Wie beliebig ist die statistische Explikation psychologischer Kausalhypothesen?

Albrecht Iseler, Freie Universität Berlin

Vorstatistische psychologische Hypothese (VSPH):

Bei allen "units" des Geltungsbereichs (z.B. Personen, Personen in Situationen) ist unter Bedingung *b* ein (von der AV eines Experiments erfaßtes) interessierendes Merkmal *tendenziell ausgeprägter* als unter Bedingung *a*.

oder:

Bei allen units ... ist Bedingung *b tendenziell günstiger* für die Ausprägung des interessierenden Merkmals als Bedingung *a*.

Frage:

Wie sinnvoll und wie zwingend ist es, tendenzielle Merkmalsausprägungen der "units" aufgrund der Erwartungswerte numerischer Zufallsvariablen (also aufgrund von true scores) zu definieren und Kausalhypothesen in der Weise zu explizieren, daß solche Erwartungswerte sich unter den betrachteten Bedingungen in vorhersagbarer Richtung unterscheiden?

These:

Die Sprache der Erwartungswerte ist nicht nur um ihrer mathematischen Handlichkeit willen zur Explikation psychologischer Kausalhypothesen besonders geeignet. Sie wird auch einigen impliziten Bedeutungs-Komponenten eines für die Psychologie typischen Kausalitäts-Konzepts am ehesten gerecht. Allerdings stellen true scores nur unter *einer* - in manchen Fällen fragwürdigen - Interpretation dieses Konzepts die beste Sprache dar.

1 Relationen auf einer Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen als Sprache zur Explikation von Kausalhypothesen

Gemeinsamer Rahmen für denkbare Explikationen der VSPH:

W sei eine endliche Menge von Merkmalsausprägungen in einem empirischen Relativ (z.B. mögliche "Lösungsmuster") oder einem numerischen (mögliche Meßwerte, auch mehrdimensional)

Π sei die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\wp W$

$\preceq$ sei eine zweistellige Relation auf Π. Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P_1 und P_2 auf $\wp W$ bedeutet $P_1 \preceq P_2$: Bei P_1 ist die Tendenz zur Ausprägung des interessierenden Merkmals höchstens so groß wie bei P_2.

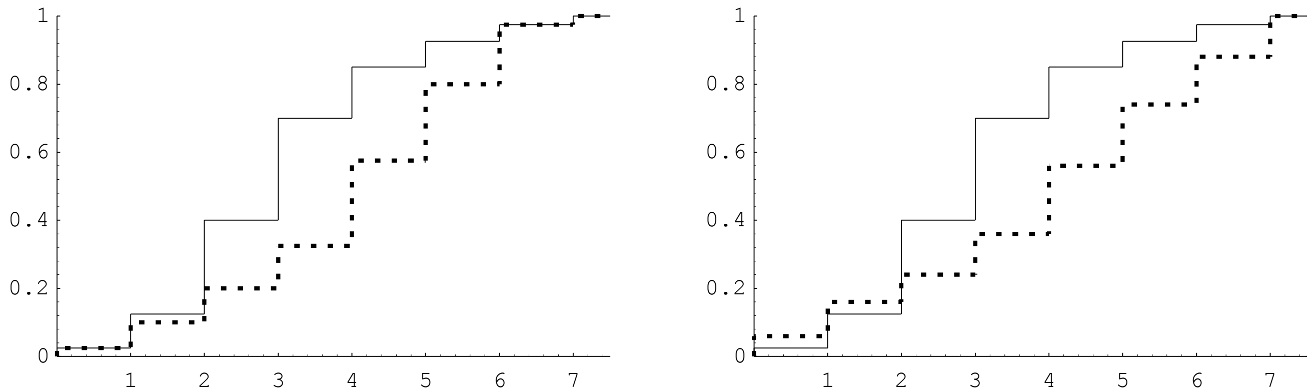
Die Individuen-bezogene Hypothese lautet jeweils $P_{ua} \prec P_{ub}$, d.h.: $P_{ua} \preceq P_{ub} \wedge \neg(P_{ub} \preceq P_{ua})$.

