Übungen zur Vorlesung ‘Lineare Algebra II’

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 7

Abgabe: Bis Montag, den 04.06.2018, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (5 + 4 + 5 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum mit einer geordneten Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$. Sei $\mathrm{Bil}_K^{\mathrm{sym}}(V)$ die Menge aller symmetrischen Bilinearformen auf V und sei $\mathrm{Mat}_{n\times n}^{\mathrm{sym}}(K)$ die Menge aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Beweisen Sie:

a) $\mathrm{Bil}_K^{\mathrm{sym}}(V) \subset \mathrm{Bil}_K(V)$ und $\mathrm{Mat}_{n\times n}^{\mathrm{sym}}(K) \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ sind Untervektorräume.

b) Für $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$ gilt: b ist genau dann symmetrisch, wenn $b(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ symmetrisch ist.

c) Es gibt einen linearen Isomorphismus $\mathrm{Bil}_K^{\mathrm{sym}}(V) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}^{\mathrm{sym}}(K)$.

Aufgabe 2. (8 Punkte) Sei $V = \{P(t) \in \mathbb{R}[t] : \mathrm{Grad}(P) \leq 2\}$. Beweisen Sie, dass

$$b(P_1(t), P_2(t)) := \int_0^1 P_1(t)P_2(t)dt$$

ist eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Geben Sie ein Beispiel einer nicht ausgearteten Bilinearform $b : V \times V \to K$ auf $V := K^2$ und ein Untervektorraum $U \subset V$, so dass $b|_{U\times U}$ ausgeartet ist.

Aufgabe 4. (10 + 2 Punkte) Sei K ein Korper mit $1_K + 1_K \neq 0_K$ und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Für jede antisymmetrische Bilinearform $b : V \times V \to K$ beweisen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{A}$ von V gibt mit

$$b(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & S & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & S \end{pmatrix} \quad \text{für } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden

Was ist eine notwendige Bedingung für V eine nicht ausgeartete antisymmetrische Bilinearform zu haben?

Hinweis: beweisen Sie die erste Aussage durch Induktion nach $\dim(V)$. Wenn es $v_1, v_2 \in V$ gibt mit $b(v_1, v_2) \neq 0$ beweisen Sie, dass die Dimension von $U := \operatorname{Span}(v_1, v_2)$ gleich 2 ist und es eine Basis $\mathcal{A}_U$ von U gibt mit $b|_{U\times U}(\mathcal{A}_U, \mathcal{A}_U) = S$. Erklären Sie, warum $V = U \oplus U^\perp$ und dann benutzen Sie die Induktionsvoraussetzung.