Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 10

Abgabe: Bis Montag, den 28.6.2021, 14 Uhr.

Aufgabe 1 (Duale Basen und Abbildungen; 4+6 Punkte).
Es sei K ein Körper.
a) Durch $B = ((1,0,0,0)^t, (1,1,0,0)^t, (1,1,1,0)^t, (1,1,1,1)^t)$ ist eine durchnummerierte Basis von K^4 gegeben. Bestimmen Sie die zu B duale Basis B^t von $\mathrm{Hom}_K(K^4, K)$.
b) Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume, $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und $f^t\colon W^\vee \longrightarrow V^\vee$ die zu f duale Abbildung. Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- Wenn f injektiv ist, dann ist auch f^t injektiv.
- Wenn f injektiv ist, dann ist f^t surjektiv.
- Wenn f surjektiv ist, dann ist auch f^t surjektiv.
- Wenn f surjektiv ist, dann ist f^t injektiv.

Ihre Antwort muss jeweils bewiesen oder mit einem Gegenbeispiel begründet werden.

Aufgabe 2 (Rechnen mit Permutationen; 5+5 Punkte).
a) Gegeben seien die Elemente

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

von S_7. Berechnen Sie σ_1^2, σ_2^2, $\sigma_1\sigma_2$ und $\sigma_2\sigma_1$.
b) Stellen Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 11 & 4 & 9 & 3 & 10 & 5 & 2 & 8 & 12 & 6 & 13 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Transpositionen dar.

Aufgabe 3 (Permutationen und Matrizen; 3+4+3 Punkte).
Es seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $B = (b_1, ..., b_n)$ eine durchnummerierte Basis für V. Zeigen Sie:

a) Zu jeder Permutation $\sigma \in S_n$ gibt es genau einen Automorphismus (=bijektiven Endomorphismus) $f_\sigma\colon V \longrightarrow V$ mit $f_\sigma(b_i) = b_{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, n$.
b) Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \varphi\colon S_n &\longrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ \sigma &\longmapsto f_\sigma \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.
c) Für $1 \leq i < j \leq n$ und die Transposition $\tau := \tau_{ij}$ von i und j gilt

$$M_B^B(f_\tau) = P_{ij}.$$

Aufgabe 4 (Determinanten; 5+5 Punkte).
a) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0{,}25 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2{,}5 & 4 \\ 0{,}5 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{14} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{7} & \overline{10} \\ \overline{8} & \overline{2} & \overline{4} \end{pmatrix}.$$

Dabei seien die ersten beiden Matrizen über $\mathbb{R}$ und die dritte über $\mathbb{F}_{17}$ definiert. Im letzten Fall ist das Ergebnis wieder in der Form $\overline{a}$ mit $0 \leq a < 17$ anzugeben.
b) Berechnen Sie die Determinanten der über $\mathbb{R}$ definierten Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 0 & -6 \\ -1 & 14 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & 12 & 1 & -12 \\ 2 & -21 & 0 & 19 \\ -11 & 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$