# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

## Übungsblatt 12 - Bonuszettel

Abgabe: Bis Montag, den 12.7.2021, 14 Uhr.

---

Aufgabe 1 (Die Spur einer Matrix; 8 Bonuspunkte).
In der Vorlesung wurde die *Spur* einer Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots n}}$ als

$$\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

definiert. Zeigen Sie unter Verwendung der Formel für das Matrixprodukt, dass für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(n;K)$

$$\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$$

gilt.

Aufgabe 2 (Das charakteristische Polynom; 10 Bonuspunkte).
Berechnen Sie das charakteristische Polynom der komplexen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \\ -3 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

sowie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 3 (Euklidische Geometrie; 4+4+2 Bonuspunkte).
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{R}), \quad 0 \le \alpha < 2\pi.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$ und zeigen Sie, dass $A$ für jeden Wert $\alpha \in [0, 2\pi)$ diagonalisierbar ist.
b) Berechnen Sie die Eigenräume von $A$.
c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse geometrisch in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 (Eine diagonalisierbare Matrix; 4+4+4 Bonuspunkte).
Es sei

$$A := \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 15 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R}).$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$ und zerlegen Sie es in Linearfaktoren.
b) Zeigen Sie, dass $A$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.
c) Geben Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ an, so dass $S \cdot A \cdot S^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.