Übungen zur Vorlesung ‘Lineare Algebra II’

V. Hoskins (SS 2018)

Übungsblatt 3

Abgabe: Bis Montag, den 07.05.2017, 16 Uhr.

Aufgabe 1. (8 Punkte) Ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar über den folgenden Körper?

a) $\mathbb{R}$,

b) $\mathbb{C}$,

c) ein Körper K mit $1 + 1 = 0$,

d) $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mit Addition und Multiplikation modulo 7).

Aufgabe 2. (12 Punkte) Finden Sie die charakteristische Polynome und Minimalpolynome der folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die inverse Matrizen A^{-1} und B^{-1}.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

und finden Sie die Eigenräume und Haupträume von A. Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N, so dass A ähnlich zu $D + N$ ist (d.h. $A \sim D + N$).

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (5 + 5 Punkte) Für einen Körper K und einen K-Vektorraum V betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & K[t] \times \mathrm{End}_K(V) & \to & \mathrm{End}_K(V) \\ & (P(t), f) & \mapsto & P(f). \end{array}$$

a) Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ beweisen Sie, dass $\Phi(-, f) : K[t] \to \mathrm{End}_K(V)$, die Abbildung $P(t) \mapsto P(f)$, eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräume und ein Ring-Homomorphismus ist.

b) Für $P(t) \in K[t]$ ist die Abbildung $\Phi(P(t), -) : \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V)$, die durch $f \mapsto P(f)$ definiert wird, ein Ring-Homomorphismus bzw. eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräume? Beweisen Sie Ihre Antwort oder geben Sie ein Gegenbeispiel.