Übungen zur Vorlesung 'Lineare Algebra II'

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 8

Abgabe: Bis Montag, den 11.06.2018, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (8 Punkte) Beweisen Sie, dass die Charakteristik eines Körpers K entweder Null oder eine Primzahl ist.

Aufgabe 2. (4+4+4 Punkte) Für $n, d \in \mathbb{N}$ sei $K[t_1, \dots, t_n]$ der Ring der Polynome in n Variablen $t_1, \dots, t_n$ über K und sei

$$K[t_1, \dots, t_n]_d := \{P \in K[t_1, \dots, t_n] : P \text{ ist homogen vom Grad } d\},$$

wobei

$$P(t_1, \dots, t_n) = \sum_{I=(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_I t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}$$

homogen vom Grad d ist, wenn aus $a_I \neq 0$ die Gleichung $i_1 + \dots + i_n = d$ folgt.

a) Beweisen Sie, dass ein Polynom $P(t_1, \dots, t_n)$ genau dann homogen vom Grad d ist, wenn für alle $\lambda \in K$ gilt

$$P(\lambda \cdot t_1, \dots, \lambda \cdot t_n) = \lambda^d P(t_1, \dots, t_n).$$

b) Zeigen Sie, dass $K[t_1, \dots, t_n]_d$ ein Untervektorraum von $K[t_1, \dots, t_n]$ ist.

c) Was ist die Dimension von $K[t_1, t_2]_d$? Was ist die Dimension von $K[t_1, \dots, t_n]_2$?

Optional: Was ist die Dimension von $K[t_1, \dots, t_n]_d$?

Aufgabe 3. (8 Punkte) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ eine reelle symmetrische Matrix. Beweisen Sie, dass die Matrix A genau dann positiv definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

Aufgabe 4. (12 Punkte) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ eine reelle symmetrische Matrix. Wir definieren $A_k = (a_{ij})_{1\le i,j\le k} \in \mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) A ist positiv definit,

(2) für $1 \le k \le n$ gilt $\det(A_k) > 0$.

Hinweis: Für (1) $\implies$ (2) verwenden Sie Aufgabe 3 und die Beobachtung, dass die Einschränkung einer postiv definiten symmetrischen Bilinearform auch positiv definit ist. Dann beweisen Sie (2) $\implies$ (1) durch Induktion nach n.