Übungen zur Vorlesung ‘Lineare Algebra II’

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 9

Abgabe: Bis Montag, den 18.06.2018, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (12 Punkte) Für die Basis

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $V := \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und die folgende Bilinearformen $b_i \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$ berechnen Sie die Matrix $b_i(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ und die Signatur der Bilinearformen, wobei

a) $b_1(A, B) := \mathrm{Spur}(A^t B)$

b) $b_2(A, B) := \det(A + B) - \det(A) - \det(B)$

für $A, B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Welche Bilinearformen sind nicht ausgeartet? Welche Bilinearformen sind positiv definit?

Aufgabe 2. (2+3+3+2 Punkte) Für einen unitären Vektorraum V und unitäre Endomorphismen $f, g \in \mathrm{U}(V)$ beweisen Sie:

a) $f \circ g$ ist unitär.

b) f bijektiv und ferner ist f^{-1} unitär.

c) Die Menge $\mathrm{U}(V)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

d) Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von f gilt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 3. (4+4+2 Punkte) Sei $\langle -, - \rangle : V \times V \to K$ ein Skalarprodukt auf einem K-Vektorraum V (mit $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine orthonormale Basis von V (d.h.$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$). Beweisen Sie die folgende Aussagen.

a) Für alle $v \in V$ gilt

$$v = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, v \rangle \cdot v_k.$$

Bitte wenden!

b) Parseval-Gleichung: für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle v_k, v \rangle} \langle v_k, w \rangle.$$

c) Bessel-Gleichung: für alle $v \in V$ gilt

$$||v||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle v_k, v \rangle|^2.$$

Aufgabe 4. (8 Punkte) Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ orthonormale Basen von V. Beweisen Sie, dass die Basiswechsel-Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}_V)$ eine orthogonale Matrix ist.