Mögliche Explikationen der Relation $\preceq$:

$P_1 \preceq P_2$ p.d. gdw. für Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 mit Verteilungen P_1 bzw. P_2 gilt:

Erwartungswert-Kriterium	$\mathcal{E}Y_1 \leq \mathcal{E}Y_2$
Median-Kriterium	$\mathrm{Med}(Y_1) \leq \mathrm{Med}(Y_2)$
U-Test-Kriterium	$P(Y_1 < Y_2) \geq P(Y_1 > Y_2)$, wenn Y_1 und Y_2 unabhängig
Stochastische Ordnung	Für jeden möglichen Meßwert x gilt $P_1(Y_1 \leq x) \geq P_2(Y_2 \leq x)$
"Lösungs"-Wahrscheinlichkeiten von Items:	Für jedes Item j gilt: P_1(j "richtig") $\leq P_2$(j "richtig")

2 Das extensionale Kriterium trennscharfer theoretischer Fälle



Zwei Verteilungspaare ohne und mit Ogiven-Überkreuzung.
In beiden Fällen ist

$\mu_1 = 3$ (durchgezogene Ogive)

$\mu_2 = 4$ (gepunktete Ogive)

Links liegt $P_1 \preceq P_2$ nahe. Rechts????

3 Bedeutungs-Postulate zu einem psychologischen Kausalitäts-Begriff

Erwägenswerte Postulate ("Axiome") für die Relation $P_1 \preceq P_2$:

1. $\preceq$ ist eine Quasiordnung (also reflexiv und transitiv).

2. $\preceq$ ist konnex.

3. $\preceq$ ist "konvex kürzbar",
   d.h.: Für alle Wahrscheinlichkeitsmaße P_1, P_2 und P_3 auf $\mathcal{P}W$ und jedes $\alpha \in\ ]0, 1[$ gilt
   $\alpha\, P_1 + (1-\alpha)\, P_3 \preceq \alpha\, P_2 + (1-\alpha)\, P_3 \;\Leftrightarrow\; P_1 \preceq P_2$.

4. $\preceq$ ist "vor-archimedisch",
   d.h.: Für alle Wahrscheinlichkeitsmaße P_1, P_2 und P_3 auf $\wp W$ ist die Menge
   $\{\alpha \in [0, 1]: P_1 \;\preceq\; \alpha\, P_2 + (1-\alpha)\, P_3\}$
   topologisch abgeschlossen.

Näheres zu den beiden letzten in

Iseler, A. (1998). Über richtungsbasierte Relationen in reellen Vektorräumen. In K. Ch. Klauer & H. Westmeyer (Hrsg.), *Psychologische Methoden und soziale Prozesse - Festschrift für Hubert Feger* (S. 80-121). Lengerich: Pabst.

4 Konsequenzen

U-Test Kriterium intransitiv und nicht konvex kürzbar.
Median-Kriterium nicht konvex kürzbar.

Theorem zum Erwartungswert-Kriterium:

Es sei W eine endliche Menge, Π die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\wp W$, und $\preceq$ eine konvex kürzbare schwache Ordnung auf Π. Ferner sei für jede Abbildung $\phi: W \to \mathbb{R}$ eine Abbildung $g_\phi: \Pi \to \mathbb{R}$ durch die für jedes $P \in \Pi$ gültige Gleichung

$$g_\phi(P) := \textstyle\sum_{w \in W} P(\{w\}) \cdot \phi(w)$$

definiert. Dann gibt es eine bis auf positive Linear-Transformationen eindeutig bestimmte Abbildung $\phi: W \to \mathbb{R}$ derart, daß für alle zur Menge Π gehörenden Wahrscheinlichkeitsmaße P_1 und P_2 die Implikation

$$g_\phi(P_1) < g_\phi(P_2) \;\Rightarrow\; P_1 \prec P_2$$

gilt. Für diese Abbildung ϕ gilt außerdem: Die Relation $\preceq$ ist genau dann vor-archimedisch, wenn für alle zur Menge Π gehörenden Wahrscheinlichkeitsmaße P_1 und P_2 die Äquivalenz

$$g_\phi(P_1) = g_\phi(P_2) \;\Leftrightarrow\; P_1 \sim P_2$$

gilt. Ist dies der Fall, dann gilt für alle zur Menge Π gehörenden Wahrscheinlichkeitsmaße P_1 und P_2 auch

$$g_\phi(P_1) \leq g_\phi(P_2) \;\Leftrightarrow\; P_1 \preceq P_2.$$

Definition einer induzierten Ordnung auf Π

Es sei W eine endliche Menge, und $\preceq_W$ eine Quasiordnung auf W. Ferner sei Π die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\wp W$. Dann ist die durch die Ordnung $\preceq_W$ induzierte Ordnung auf Π die sparsamste konvex kürzbare und vor-archimedische Quasiordnung auf Π, bei der für alle Elemente v und w der Menge W die Äquivalenz

$$\varepsilon_v \preceq \varepsilon_w \;\Leftrightarrow\; v \preceq_W w$$

gilt.

