Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra I“

Sommersemester 2021

A. Schmitt

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Montag, den 26.4.2021, 14 Uhr.

---

10 Punkte je Aufgabe.

Aufgabe 1.
Es seien K ein Körper und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in K,$$

eine (2×2)-Matrix. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

1. $\delta(a,b,c,d) = 0$.
2. Es gibt eine Zahl $\lambda \in K$, so dass $c = \lambda \cdot a$ und $d = \lambda \cdot b$ oder $a = \lambda \cdot c$ und $b = \lambda \cdot d$.
3. Es gibt eine Zahl $\lambda \in K$, so dass $b = \lambda \cdot a$ und $d = \lambda \cdot c$ oder $a = \lambda \cdot b$ und $c = \lambda \cdot d$.

Was bedeutet die dritte Bedingung geometrisch für die 2-Tupel $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ in K^2?

Aufgabe 2.
Gegeben seien Elemente $\lambda, e, f \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das (2×2)-Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & (\lambda - 2) \cdot y & = & e \\ (2 - \lambda) \cdot x & + & y & = & f. \end{array}$$

Bestimmen Sie alle $\lambda \in K$, für die das Gleichungssystem **eindeutig** lösbar ist. Unter welchen Bedingungen an λ, e und f besitzt das Gleichungssystem keine Lösung bzw. eine Schar von Lösungen?

Aufgabe 3.
Überprüfen Sie mit dem Determinantenkriterium die Lösbarkeit der folgenden (2×2)-Gleichungssysteme und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\text{(i)} \begin{array}{rcrcr} 3 \cdot x & + & y & = & 7 \\ -6 \cdot x & + & 2 \cdot y & = & -14 \end{array}, \quad \text{(ii)} \begin{array}{rcrcr} 3 \cdot x & - & y & = & 7 \\ -6 \cdot x & + & 2 \cdot y & = & -14 \end{array},$$

$$\text{(iii)} \begin{array}{rcrcr} 3 \cdot x & - & y & = & 7 \\ -6 \cdot x & + & 2 \cdot y & = & 14 \end{array}.$$

Aufgabe 4.
In der Vorlesung wurde der Raum

$$K^n := \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \middle| s_1, \ldots, s_n \in K \right\}$$

der n-Tupel mit Einträgen aus dem Körper K erklärt. Ferner wurden für Elemente $a \in K$ und s, s' die Elemente $a \cdot s \in K^n$ und $s + s' \in K^n$ definiert. Zeigen Sie, dass für diese Operationen die folgenden Gesetze gelten.

1. $s + s' = s' + s$ für alle $s, s' \in K^n$ (*Kommutativgesetz*);
2. $\underline{0} + s = s$ für alle $s \in S$ (Null ist *Neutralelement*);
3. $s + (-s) = \underline{0}$ für alle $s \in K^n$, $-s := (-1) \cdot s$ ($-s$ ist das *inverse Element* zu s);
4. $s + (s' + s'') = (s + s') + s''$ für alle $s, s', s'' \in K^n$ (*Assoziativgesetz der Addition*);
5. $1 \cdot s = s$ für alle $s \in K^n$;
6. $(a + a') \cdot s = a \cdot s + a' \cdot s$ für alle $a, a' \in K$, $s \in K^n$ (*Erstes Distributivgesetz*);
7. $a \cdot (s + s') = a \cdot s + a \cdot s'$ für alle $a \in K$ $s, s' \in K^n$ (*Zweites Distributivgesetz*);
8. $(a \cdot a') \cdot s = a \cdot (a' \cdot s)$ für alle $a, a' \in K$, $s \in K^n$ (*Assoziativgesetz der Skalarmultiplikation*).