Beutel B_j befinden, $i, j = 1,2,3$:

	B_1	B_2	B_3
E_1	12	20	30
E_2	6	10	25
E_3	24	60	50

Es werden 970 Bauelemente vom Typ E_1, 635 vom Typ E_2 und 2190 vom Typ E_3 eingekauft. Wieviele Beutel vom Typ B_j kann das Geschäft anbieten, $j = 1,2,3$?
Lässt sich für beliebige Mischungen und beliebige Anzahlen eingekaufter Elemente immer eine mathematische bzw. praxisrelevante Lösung finden? Versuchen Sie, Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispielen zu begründen.