Übungen zur Vorlesung 'Lineare Algebra II'

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 6

Abgabe: Bis Montag, den 28.05.2018, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (6 Punkte) Beweisen Sie, dass die Relation von Kongruenz auf $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ eine Äquivalenzrelation ist. Zur Erinnerung: Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ sind Kongruent ($A \approx B$), wenn es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $A = S^t BS$ gibt.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei $V = \{P(t) \in \mathbb{R}[t] : \mathrm{Grad}(P) \leq 2\}$. Beweisen Sie, dass

$$b(P_1(t), P_2(t)) := \int_0^1 P_1(t)P_2(t)dt$$

eine Bilinearform auf V ist. Dann finden Sie die Matrix $b(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ für die Basis $\mathcal{A} := (1, t, t^2)$.

Aufgabe 3. (12 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Sei $\Phi_{\mathcal{A}} : V \to K^n$ der Isomorphismus mit $\Phi_{\mathcal{A}}(v_i) = e_i$ für $1 \leq i \leq n$.

a) Für eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ auf V, zeigen Sie, dass für alle $v_1, v_2 \in V$ die Gleichung

$$b(v_1, v_2) = \Phi_{\mathcal{A}}(v_1)^t b(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \Phi_{\mathcal{A}}(v_2)$$

gilt, wobei $b(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ die Matrix mit $b(\mathcal{A}, \mathcal{A})_{ij} = b(v_i, v_j)$ ist.

b) Für eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ beweisen Sie, dass $b_B^{\mathcal{A}} : V \times V \to K$ mit

$$b_B^{\mathcal{A}}(v_1, v_2) := \Phi_{\mathcal{A}}(v_1)^t B \Phi_{\mathcal{A}}(v_2)$$

eine Bilinearform auf V ist.

c) Für die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{\mathcal{A}} : & \mathrm{Bil}_K(V) & \to & \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \\ & b(-,-) & \mapsto & b(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \end{array}$$

beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{\mathcal{A}}^{-1} : & \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) & \to & \mathrm{Bil}_K(V) \\ & B & \mapsto & b_B^{\mathcal{A}}(-,-) \end{array}$$

eine Umkehrfunktion von $\Psi_{\mathcal{A}}$ ist ($\Psi_{\mathcal{A}} \circ \Psi_{\mathcal{A}}^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)}$ und $\Psi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Psi_{\mathcal{A}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Bil}_K(V)}$).

Bitte wenden

Aufgabe 4. (6 + 6 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum und sei $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform auf V.

a) Beweisen Sie, dass die Abbildung $f_b : V \to V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ mit

$$f_b(v) := b(-, v) : V \to K$$

wohldefiniert ist (d.h. $f_b(v) \in V^*$ für alle $v \in V$) und f_b linear ist.

b) Wenn $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V ist, beweisen Sie, dass

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}^*}(f_b) = b(\mathcal{A}, \mathcal{A}),$$

wobei $b(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ die Matrix mit $b(\mathcal{A}, \mathcal{A})_{ij} = b(v_i, v_j)$ ist und $\mathcal{A}^* \subset V^*$ die duale Basis von $\mathcal{A} \subset V$ ist.