

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 11 - Letztes Blatt in der Wertung

Abgabe: Bis Montag, den 5.7.2021, 14 Uhr.

Aufgabe 1 (Berechnung von Determinanten; 5+5 Punkte).

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden über \mathbb{R} definierten Matrizen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 0 & -6 \\ -1 & 14 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & 12 & 1 & -12 \\ 2 & -21 & 0 & 19 \\ -11 & 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Determinanten und Dreiecksmatrizen; 6+4 Punkte).

Eine $(n \times n)$ -Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i > j$ nennt man *obere Dreiecksmatrix*. Eine obere Dreiecksmatrix hat also die Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Es wird behauptet, dass

$$\text{Det}(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

a) Beweisen Sie diese Behauptung mit Hilfe der Leibniz-Formel.

b) Beweisen Sie die Behauptung induktiv mit Hilfe einer geeigneten Laplace-Entwicklung.

Aufgabe 3 (Determinanten und der Gauß-Algorithmus; 10 Punkte).

Entwickeln Sie mit dem Gauß-Algorithmus eine Berechnungsmethode für Determinanten, und bestimmen Sie die Determinante der reellen Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 8 & 5 \\ -5 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ 10 & 12 & 9 & 4 & 1 \\ 10 & 8 & -3 & -2 & 3 \\ 35 & 8 & 18 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

mit diesem Verfahren.

Aufgabe 4 (Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten; 10 Punkte).

Beweisen Sie die folgende Aussage durch vollständige Induktion über n . Gegeben seien ein Vektorraum V und ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ sowie n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ von f mit Eigenvektoren $v_i \in V \setminus \{0\}$, i.e., $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$, $i = 1, \dots, n$. Dann ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V .