Übungen zur Vorlesung ‘Lineare Algebra II’

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Montag, den 14.05.2017, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (4 + 6 Punkte) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedene Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Beweisen Sie

a) $\det(A) = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{\mu_a(A,\lambda_i)}$,

b) $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^k \mu_a(A,\lambda_i)\lambda_i$,

wobei $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

[Hinweis: Sie können die Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen[1] verwenden, d.h. für $n \times n$ Matrizen A, B, C gilt $\mathrm{Spur}(ABC) = \mathrm{Spur}(BCA)$].

Aufgabe 2. (6 + 4 + 4 Punkte)

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom eines Jordan-Blocks

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(K)$$

mit $\lambda \in K$ und $d \in \mathbb{N}$.

b) Was ist das charakteristische Polynom und das Minimalpolyom einer Matrix A in JNF mit s_i Jordan-Blöcke $J_{d_i}(\lambda_i)$ für $1 \leq i \leq k$?

c) Beweisen Sie:

i) Zwei Jordan-Blöcke $J_r(\lambda)$ und $J_s(\mu)$ sind genau dann ähnlich, wenn $r = s$ und $\lambda = \mu$.

ii) Zwei Matrizen A und B in JNF sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleiche Anzahl von jedem Jordan-Block $J_r(\lambda)$ haben.

[1] Um diese Eigenschaft zu beweisen, kann man zeigen, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Sei A eine Matrix mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2).$$

Finden Sie alle mögliche JNF von A (bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke). In jedem Fall berechnen Sie das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 4. (10 Punkte) Finden Sie eine JNF der folgenden nilpotenten Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und finden Sie eine invertierbare Matrix S, so dass SAS^{-1} in JNF ist.