Dabei sind ε_v und ε_w die durch $\varepsilon_v(\{v\}) := 1$ und $\varepsilon_w(\{w\}) := 1$ definierten Dirac-Maße.
Beispiele:
- Ist $\preceq_W$ konnex, dann ist die durch $\preceq_W$ induzierte Ordnung auf Π die "stochastische Ordnung".
- Es sei W die Menge der möglichen Lösungsmuster eines Tests, und $\preceq_W$ sei eine Quasiordnung auf W mit folgender Interpretation: Für Lösungsmuster v und w trifft die Relation $v \preceq_W w$ genau dann zu, wenn für jedes Item die Lösung in v höchstens so "richtig" ist wie in w. Dann ist die durch $\preceq_W$ induzierte Ordnung auf Π die auf den "Lösungs"-Wahrscheinlichkeiten

basierte Ordnung, sofern für jedes Item nur zwischen "richtigen" und "falschen" Lösungen unterschieden wird.

Bei beiden Beispielen ist die vor-archimedische Eigenschaft bereits durch die Forderung nach Reflexivität gewährleistet.

Theorem zu induzierten Ordnungen auf Π:

Es sei W eine endliche Menge, Π die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\wp W$, $\preceq_W$ eine Quasiordnung auf W und $\preceq$ die durch $\preceq_W$ induzierte Ordnung auf Π. Schließlich sei für jede Abbildung $\phi{:}W\to\mathbb{R}$ eine Abbildung $g_\phi{:}\Pi\to\mathbb{R}$ durch die für jedes $P \in \Pi$ gültige Gleichung

$$g_\phi(P) := \sum_{w\in W} P(\{w\}) \cdot \phi(w)$$

definiert. Dann gibt es eine Menge Φ von Abbildungen $\phi{:}W\to\mathbb{R}$ derart, daß für alle zur Menge Π gehörenden Wahrscheinlichkeitsmaße P_1 und P_2 die Äquivalenz

$$P_1 \preceq P_2 \;\Leftrightarrow\; \forall\, \phi \in \Phi{:}\; g_\phi(P_1) \leq g_\phi(P_2)$$

gilt.

Die größte Menge Φ besteht aus allen Abbildungen $\phi{:}W\to\mathbb{R}$, bei denen für alle Elemente v und w der Menge W die Implikation $\phi(v) < \phi(w) \;\Rightarrow\; v \prec_W w$ gilt. Es können aber auch geeignete Untermengen dieser Menge die Rolle von Φ übernehmen.

Beipiele:
- Bei stochastischer Ordnung bilden die Indikator-Variablen für Ereignisse der Art $Y > x$ eine hinreichende Menge Φ. Die größte Menge Φ besteht hier aus allen im Hinblick auf die Relation $\preceq_W$ monoton steigenden Abbildungen $\phi{:}W\to\mathbb{R}$.
- Bei der auf den "Lösungs"-Wahrscheinlichkeiten basierten Ordnung bilden die Indikator-Variablen für Ereignisse der Form "Item j richtig gelöst" eine hinreichende Menge Φ. Eine andere geeignete Menge Φ besteht hier aus allen Auswertungsregeln, bei denen der Gesamtscore eine Summe von Itemscores ist, wobei es pro Item um so mehr Punkte gibt, je "richtiger" die Lösung.

Konsequenzen für die Herleitung prüfbarer Aggregat-Hypothesen:

Auch wenn man der *Explikation* eine induzierte Ordnung auf Π (z.B. die stochastische Ordnung oder die auf den "Lösungs"-Wahrscheinlichkeiten basierte Ordnung) zugrundelegt, kann als erster Schritt der *Herleitung* einer prüfbaren Aggregat-Hypothese auf die Implikation

$$P_{ua} \prec P_{ub} \;\Rightarrow\; g_\phi(P_{ua}) < g_\phi(P_{ub})$$

zurückgegriffen werden, die z.B. bei stochastischer Ordnung für jedes streng monoton steigende ϕ und bei Lösungs-Wahrscheinlichkeiten-Ordnung für die o.g. additiven Auswertungsregeln gilt.

Im Zusammenhang einer solchen Herleitung kommen dann für die Formulierung von hergeleiteten Hypothesen auch Erwartungswerte auf Skalen in Frage, die - isoliert betrachtet - haarsträubende "Per-fiat-Messung" darstellen.

Strenge Prüfung bedeutet dann allerdings Wahl eines ϕ, bei dem noch am ehesten Falsifikationen denkbar sind.